

| 2. SOBRE LAS DISTANCIAS Y LAS VELOCIDADES MEDIAS EN EL QUIJOTE

Javier Montero
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

En estas líneas se pretende ofrecer una alternativa al estudio realizado por el prof. Martínez de la Rosa [2], que se basa en las distancias mientras que en [1] se consideraban las velocidades. Y es que a nuestro entender, la argumentación basada en las velocidades medias es mucho más fiable y menos sensible a los errores relativos, argumento que se tenía en cuenta en [1], pues no es lo mismo un error de un kilómetro o una hora sobre una distancia larga que sobre una distancia corta. Aprovecharemos esta discrepancia para, sobre sus datos de distancias, comentar la solución *topológica* propuesta en el capítulo de conclusiones del libro “El Lugar de la Mancha es...” [1], haciendo hincapié en cuáles fueron las hipótesis realmente utilizadas y los términos exactos en los que deben establecerse las conclusiones.

En primer lugar, como es patente de la lectura de [1], la solución desarrollada entre sus páginas 150-155 es relativamente independiente en la metodología del resto del texto. En efecto, lo que el director del proyecto aportó al firmante de estas líneas son unos datos lingüísticos y la correspondiente estimación numérica acerca del número de jornadas (tardanza) que según Cervantes habría utilizado El Quijote para recorrer el trayecto entre ciertas localizaciones de referencia (Puerto Lápice, Sierra Morena, El Toboso y el llamado Punto Tarfe) y ese *lugar* de La Mancha de cuyo nombre Cervantes parece no querer acordarse, así como una estimación de las distancias físicas (en kilómetros) de estos recorridos. La presentación de los resultados finales se adaptaron al formato del resto del libro, proponiendo unas ordenaciones entre las poblaciones candidatas a ser ese *lugar*, pero el procedimiento seguido en esas páginas era fundamentalmente un análisis de consistencia entre las distancias reales recorridas y las correspondientes tardanzas, a través de la velocidad media implicada en cada uno de esos cuatro recorridos. El argumento clave era si un caballo como Rocinante pudo haber recorrido esas cuatro distancias físicas en los tiempos indicados, es decir, si las velocidades medias que se deducirían eran verosímiles y permitirían la existencia de un origen común, el buscado *lugar* de La Mancha. El análisis de consistencia subsiguiente, desarrollado entre las páginas 150-155 de [1], y que consideramos resulta bastante robusto, llevaba de manera muy clara a concluir que la traducción de los datos lingüísticos aportados por Cervantes son consistentes con la existencia de ese *lugar* de La Mancha y con otros estudios independientes realizados acerca de esa velocidad media (en particular, la tesis doctoral [4]).

El grado de plausibilidad de esas velocidades medias para cada recorrido entre los cuatro puntos de referencia con la existencia de un *lugar* común de origen o destino es por tanto la única conclusión que se debe estrictamente sacar del análisis llevado a cabo entre las páginas 150-155 de [1], todo sujeto claro está a la veracidad de los datos asumidos (distancias físicas y estimación de tardanzas). La cuestión es que, a partir de los datos aportados, se puede concluir la existencia de *lugares* con velocidades medias asociadas suficientemente plausibles, tratándose de una consistencia que razonablemente no sería esperable si

Cervantes no la pretendiese, y que marca indefectiblemente el centro del Campo de Montiel como solución.

En concreto, en el trabajo original (páginas 150-155 de [1]) se postulaba como hipótesis central la homogeneidad de las velocidades medias entre trayectos realizados en condiciones análogas. Veremos a continuación, aprovechando una discusión sobre las hipótesis utilizadas entonces, que lo relevante son sobre todo las velocidades medias máximas, y en cierta medida las velocidades mínimas (la velocidad máxima está ciertamente limitada por el vehículo utilizado y las características topográficas de cada trayecto).

1.- **Acerca de los datos:** en la solución aportada entre las páginas 150-155 de [1] se consideran dados los siguientes datos:

- Las localizaciones de los puntos de referencia (Puerto Lápice, El Toboso, Sierra Morena y el llamado Punto Tarfe, identificándose los dos últimos en [1] con Venta de Cárdenas y Munera, respectivamente).
- Las estimaciones de sus distancias al lugar de la Mancha en kilómetros (dato numérico obtenido en [1] mediante medición directa conectando los puntos en línea recta).
- Las estimaciones asociadas en tiempo o tardanzas (expresadas en modo lingüístico por Cervantes y traducidas a jornadas tras un detallado análisis en [1], que actualizada de acuerdo con [4] se resume en el Cuadro 1).

