UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Análisis Matemático

CÁLCULO SUBDIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN EN VARIEDADES RIEMANNIANAS, CON APLICACIONES A LA TEORÍA DE EDP's DE SEGUNDO ORDEN Y A LA TEORÍA DEL PUNTO FIJO.

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Beatriz Sanz Alonso

Bajo la dirección de los doctores

Daniel Azagra Rueda
Juan Ferrera Cuesta

Madrid, 2010

- **ISBN: 978-84-693-0690-1**

Cálculo subdiferencial de segundo orden en variedades riemannianas, con aplicaciones a la teoría de EDPs de segundo orden y a la teoría del punto fijo

Tesis de

Beatriz Sanz Alonso

Directores: Daniel Azagra Rueda y Juan Ferrera Cuesta

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Septiembre de 2008

Índice general

Introducción **5**

1. Preliminares **15**

2. Propiedades del Hessiano de la función distancia al cuadrado **33**

3. Cálculo subdiferencial de segundo orden en variedades **39**
3.1. Definiciones de subdiferencial de segundo orden y resultados clave 39
3.2. Regla Fuzzy de la suma 48
3.3. Convergencia en $\mathbb{R}^n$ 51
3.4. Convergencia en variedades riemannianas 54
3.5. Subdiferencial proximal y su relación con la de viscosidad 58

4. Soluciones de viscosidad de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden **63**
4.1. Resultados de comparación para el problema de Dirichlet 63
4.2. Método de Perrón y Existencia 74
4.3. Ejemplos 78

5. Puntos fijos y ceros para funciones conjunto-valoradas en variedades riemannianas **81**

Bibliografía **101**

Introducción

Esta tesis aporta resultados de existencia y unicidad de soluciones de viscosidad para ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en variedades riemannianas y resultados de existencia de ceros y puntos fijos para funciones conjunto-valoradas en variedades riemannianas, que se demuestran aplicando teoría de cálculo subdiferencial (resultados contenidos en su mayoría, en las referencias [7] y [8]). Como referencias básicas para el cálculo subdiferencial se pueden consultar [9] y [27], entre otras, donde podemos ver la amplia perspectiva que nos ofrece el campo.

Uno de los primeros objetivos que nos planteamos al comenzar este trabajo doctoral, fue continuar las fructíferas investigaciones que dieron lugar a la tesis doctoral de Fernando López-Mesas (cuyos principales resultados están publicados en [4] y en [5]), entre cuyos resultados se demostró la existencia y unicidad de soluciones de viscosidad para ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades riemannianas (ver [21]).

Esta extensión a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, nos llevó a profundizar mucho más en el campo de la geometría riemanniana, introduciendo así conceptos geométricos y propiedades que necesitábamos de la función distancia entre dos puntos de la variedad.

Combinando estas propiedades con las ideas de las demostraciones de los resultados de M.G. Crandall, H. Ishii y P.L. Lions (ver [10]) y otra literatura a la que ellos aluden, fuimos capaces de concluir con nuestro objetivo.

Por otro lado, también en relación con el cálculo subdiferencial, y más concretamente con el cálculo subdiferencial proximal, nos adentramos en la teoría del punto fijo y de la búsqueda de ceros de funciones del tipo $G + H$ en variedades riemannianas, donde G y H son funciones conjunto-valoradas y cumplen una serie de propiedades que más adelante detallamos.

Introducimos una definición en variedades riemannianas análoga al concepto de derivada gráfica o contingente para un espacio de Hilbert (que introdujo Aubin en [1]), con la que trabajamos para concluir resultados que, en parte, son novedosos incluso para espacios de Hilbert (no sólo para variedades riemannianas). Resultados de este tipo se han conseguido en espacios de Banach usando otro tipo de herramientas (ver por ejemplo [25]).

También hacemos mención a la regla de la suma para subdiferenciales en

$\mathbb{R}^n$, que consiguieron R. Deville y El Haddad para el caso de primer orden (ver [11]) y para el de segundo orden (ver [12]) y que nos propusimos extender a variedades riemannianas. Como para el primer orden ya era conocido (ver [5]), nos encaminamos para conseguir lo mismo para segundo orden, pero el resultado no fue el esperado, ya que obtuvimos un resultado "híbrido"(luego concretaremos a qué nos referimos con esto), y por ello este resultado no lo enviamos a publicar.

