

# Agujeros negros de Kerr-Newman en teorías $f(R)$

## Kerr-Newman black holes in $f(R)$ theories

J. A. R. Cembranos<sup>(a)\*</sup>, A. de la Cruz-Dombriz<sup>(a,b)\*\*</sup> y Pablo Jimeno Romero<sup>(a)\*\*\*</sup>  
<sup>(a)</sup> *Departamento de Física Teórica I, Universidad Complutense de Madrid, E-28040 Madrid, Spain. and*  
<sup>(b)</sup> *Department of Mathematics and Applied Mathematics,*  
*University of Cape Town, 7701 Rondebosch, South Africa.*  
(Dated: 20 de junio de 2011)



PACS numbers: 98.80.-k, 04.50.+h

---

\*E-mail: cembra@fis.ucm.es

\*\*E-mail: dombriz@fis.ucm.es

---

\*\*\*E-mail: jimeno.romero@gmail.com

Dentro del campo de investigación de las teorías  $f(R)$  de gravedad modificada, abordamos el estudio de las soluciones de agujero negro de tipo Kerr-Newman. Centrándonos en las soluciones de curvatura escalar constante no nula, estudiamos la métrica que satisface las ecuaciones de campo modificadas. De esta manera determinamos que la existencia de agujeros negros con estructura de horizontes bien definida viene dada por el signo de un parámetro dependiente de la masa, la carga, el espín y la curvatura escalar en ausencia de constante cosmológica  $\Lambda$ . Se encuentra que para una curvatura escalar negativa, el caso de agujero negro *extremal* se dará para un momento angular  $a_{max} < M$  (y no  $a_{max} = M$ , como es el caso en Relatividad General), y que para curvatura escalar positiva se tienen dos tipos de agujeros negros extremales: el usual, que en este caso se dará para  $a_{max} > M$ , y el *extremal marginal*, donde el agujero negro carece de horizonte exterior (pero no interior) si no rota con un  $a > a_{min}$ . Analizamos finalmente la termodinámica del agujero negro, así como su estabilidad local y global. Para terminar ilustramos cómo se presentan estas propiedades en algunos modelos  $f(R)$  dependiendo de los distintos valores de sus parámetros.

In the context of  $f(R)$  modified gravity theories, we study the Kerr-Newman black-hole solutions. We study the non zero constant scalar curvature solutions and discuss the metric tensor that satisfies the modified field equations. We determine that the black holes existence is given by the sign of a parameter dependent of the mass, the charge, the spin and the scalar curvature in absence of a cosmological constant  $\Lambda$ . We obtain that for negative values of the curvature, the extremal black hole is no longer given by a spin parameter  $a_{max} = M$  (as is the case in general relativity), but by an  $a_{max} < M$ , and that for positive values of the curvature there are two kinds of extremal black holes: the usual one, that occurs for an  $a_{max} > M$ , and the extreme marginal one, where the exterior (but not interior) black hole's horizon vanishes provided that  $a < a_{min}$ . Thermodynamics for this kind of black holes is then studied, as well as their local and global stability. Finally we see for different  $f(R)$  models how these properties manifest for different values of their parameters.

### Índice de Contenidos:

1. Introducción.
2. Resultados Generales de las teorías  $f(R)$ .
3. Agujeros Negros de Kerr-Newman en teorías  $f(R)$ .
4. Termodinámica de Agujeros Negros en teorías  $f(R)$ .
5. Ejemplos Particulares de Modelos  $f(R)$ .
6. Conclusiones.

**Palabras Clave:** Agujeros Negros, Kerr, Kerr-Newman, Gravedad Modificada,  $f(R)$ .

**Keywords:** Black Holes, Kerr, Kerr-Newman, Modified Gravity,  $f(R)$ .

## I. INTRODUCCIÓN

La Relatividad General (RG) ha sido la teoría gravitatoria más exitosa del último siglo, ampliamente aceptada como una teoría que describe las propiedades geométricas macroscópicas del espacio-tiempo. Para una geometría homogénea e isotrópica, la RG da lugar a las ecuaciones de Friedmann con las cuales se puede describir de forma adecuada la evolución cosmológica con épocas dominadas por radiación y materia sucesivamente. Sin embargo, el desarrollo de la cosmología observacional en las últimas décadas, con experimentos de precisión cada vez mayor, como WMAP, PLANCK o SDSS, ha revelado que el Universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada [1]. Se tiene pues la urgente necesidad de explicar este fenómeno, pues la RG con fuentes de materia usual no es capaz de ello. Por otro lado, la RG no puede dar cuenta de la etapa cosmológica conocida como inflación [2], que se cree ocurrió antes de la época dominada por radiación, y que resolvería ciertos problemas de la cosmología estándar, como el problema del horizonte o el problema de la planitud. Por último, la RG con materia usual bariónica tampoco es capaz de explicar las curvas de rotación de galaxias observadas, cuya aclaración requiere de la introducción de la materia oscura [3].

Las posibles explicaciones a la expansión acelerada del Universo son múltiples. Una de ellas invoca la existencia de un tipo de fluido cósmico, la energía oscura (DE), cuya ecuación de estado  $p = \omega_{DE}\rho$  (donde,  $p$  y  $\rho$  son la presión y la densidad de energía del fluido) exigiría que  $\omega_{DE} < -1/3$  para proporcionar una expansión cosmológica acelerada. La constante cosmológica  $\Lambda$  es el modelo más sencillo de energía oscura, lo que correspondería al caso  $\omega_{DE} = -1$ . Sin embargo, si asumimos que la constante cosmológica representa la energía cuántica del vacío, su escala energética resulta ser muchos órdenes de magnitud mayor que la densidad de energía oscura observada [4]. A esto se añade el problema de que esta constante cosmológica no puede dar cuenta de un periodo inflacionario, teniéndose para ello que introducir en el modelo (llamado modelo  $\Lambda$ CDM) un campo escalar  $\phi$  que evolucione lentamente, conocido como *inflatón*.

Otro tipo de explicaciones de la mencionada aceleración cosmológica vienen dadas por teorías que modifican la RG añadiendo al Lagrangiano gravitacional potencias del escalar de curvatura  $R$ , los tensores de Riemann y Ricci, o derivados de los tres anteriores; ejemplos son las teorías tipo Lovelock, libres de fantasmas y donde las ecuaciones de campo contienen como mucho segundas derivadas de la métrica; los modelos inspirados en la teoría de cuerdas que incluyen un término de Gauss-Bonnet en el Lagrangiano; teorías escalar-tensor como la de Brans-Dicke, en la cual la interacción gravitatoria viene mediada por un campo escalar así como por el campo tensorial de la RG; o las conocidas como teorías  $f(R)$ , de las que nos ocuparemos en esta investigación. En [5] se encuentran recopiladas algunas de estas teorías y se proponen diversos modelos capaces de reproducir la historia cosmológica en su totalidad, desde inflación hasta la era de expansión acelerada actual.

En este trabajo nos restringiremos a teorías  $f(R)$  en el formalismo métrico (que considera la conexión depen-

diente de la métrica, por lo que los campos presentes en la parte gravitatoria de la acción provienen únicamente del tensor métrico) en el *frame* de Jordan. En este *frame*, el Lagrangiano gravitatorio viene dado por  $R + f(R)$ , donde  $f(R)$  es una función arbitraria de  $R$  y las ecuaciones de Einstein suelen ser de cuarto orden para la métrica. Otra forma de realizar el estudio sería dentro del *frame* de Einstein, donde se tiene la gravedad ordinaria de Einstein acoplada a un escalar más un campo masivo de espín 2. Si bien puede establecerse una equivalencia matemática entre estos dos *frames*, durante los últimos años se ha mantenido una cierta controversia respecto de su equivalencia física.

En [6], se estudian diversas aplicaciones de estas teorías en gravitación y cosmología, así como diversas formas de distinguir las observacional y experimentalmente de la RG. En [7] se proponen varias funciones  $f(R)$  compatibles con tests locales de gravedad y otras cotas cosmológicas.

El estudio de teorías gravitatorias alternativas a la RG requiere poder confirmar o descartar su validez mediante la obtención de soluciones que puedan describir correctamente, por ejemplo, la evolución cosmológica, el crecimiento de las perturbaciones cosmológicas, y, a nivel astrofísico, la existencia de objetos predichos por la RG tales como los agujeros negros (AN). Es un hecho conocido que en el caso de las teorías  $f(R)$ , escogiendo funciones adecuadas puede imitarse cualquier evolución cosmológica, y en particular, la descrita por el modelo  $\Lambda$ CDM. Éste es el conocido como problema de la degeneración que presentan varias teorías de gravedad modificada; a partir de las observaciones a grandes escalas (supernovas de tipo Ia, oscilaciones acústicas de bariones, o el fondo cósmico de microondas), las cuales dependen únicamente de la historia evolutiva del Universo, no se puede discernir con seguridad la naturaleza y origen de la energía oscura ya que los mismos resultados pueden ser explicados por diversas teorías. No obstante, uno de nosotros [8] demostró que las teorías  $f(R)$ , aun imitando la expansión cosmológica estándar, ofrecen resultados diferentes al modelo  $\Lambda$ CDM si se estudian sus perturbaciones cosmológicas escalares, las cuales presentan un espectro de potencias de materia que sería distinguible del predicho por  $\Lambda$ CDM.