Cada uno de estos tres conjuntos de hipótesis está desde luego sujeto a discusión (alguna localización muy en concreto y la traducción de los datos lingüísticos de las tardanzas a jornadas; pero acerca de las distancias físicas, a pesar de no conocer el recorrido exacto supuestamente realizado por El Quijote, parece haber un acuerdo generalizado en que las distancias en línea recta son la mejor referencia). La posición del que escribe estas líneas es que el análisis de consistencia que se llevaba a cabo en [1] marcaba con tanta diferencia el centro del Campo de Montiel como solución consistente, que muy grande tenía que ser el error en esas estimaciones para que esta conclusión se viese modificada sustancialmente. De hecho, análogos resultados han sido obtenidos por otros estudios independientes realizados por otros investigadores posteriormente, utilizando otras distancias y otras aproximaciones matemáticas, más sofisticadas pero por tanto con un mayor número de hipótesis subyacentes y una interpretación menos directa (ver, por ejemplo, [3]).

En cualquier caso, la discusión sobre las localizaciones exactas de los puntos de referencia (Puerto Lápice, Sierra Morena, El Toboso y el llamado Punto Tarfe) y las tardanzas lingüísticas (si a partir del texto se debe interpretar que se ha tardado un día o un día y medio, por ejemplo) no pertenecen en principio al ámbito del que suscribe estas líneas, sino únicamente la metodología o tratamiento a partir de los correspondientes datos numéricos, basada en un análisis de las velocidades implicadas. Muy en concreto, al final de este trabajo (ver Cuadro 2) aplicaremos nuestra metodología a las distancias físicas que Martínez de la Rosa [2] estima a partir del Directorio Cartográfico de España, junto con algún otro dato que parece más ajustado que el inicialmente propuesto en [1].

2.- **Acerca de las hipótesis:** aunque [1] haga en su conjunto uso de un buen número de hipótesis, en el procedimiento desarrollado en sus páginas 150-155 sólo era esencial una hipótesis: la existencia de una velocidad media parecida, y en el entorno de los 31 kilómetros por jornada, para los recorridos entre las localizaciones de referencia y el lugar de La Mancha.

Obsérvese que por supuesto no se estaría suponiendo que la velocidad de El Quijote sea constante a lo largo de todos sus recorridos (lo cual sería obviamente falso), sino que las velocidades medias (número de kilómetros por jornada) son análogas. Es decir, que esos viajes se realizan en condiciones globales comparables. Todos los trayectos podrían tener un número de repechos similar, por ejemplo, y los demás factores que pudieran aumentar o disminuir el número de kilómetros recorridos en una jornada podrían irse compensando. Además, habría que tener en cuenta los posibles planes del viajante, que puede utilizar el conocimiento previo de las características del camino, o lo acaecido durante el trayecto ya recorrido, para llevar a cabo una regulación más o menos consciente de la velocidad media final. Muchos conductores tienden por ejemplo a acelerar en algunos tramos del viaje cuando a la salida de su ciudad se han encontrado con un atasco u otro retraso imprevisto, como si quisiesen mantener el tiempo inicialmente previsto para el viaje completo (quizá porque es conveniente no llegar demasiado tarde al destino, para disponer de un tiempo razonable para poder buscar una habitación donde pasar la noche, por ejemplo), y otros conductores alargan el tiempo de conducción para no quedarse a mitad de camino (antes conducir un poco más que no llegar a destino por poco). La velocidad media, entendida como número de kilómetros recorridos por jornada, es mucho más estable de lo que parece, y debe considerarse una hipótesis bastante débil, máxime teniendo en cuenta la topografía de la zona, relativamente llana en general, como se puede comprobar analizando por ejemplo los perfiles obtenidos en la Carta Digital del Servicio Geográfico del Ejército para las líneas rectas que unen Villanueva de los Infantes con las localizaciones de referencia.