El trabajo está organizado en cinco capítulos.

El primer capítulo "Preliminares", incluye conocimientos básicos sobre variedades riemannianas. Recordamos el concepto de distancia en una variedad (que se define a través del ínfimo de las longitudes de caminos que unen dos puntos en la variedad), y en particular hacemos referencia también a las geodésicas, y a las geodésicas minimales que serán los caminos con los que trabajaremos en variedades riemannianas. Recordamos, por otro lado, la definición de índice de inyectividad en un punto $x \in M$ en la variedad $i_M(x)$, y el índice general de la variedad i_M.

Incluimos también la noción de campos vectoriales y campos de Jacobi en la variedad, que han de cumplir la ecuación de Jacobi

$$J''(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0,$$

donde $\gamma : [0, l] \to M$ es una geodésica. Vemos las propiedades de estos campos y recordamos las fórmulas de variación de la energía, necesarias para estudiar las propiedades de la siguiente expresión

$$\int_0^l (\langle X', X'\rangle - \langle R(\gamma', X)\gamma', X\rangle)dt,$$

que se denota por $I(X, X)$, y que será relevante para demostrar en el capítulo 2, algunas propiedades de la función $d(x, y)^2$ que serán necesarias más adelante para concluir el resultado de comparación de soluciones de viscosidad de EDPs de segundo orden en variedades riemannianas.

Por otro lado, como en el tercer y cuarto capítulo trabajaremos con soluciones de viscosidad de ecuaciones $F(x, p, \zeta, Q) = 0$, donde $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, y $\mathcal{X} = \{(x, r, \zeta, A) : x \in M, r \in \mathbb{R}, \zeta \in TM_x, A \in \mathcal{L}^2_s(TM_x)\}$, se incluyen las definiciones de las propiedades que necesitaremos cumplan estas funciones, como por ejemplo que sea elíptica degenerada.

También se recuerda en el primer capítulo la definición grupo de Lie, ya que será de vital importancia en el quinto capítulo.

En el segundo capítulo analizamos algunas propiedades del hessiano de la función $d^2(x, y)$ que dependerán del signo de la curvatura seccional de la variedad riemanniana (por ello en el primer capítulo se recuerda el concepto de curvatura seccional en la variedad).

En particular demostramos, para el hessiano de la función $d^2(x,y)$, en una variedad riemanniana M, con curvatura seccional positiva, que

$$d^2\varphi(x,y)(v, L_{xy}v)^2 \leq 0$$

para todo $v \in TM_x$, con $x, y \in M$ lo bastante cercanos para que $d(x,y) < min\{i_M(x), i_M(y)\}$. Mientras que si M tiene curvatura seccional negativa entonces

$$d^2\varphi(x,y)(v, L_{xy}v)^2 \geq 0$$

para todo $v \in TM_x$, $x, y \in M$, tales que $d(x,y) < min\{i_M(x), i_M(y)\}$.

En el caso de curvatura seccional negativa, si la curvatura seccional K de M está acotada inferiormente, es decir $K \geq -K_0$, entonces conseguimos la siguiente acotación

$$d^2\varphi(x,y)(v, L_{xy}v)^2 \leq 2K_0 d(x,y)^2 \|v\|^2$$

para todo $v \in TM_x$ y $x, y \in M$ con $d(x,y) < min\{i_M(x), i_M(y)\}$.

En el tercer capítulo "Cálculo subdiferencial de segundo orden en variedades", recogemos las principales herramientas relativas al cálculo subdiferencial y que serán clave para la demostración de los resultados que recogemos en los capítulos 4 y 5.

Aparte de los resultados en la línea de esta tesis, el análisis no regular en variedades ha encontrado aplicaciones importantes como herramienta para obtener resultados en campos muy diversos tales como, por ejemplo, la geometría conforme (ver [17] y [32]).