Resulta indispensable por tanto el estudio de las propiedades de los AN en este tipo de teorías, pues algunas de las características conocidas de los AN podrían ser exclusivas de la gravitación de Einstein, o bien podrían ser propiedades intrínsecas de cualquier teoría de gravitación covariante. Por otro lado, los resultados obtenidos podrían llevarnos a desechar modelos en desacuerdo con resultados físicos esperados. Con este fin, el estudio de la termodinámica de los AN se perfila de gran interés pues las regiones de existencia estable (local y global) dependen de los valores de los parámetros del modelo considerado.

Las propiedades de los AN han sido ampliamente estudiadas en otras teorías modificadas de la gravedad. Por ejemplo, [9, 10] estudiaron AN en la teoría de Einstein con un término de Gauss-Bonnet y una constante cosmológica. Términos de interacción Gauss-Bonnet y/o Riemann cuadrático se estudian en [11], llegando a la

conclusión de que podrían darse transiciones de fase para una curvatura negativa del horizonte. Los AN en teorías de gravitación Lovelock se estudiaron en [12], donde se evaluó la correspondiente entropía.

Estudios previos sobre AN en las teorías  $f(R)$  probaron que la solución de Schwarzschild es la única esféricamente simétrica para una acción de la forma  $R + aR^2$  dentro del *frame* de Einstein. En [13] se proponen, de nuevo en el *frame* de Einstein, teoremas de unicidad para soluciones esféricamente simétricas y con un número arbitrario de dimensiones (ver [14] para resultados adicionales). Ver también [15] para soluciones esféricas con fuentes. Se han estudiado [16] AN de tipo Anti de Sitter (*AdS*) en modelos  $f(R)$  usando el método de la acción euclidiana (ver por ejemplo [17, 18]) para así poder determinar diferentes magnitudes termodinámicas. En [19] la entropía de AN de tipo Schwarzschild-de Sitter (*SdS*) se calcula en vacío para ciertos modelos cosmológicos viables, y se discute su estabilidad cosmológica. En [20] se demostró que la única solución –hasta segundo orden en perturbaciones– estática y esféricamente simétrica de AN masivo para un número arbitrario de dimensiones en teorías  $f(R)$  era la solución Schwarzschild-(*A*)*dS*. En esa misma investigación se realizó un estudio termodinámico de AN Schwarzschild-*AdS* para distintos modelos  $f(R)$  y se puso de manifiesto la relación entre viabilidad cosmológica y termodinámica de estos objetos.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la segunda sección se presentan, dentro del formalismo métrico, algunos resultados generales de las teorías  $f(R)$  para ciertas situaciones físicas de gran interés y las condiciones ampliamente aceptadas de viabilidad cosmológica y gravitacional de estas teorías. En la tercera, estudiamos ampliamente la solución de vacío, axisimétrica y estacionaria que describe un AN con carga eléctrica y momento angular en estas teorías. La cuarta sección está dedicada al estudio de las propiedades termodinámicas de dichas soluciones, mientras la quinta analiza gráficamente los resultados obtenidos en la sección tercera para ciertos modelos  $f(R)$ . Para finalizar, se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo.

## II. RESULTADOS GENERALES

Con el fin de estudiar las posibles soluciones de una teoría  $f(R)$  cualquiera, partimos de la acción:

$$S = S_g + S_m, \quad (1)$$

donde  $S_g$  es la acción gravitatoria:

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{|g|} (R + f(R)), \quad (2)$$

con  $G \equiv M_p^2$  la constante de Newton (donde  $M_p$  es la masa de Planck),  $g$  el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ),  $R$  el escalar de curvatura y  $f(R)$  la función que define la teoría a considerar. La acción asociada a la materia,  $S_m$ , permite definir el tensor de energía-momento como:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (3)$$

De la variación de la acción (1) con respecto al tensor métrico, se encuentra que las ecuaciones de campo en formalismo métrico son:

$$R_{\mu\nu}(1 + f'(R)) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + f(R)) + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f'(R) + 8\pi G T_{\mu\nu} = 0, \quad (4)$$

con  $R_{\mu\nu}$  el tensor de Ricci,  $\square = \nabla_\beta \nabla^\beta$  (donde  $\nabla$  es la derivada covariante) y  $f'(R) = \partial f(R)/\partial R$ . Tomando la traza en esta ecuación se obtiene:

$$R(1 + f'(R)) - 2(R + f(R)) - 3\square f'(R) + 8\pi G T = 0, \quad (5)$$

donde  $T = T^\mu{}_\mu$ . Es interesante observar que, al contrario que en RG, las soluciones de vacío ( $T = 0$ ) no implican necesariamente una curvatura nula  $R = 0$ . A partir de la ecuación (4) puede obtenerse la condición necesaria para soluciones de curvatura escalar constante  $R = R_0$  en vacío

$$R_{\mu\nu} (1 + f'(R_0)) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_0 + f(R_0)) = 0. \quad (6)$$

y el tensor de Ricci resulta ser proporcional a la métrica:

$$R_{\mu\nu} = \frac{R_0 + f(R_0)}{2(1 + f'(R_0))} g_{\mu\nu}, \quad (7)$$

con  $1 + f'(R_0) \neq 0$ . Por otro lado, tomando la traza de la ecuación anterior se obtiene:

$$R_0 (1 + f'(R_0)) - 2(R_0 + f(R_0)) = 0. \quad (8)$$

Es interesante ver algunos casos concretos de modelos  $f(R)$  que permiten recuperar los resultados de RG. Haciendo  $f(R) = 0$ , es obvio que se han de recuperar las ecuaciones de campo de Einstein derivadas de la acción de Einstein-Hilbert. En vacío sin fuentes estas ecuaciones dan lugar a  $R_{\mu\nu} = 0$  y  $R = 0$ . En cambio, si añadimos una constante cosmológica  $\Lambda$  tomando  $f(R) = -2\Lambda$ , la solución de vacío da lugar a  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$  y a una curvatura escalar constante  $R = 4\Lambda$ .

### A. Condiciones de viabilidad de modelos $f(R)$

Las condiciones y restricciones básicas que se imponen habitualmente [21] a las teorías  $f(R)$  para que puedan proporcionar modelos gravitatorios consistentes son:

1)  $f''(R) \geq 0$  para  $R \gg f''(R)$ . Este es el requerimiento de un régimen clásico y estable para curvaturas grandes [22] y el de la existencia de una época dominada por materia en la evolución cosmológica. A esta condición se le puede dar una interpretación física simple: si se define una constante gravitatoria efectiva  $G_{eff} \equiv G/(1 + f'(R))$ , entonces el signo de su variación con respecto de  $R$ ,  $dG_{eff}/dR$ , viene determinado únicamente por el signo de  $f''(R)$ , por lo que si  $f''(R) < 0$ ,  $G_{eff}$  crecería según creciera  $R$ , pues  $R$  en sí genera mayor y mayor curvatura. Este mecanismo desestabilizaría la teoría, que no tendría un estado fundamental, pues cualquier pequeña curvatura crecería indefinidamente. En cambio, si  $f''(R) \geq 0$ , un

mecanismo de reacción opera para compensar ese crecimiento de  $R$  y estabilizar el sistema.

**2)**  $1 + f'(R) > 0$ . Esta condición asegura que la constante gravitatoria efectiva sea positiva según se puede ver de la definición anterior de  $G_{eff}$ . También se puede interpretar desde el punto de vista cuántico como la condición que ha de cumplirse para evitar que el gravitón se convierta en un fantasma [23].

**3)**  $f'(R) < 0$ . Teniendo en cuenta las fuertes restricciones de la nucleosíntesis primordial y del fondo cósmico de microondas, esta condición asegura que el comportamiento previsto por RG se recupera para épocas tempranas, es decir,  $f(R)/R \rightarrow 0$  y  $f'(R) \rightarrow 0$  según  $R \rightarrow \infty$ . Combinando ésta con las condiciones 1 y 2, se tiene pues que  $f'(R)$  ha de ser una función negativa monótona creciente de  $R$  con valores en el rango  $-1 < f'(R) < 0$ .

**4)**  $f'(R)$  debe ser pequeña en épocas recientes. Esto es necesario para satisfacer las restricciones impuestas por los tests locales (solar y galáctico) de gravedad. Tal como se indica en el análisis realizado en [24], el valor de  $|f'(R)|$  no debería ser mayor de  $10^{-6}$  (valor sobre el que todavía hay gran controversia). Este requerimiento no es necesario si el único objetivo es conseguir un modelo que explique la aceleración cósmica.