Además de la hipótesis de homogeneidad de las velocidades medias en los diferentes trayectos, existe una segunda hipótesis utilizada en las páginas 150-155 de [1]: la velocidad media de referencia de 31 kilómetros por jornada, obtenida a partir de [4]. Dicha velocidad media de referencia se utilizaba en [1] principalmente para establecer el rango de velocidades plausibles (que la diferencia entre los dos valores no superase el 20% en valor absoluto, es decir, que la velocidad media se situase entre 24'8 y 37'2 kilómetros por jornada). Más relevante que la definición de este rango pudiera resultar el que dicha velocidad de referencia se haya podido utilizar parcialmente en la traducción a kilómetros de las distancias lingüísticas en [1].

Hay que hacer notar aquí que nuestro enfoque está parcialmente inspirado en los modelos de lógica difusa de Zadeh [5] (la consistencia global se mide observando el punto de mínima consistencia). Así, y creemos que es un tratamiento correcto, existe un rango de velocidades medias todas igualmente plausibles, pero con una componente aleatoria menor, tanto en cuanto el caminante razonablemente puede compensar hasta cierto punto los avatares del recorrido cambiando el ritmo de su caminar, y acabar invirtiendo en cada recorrido el tiempo que naturalmente esperado.

3.- **Acerca de las conclusiones:** qué es lo que se puede concluir de un modelo es quizá el punto más delicado de un trabajo científico, sobre todo cuando el problema tiene una patente imprecisión en los datos iniciales. Es importante observar que lo que se deduce realmente de las páginas 150-155 de [1] no es que ninguna población concreta sea el *lugar*, sino simplemente que los datos aportados son consistentes con unas velocidades medias comunes para los diferentes recorridos: el *lugar* puede existir, estaría en el centro del Campo de Montiel, y esa velocidad media estaría en el entorno de los 31 kilómetros por jornada, de acuerdo con [4] (y a partir de esta velocidad, cuanto mayor sea la velocidad media máxima requerida para alcanzar el *lugar* de la Mancha propuesto desde las localizaciones de

referencia, probablemente más tensión habrá entre los datos y la propuesta de ese *lugar* como solución de nuestro problema).

Pero un análisis de consistencia basado únicamente en las velocidades medias máximas no haría uso directo de la hipótesis de homogeneidad entre las velocidades medias, pero conducirá por sí solo al centro del Campo de Montiel.

En efecto, con las distancias consideradas en [2] a partir del Directorio Cartográfico de España, podemos calcular las velocidades medias que se implican (ver Cuadro 2). Si se analizan las velocidades medias obtenidas observaremos, por ejemplo, que los datos no son compatibles con una velocidad media menor a los 31 kilómetros por jornada (no se podrían alcanzar las localizaciones de referencia en los tiempos indicados si no se es capaz de alcanzar esta velocidad media). Si no se considerase plausible una velocidad media superior a los 31 kilómetros por jornada, tal *lugar* no existiría.

Así, y como se puede comprobar en el Cuadro 2, los resultados ahora obtenidos con los datos aportados por [2] son básicamente análogos a las conclusiones originales [1], señalando claramente el centro del Campo de Montiel:

- Con una velocidad media máxima de 31 kilómetros por jornada aparece como posible solución únicamente Solana, pero presenta una velocidad inferior al 20% de los 31 kilómetros de referencia (es decir, menos de 24'8 kilómetros por jornada).
- Con una velocidad media máxima de 32 kilómetros por jornada aparece Carrizosa.
- Con una velocidad media máxima de 33 kilómetros por jornada aparece Alambra, pero de nuevo presenta una velocidad mínima excesivamente lenta .
- Con una velocidad media máxima de 34 kilómetros por jornada aparecen Fuenllana, Alcubillas, Villahermosa y Villanueva de los Infantes. Pero Alcubillas y Villahermosa también debieran ser rechazadas por presentar velocidades mínimas quizá demasiado lentas.
- Con una velocidad media máxima de 36 kilómetros por jornada aparece Montiel.
- Y las demás poblaciones requieren ya una velocidad media máxima superior al 20% de los 31 kilómetros por jornada de referencia (es decir, más de 37'2 kilómetros por jornada).