Así empezamos recordando la definición de subdiferenciales y superdiferenciales de viscosidad de segundo orden en variedades riemannianas y más concretamente de los conjuntos $J^{2,+}$, $J^{2,-}$ y sus clausuras $\overline{J}^{2,+}$, $\overline{J}^{2,-}$. Más concretamente, se define el "subjet"de segundo orden de f, una función semicontinua inferior, en un punto $x \in M$ por

$$J^{2,-}f(x) = \{(d\varphi(x), d^2\varphi(x)) : \varphi \in C^2(M,\mathbb{R}), f-\varphi \text{ alcanza un mínimo local en } x\}.$$

Si $(\zeta, A) \in J^{2,-}f(x)$, decimos que ζ es una diferencial de primer orden y A es una subdiferencial de segundo orden de f en x.

De la misma forma, para una función semicontinua superior $g : M \to [-\infty, \infty)$, el "superjet"de segundo orden de g en x es

$$J^{2,+}g(x) = \{(d\varphi(x), d^2\varphi(x)) : \varphi \in C^2(M,\mathbb{R}), g-\varphi \text{ alcanza un máximo local en } x\}.$$

Y las clausuras se obtienen de forma análoga; para una función semicontinua inferior f se define

$$\overline{J}^{2,-}f(x) = \{(\zeta, A) \in TM_x^* \times \mathcal{L}_s(TM_x) \,:\, \exists (x_n, \zeta_n, A_n) \in M \times TM_{x_n}^* \times \mathcal{L}_s(TM_{x_n})$$

$$t.q.\ (\zeta_n, A_n) \in J^{2,-}f(x_n),\ (x_n, f(x_n), \zeta_n, A_n) \to (x, f(x), \zeta, A)\},$$

y para una función semicontinua superior g en M se define

$$\overline{J}^{2,+}g(x) = \{(\zeta, A) \in TM_x^* \times \mathcal{L}_s(TM_x) \,:\, \exists (x_n, \zeta_n, A_n) \in M \times TM_{x_n}^* \times \mathcal{L}_s(TM_{x_n})$$
$$t.q.\ (\zeta_n, A_n) \in J^{2,+}g(x_n),\ (x_n, g(x_n), \zeta_n, A_n) \to (x, g(x), \zeta, A)\}.$$

Extendemos las definiciones de subsolución y supersolución de viscosidad a EDPs en variedades del tipo

$$F(x, r, p, Q) = 0,$$

con $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Decimos que una función semicontinua superior $u : M \to \mathbb{R}$ es una subsolución de viscosidad de la ecuación $F = 0$ siempre que

$$F(x, u(x), \zeta, A) \leq 0$$

para todo $x \in M$ y $(\zeta, A) \in J^{2,+}u(x)$. De igual forma, una supersolución de viscosidad de $F = 0$ en M es una función semicontinua inferior $u : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, u(x), \zeta, A) \geq 0$$

para todo $x \in M$ y $(\zeta, A) \in J^{2,-}u(x)$. Si u es a la vez una subsolución de viscosidad y una supersolución de $F = 0$, decimos que u es una solución de viscosidad de $F = 0$ en M

En nuestra opinión tiene mucho sentido trabajar en la búsqueda de soluciones de viscosidad ya que son un tipo de solución natural para ecuaciones que no tienen soluciones clásicas, como por ejemplo la ecuación eikonal. Ver por ejemplo [13], donde los autores construyen una función 1-Lipschitz definida en una bola cerrada $\overline{B}$ en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, que es diferenciable en la bola abierta B, y tal que $\|\nabla u(x)\| = 1$ en casi todo punto, pero $\nabla u(0) = 0$, esto es que la ecuación eikonal $\|\nabla u(x)\| = 1$ en B, $u = 0$ en ∂B, admite soluciones que son diferenciales en todo punto y son distintas de su única solución de viscosidad que es la función distancia al borde ∂B (y que no es diferenciable en todo punto pero que es más natural desde punto de vista simétrico).

Las soluciones de viscosidad para la ecuación eikonal en variedades riemannianas han sido estudiadas en [5, 22, 21]).