### III. AGUJEROS NEGROS DE KERR-NEWMAN EN TEORÍAS $f(R)$

A partir de este momento consideraremos las unidades  $G = c = \hbar = k_B = 1$ . Dado que vamos a buscar solu-

ciones en vacío de curvatura constante  $R_0$  para campos generados por objetos masivos cargados, la acción apropiada será:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{|g|} (R + f(R) - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \quad (9)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , siendo  $A_\mu$  el potencial electromagnético. Esta acción da lugar a las nuevas ecuaciones de campo:

$$R_{\mu\nu} (1 + f'(R_0)) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_0 + f(R_0)) - 2 \left( F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (10)$$

Es importante destacar el hecho de que si tomamos la traza de esta ecuación, se recupera la ecuación (8) derivado del hecho de que  $\text{Tr}(F_{\mu\nu}) = 0$ , lo que implica que el último término de la anterior ecuación no contribuye a la traza, por lo que formalmente es equivalente a (8). La solución de curvatura constante  $R_0$ , axisimétrica y estacionaria de estas ecuaciones que describe un AN con masa, carga eléctrica y momento angular fue encontrada por Carter y publicada por primera vez en 1973 [25]. En coordenadas de tipo Boyer-Lindquist, la métrica, que describe sin problemas (tales como singularidades coordenadas) el espacio-tiempo exterior al AN e interior al horizonte cosmológico (cuando éste exista, lo que se verá más adelante), adopta la forma:

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{\Delta_r} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left[ a \frac{dt}{\Xi} - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right]^2 - \frac{\Delta_r}{\rho^2} \left( \frac{dt}{\Xi} - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2, \quad (11)$$

con:

$$\begin{aligned} \Delta_r &:= (r^2 + a^2) \left( 1 - \frac{R_0}{12} r^2 \right) - 2Mr + \frac{q^2}{(1 + f'(R_0))}, \\ \rho^2 &:= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta_\theta &:= 1 + \frac{R_0}{12} a^2 \cos^2 \theta, \\ \Xi &:= 1 + \frac{R_0}{12} a^2, \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $M$  denota el parámetro de masa,  $a$  el parámetro de espín, y  $q$  el de carga eléctrica. Nótese que a diferencia de la solución de la RG, la contribución de la carga del AN al tensor métrico está corregida por un factor  $(1 + f'(R_0))^{-1/2}$ .

Por otra parte, el potencial vector y el tensor de campo electromagnético de la ecuación (10) para los que esta

métrica es solución, son, respectivamente:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{qr}{\rho^2} \left( \frac{dt}{\Xi} - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right), \\ F &= -\frac{q(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{\rho^4} \left( \frac{dt}{\Xi} - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right) \wedge dr \\ &\quad - \frac{2qra \cos \theta \sin \theta}{\rho^4} d\theta \wedge \left[ a \frac{dt}{\Xi} - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Para aligerar la notación, de ahora en adelante usaremos  $Q^2 = q^2 / (1 + f'(R_0))$  para referirnos al parámetro de carga eléctrica del AN.

La naturaleza de estas coordenadas se ve claramente considerando en la métrica (11) el límite  $M \rightarrow 0$ ,  $Q \rightarrow 0$ ,  $R_0 \rightarrow 0$ :

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (14)$$

es decir, recuperando el espacio-tiempo de Minkowski escrito en coordenadas espaciales  $(r, \theta, \phi)$  relacionadas con las cartesianas de la forma:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (15)$$

con  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Debemos recordar sin embargo, que, cuando  $M \neq 0$ ,  $Q \neq 0$  y  $R_0 \neq 0$ , la interpretación simple dada a estas coordenadas no es apropiada. Si por otro lado únicamente hacemos  $M \rightarrow 0$ ,  $Q \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 0$ , se obtiene la métrica correspondiente a un espacio-tiempo de curvatura constante que corresponderá a un espacio-tiempo de tipo de  $dS$  ó  $AdS$  en función del signo de  $R_0$ . También se ve fácilmente que tomando  $a \rightarrow 0$ ,  $Q \rightarrow 0$ , se tiene un AN de tipo Schwarzschild- $(A)dS$ . Es interesante estudiar las singularidades de este tipo de AN. Calculando el escalar  $R^{\mu\nu\sigma\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho}$ , se ve que únicamente  $\rho = 0$  es una singularidad intrínseca, y dada la definición de  $\rho$  en (12), dicha singularidad se dará para  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$ . Teniendo en cuenta que trabajamos con coordenadas de Boyer-Lindquist, éste conjunto de puntos representa un anillo de radio  $a$  centrado en el eje de rotación y situado en el plano ecuatorial del AN, tal como sucede en el AN de Kerr [26].

Es interesante también el estudio de la estructura de horizontes de este AN. De acuerdo con la definición de "horizonte" ( $g^{rr} = 0$ ), tenemos que éstos se presentan como las raíces de la ecuación  $\Delta_r = 0$ , es decir:

$$r^4 + \left(a^2 - \frac{12}{R_0}\right) r^2 + \frac{24M}{R_0} r - \frac{12}{R_0} (a^2 + Q^2) = 0, \quad (16)$$

ecuación de cuarto orden que se puede reescribir como:

$$(r - r_-)(r - r_{int})(r - r_{ext})(r - r_{cosm}) = 0, \quad (17)$$

donde  $r_-$  es una solución siempre negativa que carece de significado físico,  $r_{int}$  y  $r_{ext}$  son respectivamente los horizontes interior y exterior del AN, y  $r_{cosm}$  representa (en caso de que éste se dé, lo que como veremos a continuación, no siempre sucede) el horizonte de eventos cosmológico para observadores en órbitas  $r$  constante entre  $r_{ext}$  y  $r_{cosm}$ . Este horizonte separa la región que el mencionado observador podría ver de la que no podría ver jamás si esperase el tiempo suficiente. Siguiendo el método de L. Ferrari [27] de resolución de ecuaciones cuárticas, se tiene que la existencia o no de soluciones reales para esta ecuación vendrá dada en función del valor del factor que llamaremos *parámetro de horizonte*  $h$ :

$$h \equiv \left[ \frac{4}{R_0} \left(1 - \frac{R_0}{12} a^2\right)^2 - 4(a^2 + Q^2) \right]^3 + \frac{4}{R_0} \left\{ \left(1 - \frac{R_0}{12} a^2\right) \left[ \frac{4}{R_0} \left(1 - \frac{R_0}{12} a^2\right)^2 + 12(a^2 + Q^2) \right] - 18M^2 \right\}^2 \quad (18)$$

Para  $R_0$  negativa se pueden dar tres opciones: *i*)  $h > 0$ : existen únicamente dos soluciones reales,  $r_{int}$  y  $r_{ext}$ , no existiendo pues un horizonte cosmológico, tal como es el caso para AN en universos de tipo  $AdS$ . *ii*)  $h = 0$ : se tiene sólo una raíz real degenerada, caso del AN *extremal*, que se define como aquél en el que horizonte interior y exterior coinciden en un solo horizonte, y que da lugar a una gravedad superficial  $\kappa$  (que se definirá en la sección IV) nula. *iii*)  $h < 0$ : se encuentra que no hay ninguna solución real a la ecuación (18), no existiendo pues horizontes y dejando una *singularidad desnuda*.

Para  $R_0$  positiva, aparecen también distintas configuraciones en función del valor de  $h$ : *i*)  $h < 0$ : tanto  $r_{int}$  como  $r_{ext}$  y  $r_{cosm}$  son reales y positivas, teniéndose así un AN con estructura de horizontes bien definida y un universo con un horizonte cosmológico. *ii*)  $h = 0$ : pueden suceder dos cosas, bien que las soluciones de  $r_{int}$  y  $r_{ext}$  sean degeneradas, o bien que lo sean  $r_{ext}$  y  $r_{cosm}$ . El primer caso representa el AN *extremal*, anteriormente descrito. El segundo se puede entender como el límite cosmológico para el cual un AN puede mantener sin "desgarrar" su horizonte exterior en un universo de curvatura constante y positiva, teniendo en cuenta la velocidad de recesión relativa entre dos puntos separados radialmente, inducida por la expansión cósmica; este caso se conoce como *singularidad desnuda marginal*. *iii*)  $h > 0$ :

sólo existe una raíz real positiva, pudiendo ser ésta  $r_{int}$  ó  $r_{cosm}$ . En el primer caso, la masa del AN ha superado el límite máximo impuesto por la cosmología (descrito para  $h = 0$ ), y ya no existen ni horizonte exterior, ni horizonte cosmológico, quedando únicamente el horizonte interior para recubrir la singularidad (caso de la *singularidad desnuda marginal*). En el segundo caso, tanto  $r_{int}$  como  $r_{ext}$  dejan de ser solución, lo que corresponde a una *singularidad desnuda*, habiendo, esta vez sí, un horizonte cosmológico  $r_{cosm}$ . Todos estos casos se pueden ilustrar gráficamente viendo los ceros del polinomio cuártico  $\Delta_r$ , tal como muestra la Figura 1.