En conclusión: si admitimos como velocidades medias plausibles entre las cuatro localizaciones de referencia y el lugar sólo las correspondientes al rango definido por un error del 20% respecto de los 31 kilómetros por jornada de referencia (entre 24'8 y 37'2 kilómetros por jornada exactamente), tenemos que efectivamente existen soluciones plausibles, y que son únicamente cuatro: Carrizosa, Villanueva de los Infantes, Fuenllana y Montiel.

Puede ser interesante observar entonces que las velocidades correspondientes a Montiel presentan una dispersión significativamente mayor a las dispersiones de las otras tres poblaciones plausibles (ver Cuadro 2), teniendo por tanto esta solución menos consistencia con una hipótesis de homogeneidad de las velocidades medias. En concreto, la estimación de la desviación típica para Montiel es de 5'039 kilómetros por jornada, mientras que las desviaciones típicas para Carrizosa, Villanueva de los Infantes y Fuenllana resultan ser 3'144, 3'165 y 3'307 kilómetros por jornada, respectivamente (todas ya a una cierta distancia de los 3'945 de Alambra, los 4'503 de Alcubillas o los 4'530 de Torres M.). Más sensibilidad podrían aportar las diferencias entre las velocidades máxima y mínima de los cuatro

recorridos: 7'261 kilómetros por jornada de diferencia para Carrizosa, 7'357 para Villanueva de los Infantes y 7'876 para Fuenllana, mientras que para Montiel esta diferencia ya es de 11'183 kilómetros por jornada (por los 9'306 para Alambra, 9'891 para Torres M., 9'909 para Alcubillas y 10'934 para Villahermosa). La mayor homogeneidad de velocidades se tiene sin duda para Carrizosa, Villanueva de los Infantes y Fuenllana, en este orden, pero dentro de unas mismas magnitudes. Montiel es menos plausible como solución debido a la claramente mayor heterogeneidad de velocidades medias que presenta. Y el resto de poblaciones exigen no sólo alguna velocidad medias significativamente diferente a los 31 kilómetros por jornada de referencia sino que, además, presentan una mayor heterogeneidad en esas velocidades medias que las de Carrizosa, Villanueva de los Infantes y Fuenllana.

Por tanto, introduciendo la hipótesis de homogeneidad de velocidades medias, nos quedaríamos con una zona muy definida entre las poblaciones de Carrizosa, Villanueva de los Infantes y Fuenllana, por este orden de consistencia en cuanto a homogeneidad, pero sin diferencias en homogeneidad entre ellas que puedan considerarse significativas.

Finalmente, podemos además observar que el promedio de las velocidades medias hasta las cuatro localizaciones de referencia resulta ser 30'566 kilómetros por jornada para Fuenllana, muy parecida a los 30'586 kilómetros por jornada para Villanueva de los Infantes, mientras que los promedios de velocidades para Carrizosa y Montiel resultan ser 28'860 y 32'269 kilómetros por jornada, respectivamente. La comparación directa de las velocidades medias en cada trayecto marca también la analogía de velocidades medias entre Villanueva de los Infantes y Fuenllana, así como las menores velocidades medias exigidas para Carrizosa y las mayores velocidades exigidas para Montiel. Sin ser del todo significativas estas diferencias, las distancias respecto a la velocidad de referencia de 31 kilómetros por jornada marcarían a Villanueva de los Infantes y a Fuenllana como poblaciones más verosímiles, seguidas, y por este orden, de Montiel y Carrizosa.

Así, considerando conjuntamente el criterio de homogeneidad y de velocidades medias, la pareja formada por Fuenllana y Villanueva de los Infantes aparece como la solución globalmente más verosímil.

En cualquier caso, hagamos o no uso de la hipótesis de existencia de una velocidad común para todos los recorridos, es más que relevante observar que el sistema admite solución, y que el análisis directo de las velocidades máximas y mínimas plausibles ya marca el centro del Campo de Montiel como dicha solución, de acuerdo a lo que se indicaba en [1] y en [2].

REFERENCIAS

- [1] F. Parra et al.: “El lugar de la Mancha es...” (Editorial Complutense, 2005).
- [2] F. Martínez de la Rosa; “La última determinación del lugar de La Mancha en El Quijote”, en este volumen.
- [3] F.J. Girón y M.J. Ríos: “La determinación del Lugar de la Mancha como problema estadístico”. Boletín de la Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa 22(1):24-29 (2006).
- [4] J. Pollos: “Las cabalgaduras de Don Quijote y Sancho”. Editorial Complutense (Colección Tesis Doctorales, 1976).
- [5] L.A. Zadeh: “Fuzzy sets”. Information and Control 8:338-353 (1965) .