Es un hecho destacable que a partir de un cierto valor positivo de  $R_0$ ,  $R_0^{crit}$ , el factor  $h$  se hace cero para dos valores de  $a$ , es decir, aparte del usual  $a_{max}$  para el que el AN se hace *extremal*, se tiene ahora un  $a_{min}$ , por debajo del cual el AN se vuelve *extremal marginal*, tal como se vio antes. Por lo tanto

$$\begin{aligned} h(a_{max}, M, |R_0| \geq 0, Q) &= 0 \\ \Rightarrow a_{max} &\equiv a_{max}(M, |R_0| \geq 0, Q), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} h(a_{min}, M, R_0 \geq R_0^{crit} > 0, Q) &= 0 \\ \Rightarrow a_{min} &\equiv a_{min}(M, R_0 \geq R_0^{crit} > 0, Q). \end{aligned} \quad (20)$$

Debido a la excesiva extensión de las ecuaciones que describen el comportamiento de  $a_{max}$  y  $a_{min}$ , preferimos no

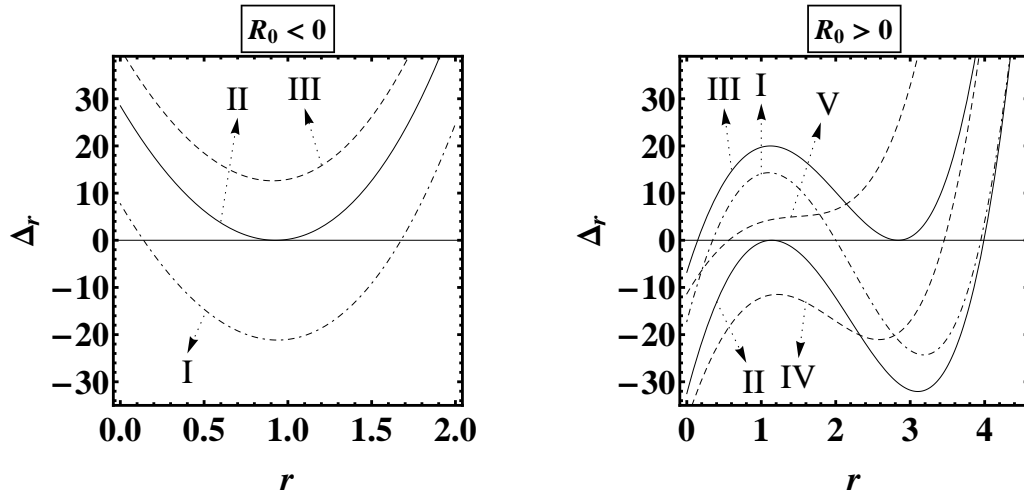


Figura 1: Gráficas que muestran las posiciones de los horizontes como soluciones de la ecuación  $\Delta_r = 0$ . A la izquierda, para  $R_0 < 0$ , se tienen los casos  $h > 0$  (I, AN con horizontes bien definidos, trazos con puntos),  $h = 0$  (II, AN *extremal*, línea continua) y  $h < 0$  (III, *singularidad desnuda*, trazos). A la derecha, con  $R_0 > 0$ , se ven los casos  $h < 0$  (I, AN con horizontes bien definidos, trazos con puntos),  $h = 0$  (II, AN *extremal* y III, AN *extremal marginal*, línea continua), y  $h > 0$  (IV, *singularidad desnuda* y V, *singularidad desnuda marginal*, trazos)

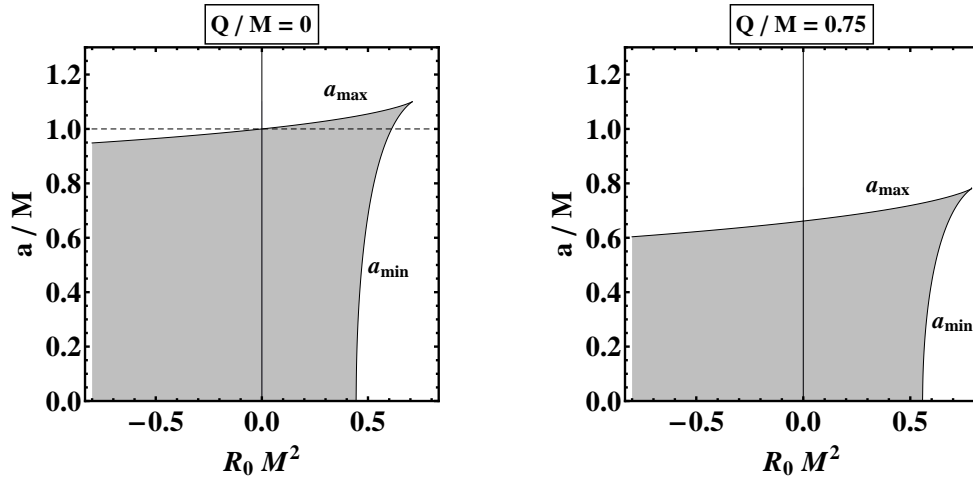


Figura 2: La zona sombreada delimitada por las curvas superior  $a_{max}$  e inferior  $a_{min}$  representa los valores de  $a/M$  para los que pueden darse AN en función de  $R_0 M^2$ . Se muestra para  $Q/M = 0$  a la izquierda y para  $Q/M = 0,75$  a la derecha. Nótese que a la hora de normalizar parámetros hay que tener en cuenta que en las unidades que utilizamos,  $R_0$  tiene dimensiones de  $[\text{longitud}]^{-2}$ .

mostrarlas aquí, pero en la Figura 2 se representan gráficamente, para ciertos valores del parámetro de carga  $Q$ , los rangos de valores del parámetro de espín  $a$  para los que se dan AN en función de la curvatura  $R_0$ , que a su vez viene determinada por los distintos parámetros que definen cada modelo  $f(R)$ , como se ve en (8).

Otra característica notable de los AN de Kerr son las superficies de límite estacionario (SLE), que se dan cuando  $g_{tt} = 0$ . En nuestro caso y en coordenadas de tipo Boyer-Lindquist, esta condición da lugar a la ecuación de cuarto orden en  $r$ :

$$r^4 + \left(a^2 - \frac{12}{R_0}\right) r^2 + \frac{24M}{R_0} r - \left(a^2 \cos^2 \theta + \frac{12}{R_0}\right) a^2 \sin^2 \theta - \frac{12}{R_0} (a^2 + Q^2) = 0, \quad (21)$$

que puede reescribirse análogamente a (17). De esta ecuación se sigue que cada horizonte lleva “asociado” una de estas SLE, con las que coincide en  $\theta = 0, \pi$  (se ve que la anterior ecuación es idéntica a (16) en estos puntos). En

la Figura 3 se muestra un esquema de un AN con su estructura completa (es decir, horizontes y SLE asociadas) en función del signo de la curvatura  $R_0$ .

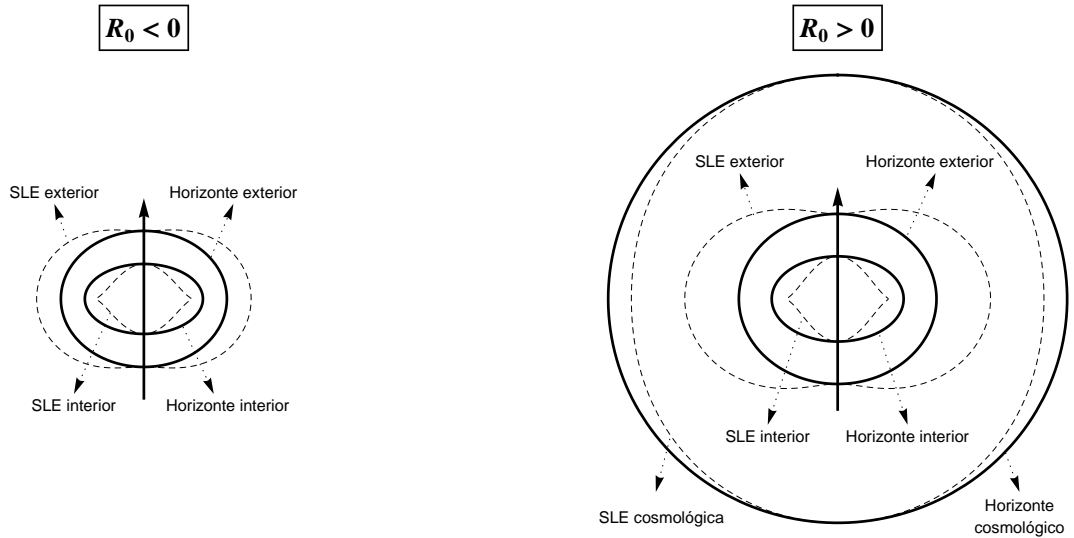


Figura 3: A la izquierda, sección de la estructura de un AN de Kerr-Newman con solución de curvatura negativa  $R_0 = -0,4 < 0$ , con  $M = 1$ ,  $a = 0,85$  y  $Q = 0,35$  ( $h > 0$ ). A la derecha, con solución de curvatura positiva  $R_0 = 0,4 > 0$ , con  $M = 1$ ,  $a = 0,9$  y  $Q = 0,4$  ( $h < 0$ ). Las superficies punteadas representan las SLE; y las superficies no punteadas los horizontes. La flecha indica el eje de rotación de los AN. En ambos, la región delimitada por la SLE exterior  $r_{S\text{ext}}$  y su horizonte exterior asociado,  $r_{\text{ext}}$ , se conoce como *ergoesfera*.

#### IV. TERMODINÁMICA DE AGUJEROS NEGROS

A partir de ahora nos centraremos en AN con estructura de horizontes bien definida para valores de  $R_0$  negativo, es decir, casos para los que  $h > 0$ . Esto es debido a los problemas que surgen en espacio-tiempos con curvatura positiva a la hora de normalizar el Killing temporal  $\xi \equiv \partial_t$  que se obtiene en este espacio-tiempo, que es el que nos permite definir cantidades físicas indispensables para realizar el análisis termodinámico del AN. El campo Killing de rotaciones  $\psi \equiv \partial_\phi$  está únicamente definido por la condición de que sus órbitas deben ser curvas cerradas con un parámetro de longitud  $2\pi$ , pero debido a que en función del signo de  $R_0$  tendremos un universo de tipo  $dS$  ( $R_0 > 0$ ) o  $AdS$  ( $R_0 < 0$ ), la normalización del campo Killing temporal  $\xi \equiv \partial_t$  presenta problemas en el primer caso debido a que no existe un criterio adecuado para ello, pudiendo añadirse distintas constantes multiplicativas a  $\xi$  arbitrariamente, tal como se describe en [28]. En el caso  $AdS$  se realiza sin problemas de tal forma que su norma tienda a  $r(-12/R_0)^{1/2}$  según  $r$  tienda al infinito.

Con el fin de estudiar las diferentes propiedades termodinámicas de los AN de Kerr-Newman en teorías  $f(R)$ , comenzamos buscando la temperatura del horizonte de sucesos  $r_{\text{ext}} \equiv r_{\text{ext}}(R_0, a, Q, M)$ . Para este estudio usaremos el método de la acción euclidiana [29]. Si en la métrica original (11) realizamos el cambio de coordenadas:  $t \rightarrow -i\tau$ ,  $a \rightarrow ia$ , obtenemos la sección Euclidiana, cuya métrica definida positiva no presenta singularidades y el tiempo tiene ahora carácter de coordenada angular alrededor del “eje”  $r = r_{\text{ext}}$ . La regularidad de la métrica en el horizonte  $r = r_{\text{ext}}$  requiere la identificación de puntos:

$$(\tau, r, \theta, \phi) \sim (\tau + i\beta, r, \theta, \phi + i\beta\Omega_H), \quad (22)$$

donde  $\beta$ , que representa el periodo del tiempo imaginario

en la sección Euclidiana, es la inversa de la temperatura de Hawking:

$$\beta = \frac{4\pi (r_{\text{ext}}^2 + a^2)}{r_{\text{ext}} \left[ 1 - \frac{R_0 a^2}{12} - \frac{R_0 r_{\text{ext}}^2}{4} - \frac{(a^2 + Q^2)}{r_{\text{ext}}^2} \right]} \equiv \frac{1}{T_E}, \quad (23)$$

y  $\Omega_H$  es la velocidad angular con la que gira el horizonte de sucesos, que es igual para todos los puntos del horizonte:

$$\Omega_H = \frac{a\Xi}{r_{\text{ext}}^2 + a^2}. \quad (24)$$

Teniendo en cuenta que el horizonte de sucesos es un horizonte de Killing del vector de Killing  $\chi = \xi + \Omega_H\psi$  (donde recordemos que  $\xi \equiv \partial_t$  y  $\psi \equiv \partial_\phi$  son los vectores de Killing que asintóticamente representan las traslaciones temporales y las rotaciones), también se puede obtener  $\Omega_H$  exigiendo que  $\chi$  tenga norma nula en el horizonte.

El estudio de los campos de los Killing nos podrían haber servido también para calcular la temperatura del AN, tal como se define en [30], donde ésta se puede obtener a partir de:

$$T_\kappa \equiv \frac{\kappa}{4\pi}, \quad (25)$$

donde la gravedad superficial  $\kappa$  viene definida a partir de:

$$\nabla_\mu \chi_\nu \chi^\mu = \kappa \chi_\nu. \quad (26)$$

Se ve que  $\kappa$  es la misma en todo el horizonte, por lo que  $T_\kappa = T_E$  también lo será [31].

Obtenida la temperatura, consideramos ahora la acción Euclidiana con el fin de obtener las restantes magnitudes termodinámicas:

$$\Delta S_E = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{Y}} d^4x \sqrt{|g|} (R_0 + f(R_0) - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (27)$$



siendo  $\mathcal{Y}$  la región sobre la que se integra. Tal como se describe en [17], uno ha de calcular la diferencia entre las acciones de la métrica del AN y del espacio de curvatura  $R_0$  identificadas con el mismo periodo en tiempo imaginario. Dado que la métrica es estacionaria, la integración sobre el tiempo simplemente da lugar al factor multiplicativo  $\beta$ . Por otro lado, teniendo en cuenta que se han de cumplir las ecuaciones de Maxwell  $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0$ , podemos escribir el tercer término del integrando como una divergencia:  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \nabla_\nu (2 F^{\mu\nu} A_\mu)$ , quedando pues:

$$\Delta S_E = \frac{R_0 + f(R_0)}{16\pi} \beta \Delta V + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{Y}} F^{\mu\nu} A_\mu d\Sigma_\nu, \quad (28)$$

donde  $\partial\mathcal{Y} = S^1 \times S^2$  representa la frontera de la región considerada,  $S^2$  es una 2-esfera de radio que se lleva al infinito al integrar, y  $\Delta V$  es la diferencia de volúmenes espaciales entre ambas soluciones de AN y de espacio de curvatura  $R_0$ . Haciendo los cálculos se llega a:

$$\Delta S_E = \frac{\beta (R_0 + f(R_0))}{24\Xi} \left[ r_{ext}^3 + \left( a^2 + \frac{12}{R_0} \right) r_{ext} + \frac{12 a^2}{R_0 r_{ext}} \right] + \frac{\beta}{2} \Phi_e \mathcal{Q} \left( \frac{r_{ext}^2 + a^2}{2 r_{ext}^2} + 1 \right), \quad (29)$$

donde  $\Phi_e$  es el potencial eléctrico medido en el infinito con respecto del horizonte:

$$\Phi_e = A_\mu \chi^\mu|_{r \rightarrow \infty} - A_\mu \chi^\mu|_{r=r_{ext}} = \frac{q r_{ext}}{r_{ext}^2 + a^2}, \quad (30)$$

y  $\mathcal{Q}$  es la carga eléctrica física del AN, que se obtiene calculando el flujo del tensor electromagnético sobre una superficie llevada al infinito, teniéndose que  $\mathcal{Q} = q/\Xi$ . Recordemos que para realizar estos cálculos se han de utilizar el potencial vector y el tensor electromagnético dados en (13). Un análisis de la acción (29) revela que esta se vuelve singular para  $h = 0$ , lo que cabría esperar debido a que los AN extremales, con  $T_E = 0$ , hacen divergir al factor  $\beta$ , pero como los potenciales termodinámicos se obtienen dividiendo la acción entre dicho factor  $\beta$ , éstos están bien definidos para  $T_E = 0$ . También se ve que la acción diverge en el límite en el que  $a^2 = -12/R_0$ , que implica  $\Xi = 0$ . Este caso –que además haría a la métrica (11) singular–, se estudia extensamente en [32], e implicaría que el universo 3-dimensional rota con la velocidad de la luz en el infinito. Asumiremos pues que se cumple la desigualdad:

$$\Xi := \left( 1 + \frac{R_0 a^2}{12} \right) > 0, \quad (31)$$

que, como veremos a continuación, es requisito necesario

para obtener una área y una entropía del AN positivas.