Cuadro 1.- TABLA DE TARDANZAS

Trayecto	Estimación tardanza (en jornadas)
Puerto Lápice- <i>Lugar</i> de la Mancha	2,37
Venta de Cárdenas- <i>Lugar</i> de la Mancha	2'00
El Toboso- <i>Lugar</i> de la Mancha	2'50
Munera- <i>Lugar</i> de la Mancha	2'00

Cuadro 2.- TABLA DE VELOCIDADES MEDIAS, en kilómetros/jornada,
medidas en líneas rectas a partir del Directorio Cartográfico según [2]
(distancias y velocidades medias a Puerto Lápice, Sierra Morena, El Toboso y Punto Tarfe; promedio, diferencia máxima, desviación típica)

PUEBLOS	P. Lápice	VM PL	S. Morena	VM SM	El Toboso	VM ET	P. Tarfe	VM PT	Promedio	Vmax- Vmin	Desviación
Albaladejo	94,823	40,009	64,937	32,468	101,366	40,546	54,547	27,273	35,074	13'272	6,375
Alcubillas	67,320	28,405	48,869	24,434	85,860	34,344	65,815	32,907	30,022	9'909	4,503
Alambra	56,635	23,896	66,406	33,203	68,573	27,429	52,660	26,330	27,714	9'306	3,945
Almedina	87,727	37,015	52,837	26,418	99,972	39,988	62,438	31,219	33,660	13'570	6,047
Cañamares	88,751	37,447	75,172	37,586	90,172	36,068	40,880	20,440	32,885	17'146	8,325
Carrizosa	66,026	27,859	64,504	32,252	75,849	30,339	49,981	24,990	28,860	7'261	3,144
Castellars	86,738	36,598	22,909	11,454	111,848	44,739	90,058	45,029	34,455	33'574	15,823
Cozar	79,819	33,678	45,793	22,896	96,352	38,540	67,240	33,620	32,184	15'644	6,607
Fuenllana	75,196	31,728	60,524	30,262	85,192	34,076	52,401	26,200	30,566	7'876	3,307
Membrilla	38,424	16,212	62,412	31,206	68,104	27,241	76,850	38,425	28,271	22'212	9,276
Montiel	83,940	35,417	63,512	31,756	91,361	36,544	50,721	25,360	32,269	11'183	5,039
Ossa	71,160	30,025	89,328	44,664	64,740	25,896	25,627	12,813	28,349	31'850	13,119
Puebla P.	93,284	39,360	52,148	26,074	105,584	42,233	65,758	32,879	35,136	16'159	7,198
Ruidiera	61,659	26,016	81,249	40,624	61,864	24,745	36,832	18,416	27,450	22'208	9,390
S.C. Cañamos	89,970	37,962	60,216	30,108	98,705	39,482	56,355	28,177	33,932	11'304	5,620
Solana	45,205	19,073	61,849	30,924	67,619	27,047	67,327	33,663	27,677	14'589	6,345
Terriches	93,136	39,297	62,214	31,107	100,914	40,365	56,135	28,067	34,709	12'298	6,059
Torre J.A.	86,606	36,542	42,070	21,035	103,738	41,495	72,166	36,083	33,788	20'460	8,848
Torres M.	81,266	34,289	54,806	27,403	93,237	37,294	58,633	29,316	32,075	9'891	4,530
Torrenueva	74,777	31,551	26,705	13,352	103,033	41,213	89,849	44,924	32,760	31'572	14,113
Villahermosa	79,568	33,572	66,418	33,209	85,860	34,344	46,820	23,410	31,133	10'934	5,171
Villamanrique	92,326	38,956	46,052	23,026	107,276	42,910	70,869	35,434	35,081	19'884	8,597
Villa. Fuente	103,368	43,615	67,068	33,534	109,437	43,774	59,012	29,506	37,607	14'268	7,219
Villa. Infantes	73,614	31,060	54,841	27,420	86,944	34,777	58,174	29,087	30,586	7'357	3,165