De la ecuación (29) se puede obtener inmediatamente la energía libre de Helmholtz  $F$ , teniendo en cuenta que esta se define como:

$$F = \frac{\Delta S_E}{\beta} + \Omega_H J, \quad (32)$$

donde el término  $\Omega_H J$  proviene de la transformación de Legendre necesaria para fijar el momento angular, siendo  $J$  el momento angular del AN, y  $\Omega_H$  la velocidad angular del horizonte de la expresión (24). Para calcular  $J$  hemos de calcular primero la masa física asociada al AN, que podemos calcular a partir de:

$$\mathcal{M} = \frac{\partial \Delta S_E}{\partial \beta} = \frac{M}{\Xi} (1 + f'(R_0)), \quad (33)$$

lo que da lugar a un momento angular:

$$J = \frac{a \mathcal{M}}{\Xi} = \frac{a M}{\Xi^2} (1 + f'(R_0)), \quad (34)$$

donde hemos hecho uso en  $\mathcal{M}$  de la ecuación (8) para sustituir  $2(R_0 + f(R_0))/R_0 \rightarrow 1 + f'(R_0)$ . Recuperando  $Q^2 = q^2 / (1 + f'(R_0))$ , y empleando la ecuación (16) para despejar  $M$  en función de  $r_{ext}$ , se obtiene:

$$F = (1 + f'(R_0)) \frac{[36 Q^2 + 12 r_{ext}^2 + r_{ext}^4 R_0 + a^2 (36 - r_{ext}^2 R_0)]}{24 r_{ext} \Xi}. \quad (35)$$

Analizando el numerador de  $F$ , y teniendo en cuenta que una masa positiva requiere  $1 + f'(R_0) > 0$ , se ve que se tendrá  $F > 0$  para valores del radio del horizonte menores a un  $r_{ext}^{límite}$  (al que asociamos una  $M^{límite}$  por medio de (16)) y  $F < 0$  para valores mayores a él.

Usando las relaciones termodinámicas pertinentes [33], podemos calcular la entropía  $S$  del AN a partir de la

relación:

$$S = \beta (\mathcal{M} - \Omega_H J) - \Delta S_E = (1 + f'(R_0)) \frac{\mathcal{A}_H}{4}, \quad (36)$$

con  $\mathcal{A}_H$  el área del horizonte exterior, que podemos obtener a partir de la métrica (11) tomando  $r = r_{ext} = cte$

y  $t = cte$ , obteniéndose:

$$\mathcal{A}_H \equiv \int \int \sqrt{\det g_{(2)}} d\theta d\phi = \frac{4\pi(r_{ext}^2 + a^2)}{\Xi}. \quad (37)$$

Se ve pues que una entropía positiva exige  $1 + f'(R_0) > 0$ , tal como habíamos supuesto antes.

Si por ejemplo queremos recuperar la RG con cons-

---


$$C = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{R_0, a, Q} = \frac{(1 + f'(R_0)) 2\pi r_{ext}^2 (a^2 + r_{ext}^2) [a^2 (12 + r_{ext}^2 R_0) + 3(4Q^2 - 4r_{ext}^2 + r_{ext}^4 R_0)]}{\Xi [-36Q^2 r_{ext}^2 + a^4 (-12 + r_{ext}^2 R_0) + 3r_{ext}^4 (4 + r_{ext}^2 R_0) - 4a^2 (3Q^2 + 12r_{ext}^2 - 2r_{ext}^4 R_0)]} \quad (38)$$


---

Habiendo aceptado (31), es interesante ver para qué valores de  $R_0$ ,  $a$ ,  $Q$  y  $M$  el denominador de la capacidad calorífica se anula, indicativo de que ésta pasa a través de una discontinuidad infinita, característica de una transición de fase. Podemos distinguir entre dos tipos de AN en función de los valores de los parámetros  $a$ ,  $Q$  y  $M$ , y de la curvatura escalar  $R_0$ : *i*) AN “rápido” sin transiciones de fase y con  $C > 0$  siempre. *ii*) AN “lento” para el cual existen dos valores de  $r_{ext}$  en los que se da una transición de fase:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r_{ext}} \right|_{R_0, a, Q} (r_{ext} = r_{ext}^I, r_{ext}^II) = 0, \quad (39)$$

donde  $r_{ext}^I < r_{ext}^II$ , teniéndose para  $r_{ext}^I$  un máximo local de la temperatura  $T_{max}$ , y para  $r_{ext}^II$ , un mínimo local  $T_{min}$ . Se observa también que en estos AN con transiciones de fase, la capacidad calorífica es positiva ( $C > 0$ ) para  $r_{ext} < r_{ext}^I$  y  $r_{ext} > r_{ext}^II$ , y negativa ( $C < 0$ ) para  $r_{ext}^I < r_{ext} < r_{ext}^II$ . A estos  $r_{ext}^I$ ,  $r_{ext}^II$  les asociamos unos parámetros de masa  $M^I$ ,  $M^II$  por medio de (16).

En la Figura 4 se ve gráficamente el comportamiento de la temperatura  $T$ , la energía libre  $F$  y la capacidad calorífica  $C$  de un AN en función del parámetro de masa  $M$  y para ciertos valores dados de  $a$ ,  $Q$  y curvatura escalar  $R_0$ , que vendrá dada por el modelo  $f(R)$  considerado. También se puede ver esquemáticamente para qué valores de los parámetros  $a$  y  $Q$  se dan AN “lentos” o “rápidos” para un valor dado de la curvatura escalar  $R_0$ .

A diferencia de los AN de tipo Schwarzschild- $AdS$  [17], los AN de tipo Kerr-Newman- $AdS$  presentan configuración de AN para cualquier valor de la temperatura  $T$ , por lo que la estabilidad de cada AN vendrá dada por los valores que tomen la capacidad calorífica  $C$  y la energía libre  $F$  en función de los parámetros  $a$ ,  $Q$ ,  $M$  y la curvatura escalar  $R_0$  que definen dicha solución de AN. Ahora bien, dados unos valores de  $a$ ,  $Q$  y  $R_0$ , se necesita un parámetro de masa mínimo  $M^{min}$  (dado por  $T = 0$ ) a partir del cual se tiene configuración de AN, por lo que el único equilibrio posible hasta alcanzar dicha masa mínima es el de radiación sin AN. A partir de ahí, hemos de distinguir de nuevo entre los AN “rápidos” y los “lentos”. Los AN “rápidos”, con valores de espín y carga eléctrica más elevados que los “lentos”, presentan una capacidad calorífica siempre positiva y una energía libre positiva has-

tante cosmológica, debemos hacer  $f(R_0) = -2\Lambda$ , y por lo tanto se tendrá que  $S = \mathcal{A}_H / 4$ , recuperándose así el conocido resultado de Bekenstein [34]. Obtenidas la temperatura  $T$  y la entropía  $S$  del AN, podemos pasar a estudiar su capacidad calorífica, que, para una curvatura escalar  $R_0$  y unos parámetros  $a$  y  $Q$  determinados, vendrá dada por:

ta una valor de  $M = M^{limite}$ , y negativa a partir de él. Así pues, este AN será inestable frente a desintegración por *tunneling* en radiación para valores del parámetro de masa  $M < M^{limite}$ . Para  $M > M^{limite}$ , la energía libre del AN es negativa, menor por lo tanto que la de la radiación, que tenderá a colapsar a la configuración de AN en equilibrio con radiación térmica. Los AN “lentos” presentan una termodinámica más compleja, habiendo que distinguir entre cuatro zonas delimitadas por los valores del parámetro de masa  $M^{min} < M^I < M^{II} < M^{limite}$ . Para  $M^{min} < M < M^I$  y para  $M^{II} < M < M^{limite}$ , se tiene una capacidad calorífica positiva y una energía libre positiva, lo que da lugar a un AN inestable frente a desintegración por *tunneling* en radiación. Para  $M^I < M < M^{II}$ , el AN presenta una capacidad calorífica negativa y una energía libre positiva, por lo que este tenderá o bien a desintegrarse por radiación Hawking, o bien a un valor más elevado del parámetro  $M$ . Por último, para  $M > M^{limite}$ , la capacidad calorífica es positiva, pero la energía libre es negativa, teniéndose por lo tanto que la radiación tenderá a colapsar a la solución de AN en equilibrio con radiación térmica.

## V. EJEMPLOS PARTICULARES

En esta sección vamos a considerar ciertos modelos de teorías  $f(R)$  para así poder ver en qué rango de las variables que definen cada modelo podemos encontrar AN de Kerr-Newman bien definidos (es decir, AN no extremales con su estructura de horizontes completa). Por sencillez, introducimos las variables adimensionales  $r \rightarrow r/M$ ,  $a \rightarrow a/M$ ,  $Q \rightarrow Q/M$  y  $R_0 \rightarrow R_0 M^2$ . En la Figura 5 se muestran, para cada modelo y en aquellas regiones en las que se de  $R_0 < 0$ , las distintas configuraciones termodinámicas posibles en función de los parámetros que definan dicho modelo.

**Modelo I:**  $f(R) = \alpha|R|^\beta$

Este modelo, con  $\alpha > 0$ , puede conducir a la expansión acelerada del Universo debido a la presencia del término  $\alpha R^2$ . Este modelo es también consistente con las anisotropías de temperatura observadas en el CMB, y podría

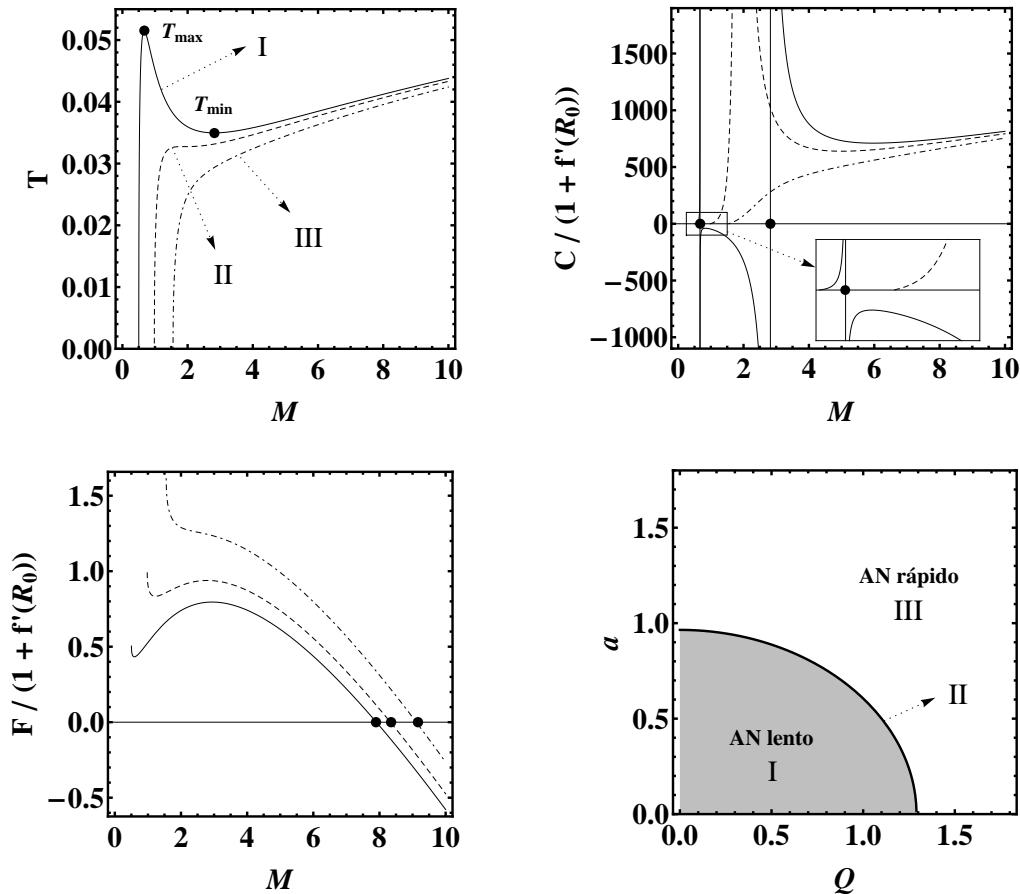


Figura 4: Con  $R_0 = -0,2$ , se representan arriba a la izquierda la temperatura, arriba a la derecha la capacidad calorífica, y abajo a la izquierda la energía libre del AN en función del parámetro de masa  $M$  para los casos: **I**)  $a = 0,5$  y  $Q = 0$  : AN “lento” que presenta una temperatura local máxima  $T_{max}$  y una temperatura local mínima  $T_{min}$  allá donde se dan las divergencias en la capacidad calorífica, que toma valores negativos entre  $T_{max}$  y  $T_{min}$ . **II**)  $a \approx 0,965$  y  $Q = 0$  : caso límite en el que  $T_{max}$  y  $T_{min}$  coinciden, dando lugar a un punto de inflexión en la temperatura y a una capacidad calorífica siempre positiva. **III**)  $a = 1,5$  y  $Q = 0$  : AN “rápido” con temperatura monótonamente creciente con  $M$ , de capacidad calorífica siempre positiva. Se ve que todos los casos pasan a tener  $F < 0$  a partir de cierto valor de  $M$ , dado por  $r_{ext}^{límite}$ . Los valores de  $M^{min}$ , con  $T = 0$ , corresponden a AN *extremales*, que tienen además una capacidad calorífica  $C = 0$ . Abajo a la derecha, y también para  $R_0 = -0,2$  se muestran las regiones para las que se tienen AN con dos transiciones de fase (“lentos”), o sin ellas (“rápidos”).

ser pues una alternativa viable a los modelos inflacionarios de campos escalares [35]. Sustituyendo en (8), se obtienen las soluciones de curvatura escalar:

$$R_0^\pm = \pm \left[ \frac{\pm 1}{(\beta - 2)\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta - 1}}, \quad (40)$$

donde  $R_0^+$  da lugar a una curvatura positiva, y  $R_0^-$  a una curvatura negativa. La condición  $1 + f'(R_0^\pm) > 0$ , limita el rango de parámetros que definen este modelo  $f(R)$  a distintas regiones en función de si tomamos  $R_0^+$  o  $R_0^-$ ; para  $R_0^+$  la Región 1  $\{\alpha > 0, \beta > 2\}$  y la Región 2  $\{\alpha < 0, \beta < 1\}$ , y para  $R_0^-$  la Región 3  $\{\alpha < 0, \beta > 2\}$  y la Región 4  $\{\alpha > 0, \beta < 1\}$ .

$$\text{Modelo II: } f(R) = \pm |R|^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{R}\right) - R$$

La curvatura escalar que se obtiene de este modelo, independientemente del signo que elijamos, es:

$$R_0 = \frac{\beta}{\alpha - 2} \quad (41)$$

Ahora bien, la condición  $1 + f'(R_0) > 0$  limita la teoría  $f(R)$  a distintas regiones en función del signo que elijamos para el primer término del modelo. Si es positivo, esta se restringe a la Región 1  $\{\alpha > 2, \beta > 0\}$  y a la Región 2  $\{\alpha < 2, \beta < 0\}$ , para las cuales la curvatura escalar  $R_0$  toma valores positivos. Si lo tomamos negativo obtenemos la Región 3  $\{\alpha > 2, \beta < 0\}$  y la Región 4  $\{\alpha < 2, \beta > 0\}$ , en la cual  $R_0$  toma valores negativos.

$$\text{Modelo III: } f(R) = R (\text{Log}(\alpha R))^\beta - R$$

La curvatura escalar asociada a este modelo es:

$$R_0 = \frac{1}{\alpha} \exp(\beta) \quad (42)$$

En este caso la condición  $1 + f'(R_0) > 0$  obliga a trabajar en el rango de parámetros determinado por la Región 1  $\{\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0\}$ , donde  $R_0$  toma valores positivos para  $\alpha > 0$  y negativos para  $\alpha < 0$ .

$$\text{Modelo IV: } f(R) = -\alpha \frac{\kappa \left(\frac{R}{\alpha}\right)^n}{1 + \beta \left(\frac{R}{\alpha}\right)^n}$$

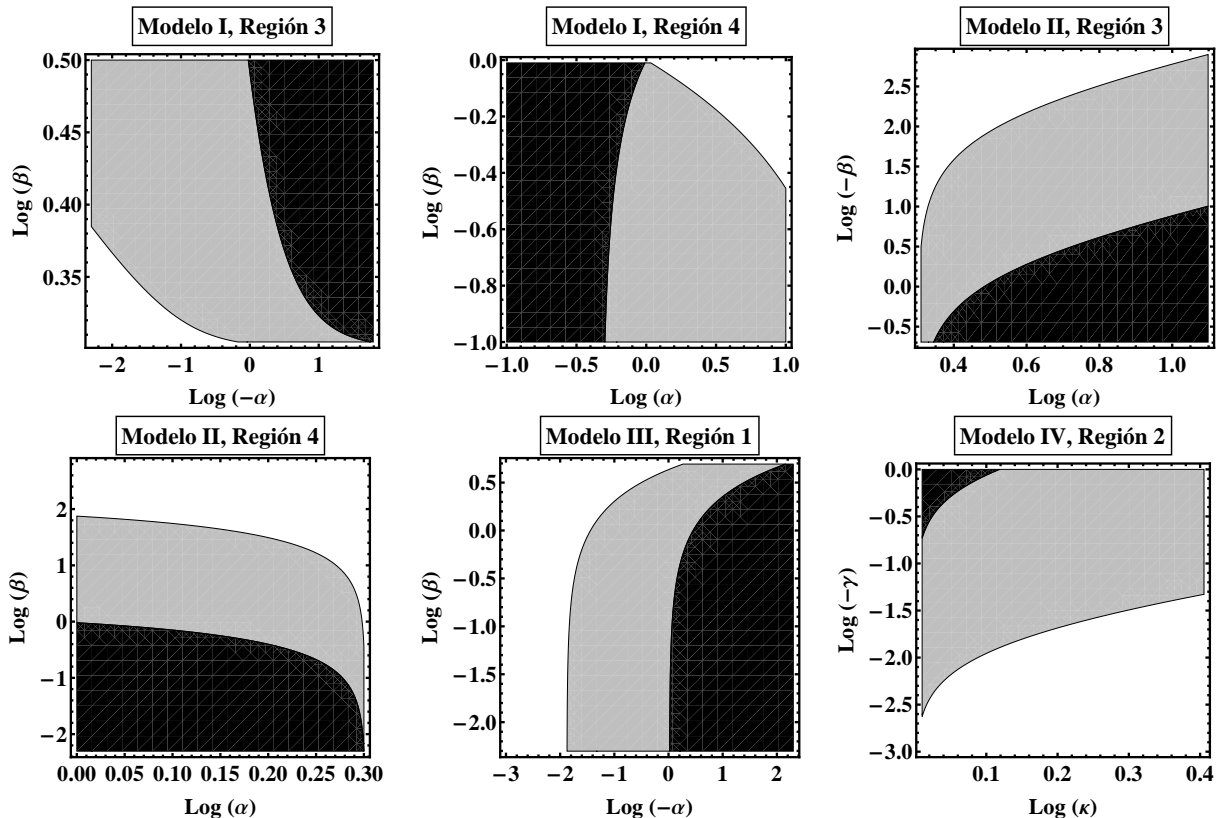


Figura 5: Regiones termodinámicas de los modelos I, II, III y IV, con solución de curvatura escalar negativa  $R_0 < 0$ . Por simplicidad se estudia un AN con unos parámetros dados:  $M = 1$ ,  $a = 0,4$  y  $Q = 0,2$ . Se distinguen 3 regiones diferentes: i)  $C < 0$  y  $F > 0$ , en negro. ii)  $C > 0$  y  $F < 0$ , en gris. iii)  $C > 0$  y  $F < 0$ , en blanco.

Este modelo ha sido propuesto en [36] como cosmológicamente viable. Para el estudio que vamos a llevar a cabo, consideramos  $n = 1$ , quedando pues una teoría biparamétrica, pues podemos definir  $\gamma = \beta/\alpha$ . Sustituyendo esta  $f(R)$  en la ecuación (8), la curvatura escalar toma dos valores posibles:

$$R_0^\pm = -\frac{1-\kappa}{\gamma} \pm \sqrt{\frac{-\kappa(1-\kappa)}{\gamma^2}}, \quad (43)$$

Como ha de darse  $1+f'(R_0) > 0$ ,  $\kappa$  queda restringido a valores de  $\kappa > 1$ . Por otro lado, calculando  $1+f'(R_0^\pm)$ , se ve que la solución  $R_0^+$  únicamente cumple las condiciones de viabilidad del modelo para valores de los parámetros  $\kappa$  y  $\gamma$  dentro de la Región 1:  $\{\kappa > 1, \gamma > 0\}$ , y  $R_0^-$  únicamente dentro la Región 2:  $\{\kappa > 1, \gamma < 0\}$ , tomando  $R_0^+$  valores positivos y  $R_0^-$  valores negativos en sus respectivas regiones.

## VI. CONCLUSIONES

En este trabajo, partiendo de las ecuaciones de campo en formalismo métrico que se derivan de una teoría  $f(R)$ , hemos obtenido la métrica solución de curvatura constante de un objeto masivo, cargado y rotante, que difiere de la obtenida por Carter [25] en un factor multiplicativo para la carga eléctrica, masa, espín y una redefinición de la curvatura constante de vacío. Analizándola, hemos descrito los distintos objetos astrofísicos a los que podría

dar lugar: AN, AN *extremales*, AN *extremales marginales*, *singularidades desnudas* y *singularidades desnudas marginales*. Centrándonos en los AN y en su estructura de horizontes, hemos visto que estos sólo pueden darse por debajo de un cierto valor del espín  $a_{max}$ , y que a partir de cierto valor positivo de la curvatura, sólo por encima de un valor mínimo  $a_{min}$ , por lo que un AN en un universo de tipo  $dS$  con una curvatura superior a una  $R_0^{min}$ , debe estar rotando. También hemos estudiado la termodinámica de los AN de tipo  $AdS$  (solución de curvatura escalar negativa), empleando para ello el método de la acción euclidiana. Se comprueba que magnitudes como la energía y la entropía de los AN difieren de las predichas por la RG en la localización del radio del horizonte dependiendo de los parámetros del modelo y en un factor multiplicativo  $1+f'(R_0)$ , que será diferente para cada modelo de teoría  $f(R)$ , y que debe ser positivo para asegurar una masa y una entropía positivas para este tipo de AN- $AdS$ . Por otro lado, observando el comportamiento de la capacidad calorífica del AN en función de los parámetros que definen el modelo, vemos que se debe distinguir entre dos tipos de AN: “rápidos” y “lentos”, presentando éstos últimos dos transiciones de fase. Analizamos también la estabilidad de las distintas configuraciones en función de los valores de la energía libre y la capacidad calorífica, observando que cualitativamente la situación es la misma que la descrita por los AN de Kerr-Newman- $AdS$ . Por último, hemos considerado varios modelos de teorías  $f(R)$  para así poder analizar gráficamente los resultados obtenidos anteriormente.

- 
- [1] S. Nojiri y S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **68**, 123512 (2003); S. Nojiri y S. D. Odintsov, *Gen. Rel. Grav.* **36**, 1765 (2004); S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden y M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **70**: 043528 (2004); A. Dobado y A. L. Maroto *Phys. Rev. D* **52**, 1895 (1995); G. Dvali, G. Gabadadze y M. Porrati, *Phys. Lett.* **B485**, 208 (2000); A. de la Cruz-Dombriz y A. Dobado, *Phys. Rev. D* **74**: 087501 (2006); J. A. R. Cembranos, *Phys. Rev. D* **73** 064029, (2006); S. Nojiri y S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4** 115, (2007).
- [2] A. H. Guth, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 347-356, (1981).
- [3] J. A. R. Cembranos, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 141301 (2009).
- [4] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1-23, (1989).
- [5] S. Nojiri y D. Odintsov, [arXiv:1011.0544v3 [gr-qc]].
- [6] A. De Felice y S. Tsujikawa, [arXiv:1002.4928v2 [gr-qc]].
- [7] T. P. Sotiriou, *Gen. Rel. Grav.* **38** 1407, (2006); V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **74** 023529, (2006); S. Nojiri y S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **74** 086005, (2006); I. Sawicki y W. Hu, *Phys. Rev. D* **75** 127502, (2007).
- [8] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado y A. L. Maroto, *Phys. Rev. D* **77** 123515 (2008)
- [9] M. Cvetič, S. Nojiri y S. D. Odintsov, *Nucl. Phys. B* **628**, 295 (2002).
- [10] R. G. Cai, *Phys. Rev. D* **65**, 084014 (2002).
- [11] Y. M. Cho y I. P. Neupane, *Phys. Rev. D* **66**, 024044 (2002).
- [12] R. G. Cai, *Phys. Lett. B* **582**, 237 (2004). J. Matyjasek, M. Telecka y D. Tryniecki, *Phys. Rev. D* **73**, 124016 (2006).
- [13] S. Mignemi y D. L. Wiltshire, *Phys. Rev. D* **46**, 1475 (1992).
- [14] T. Multamaki y I. Vilja, *Phys. Rev. D* **74**, 064022 (2006).
- [15] G. J. Olmo, *Phys. Rev. D* **75**, 023511 (2007).
- [16] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov y S. Zerbini, *JCAP* **0502**, 010 (2005).
- [17] S. W. Hawking y D. N. Page, *Commun. Math. Phys.* **87** 577 (1983).
- [18] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998).
- [19] F. Briscese y E. Elizalde, *Phys. Rev. D* **77**, 044009 (2008).
- [20] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado y A. L. Maroto, *Phys. Rev. D* **80**, 124011 (2009).
- [21] L. Pogosian y A. Silvestri, *Phys. Rev. D* **77**, 023503 (2008).
- [22] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **75**, 067302 (2007).
- [23] A. Nunez y S. Solganik, [arXiv:hep-th/0403159].
- [24] W. Hu y I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **76** 064004, (2007).
- [25] B. Carter en *Les Astres Occlus* ed. por DeWitt, C. M. DeWitt, (Gordon and Breach, New York) (1973).
- [26] Roy. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett. D* **11**, 237-238 (1963)
- [27] Ludovico Ferrari, *Ars Magna* (1545).
- [28] G. W. Gibbons y S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2738 (1977).
- [29] G. W. Gibbons y S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2752 (1977).
- [30] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43** 199 (1975) [Erratum-ibid. **46** 206 (1976)].
- [31] J. M. Bardeen, B. Carter y S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31** 161 (1973).
- [32] S. W. Hawking, C. J. Hunter, M. M. Taylor-Robinson, *Phys. Rev. D* **59** 064005 (1999).
- [33] M. M. Caldarelli, G. Cognola y D. Klemm, *Class. Quant. Grav.* **17** 399-420 (2000).
- [34] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- [35] M. B. Mijic, M. S. Morris y W. M. Suen. *The  $R^2$  cosmology: Inflation without a phase transition*, *Phys. Rev. D* **34** 2934-2946 (1986).
- [36] W. Hu y I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **76** 064004 (2007).