Además recordamos la definición de subdiferencial proximal (de primer orden) y las caracterizaciones equivalentes que se pueden dar (ver [5]), y que usaremos para demostrar los resultados del capítulo 4.

En el tercer capítulo, también incluimos las diferentes nociones de convergencia que podemos encontrar o considerar en variedades riemannianas y las equivalencias entre ellas, demostrándolas por no haber encontrado una referencia explícita para ello. Obtenemos en particular, las siguientes equivalencias:

i) si A_n converge continuamente a $A_0 : TM_{x_0} \times TM_{x_0} \to \mathbb{R}$ entonces A_n converge en norma a A_0;

ii) si ζ_n converge continuamente a $\zeta_0 \in TM^*_{x_0}$ entonces ζ_n también converge en norma a ζ_0,

donde A_n es una sucesión de formas bilineales simétricas $A_n : TM_{x_n} \times TM_{x_n} \to \mathbb{R}$ y ζ_n es una sucesión de formas lineales $\zeta_n \in TM^*_{x_n}$.

Por otro lado, en este capítulo, extendemos el resultado que se demuestra en el Teorema 3.2 de [10], que es el resultado principal que nos llevará al principio de comparación de soluciones de viscosidad (del capítulo 3) y que nos dice:

Sean $\Omega_i \subset M_i$ abiertos (finito-dimensionales) y $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset M_1 \times M_2 = M$. Sea $u \in USC(\Omega_1)$,$v \in LSC(\Omega_2)$ y $\varphi \in C^2$ en Ω y sea

$$\omega(x) = u(x) - v(y), \text{ para } (x, y) \in \Omega$$

Sea $(\hat{x}, \hat{y})$ un máximo local de $\omega - \varphi$ en Ω. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen P y Q formas bilineales, $P : TM_{\hat{x}} \times TM_{\hat{x}} \to \mathbb{R}$ y $Q : TM_{\hat{y}} \times TM_{\hat{y}} \to \mathbb{R}$, tal que

$$(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\hat{x}), P) \in \overline{J}^{2+}u(\hat{x}) \text{ y } (\frac{\partial}{\partial y}\varphi(\hat{y}), Q) \in \overline{J}^{2-}v(\hat{y})$$

y

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|A\|\right) I \leq \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2$$

donde $A = d^2\varphi(\hat{x}, \hat{y})$.

No fue inmediata la extensión ya que en [10], se aplicaba para $\mathbb{R}^n = M$, $\varphi(x, y) = \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2$ y la matriz

$$\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

que era la segunda derivada de la función φ, y que al aplicarla a vectores del tipo (v, v) hacía que la parte derecha de la desigualdad anterior se anulara, obteniéndose así $P \leq Q$.

La extensión natural en variedades es tomar $\varphi(x, y) = \frac{\alpha}{2}d^2(x, y)$, y necesitábamos que fuese diferenciable, esto no fue problema al considerar una bola donde x e y estuviesen lo suficientemente cerca (bastaba demostrarlo para una bola). Lo que no es inmediato al trasladarlo a variedades es la desigualdad de las matrices, ya que la segunda derivada de la φ está definida en $TM_x \times TM_y$, y tenemos que aplicarlo a vectores $(v, L_{xy}v)$ donde L_{xy} es el transporte paralelo de x a y, para intentar conseguir que esa derivada sea menor o igual que cero y así obtener que

$$P \leq L_{yx}(Q)$$

(donde $L_{yx}(Q)$ se define como

$$\langle L_{yx}(Q)v, v\rangle := \langle Q(L_{xy}v), L_{xy}v\rangle).$$

En el caso de curvatura seccional no negativa, ya hemos mencionado que $d^2\varphi(x,y)(v, L_{xy}v)^2 \leq 0$, de lo que se sigue la misma desigualdad, pero para M con curvatura seccional negativa, la desigualdad es falsa, y por eso usamos la otra acotación:

$$d^2\varphi(x,y)(v, L_{xy}v)^2 \leq 2K_0 d(x,y)^2\|v\|^2,$$

y entonces, suponiendo que F tenga una propiedad de continuidad uniforme en las variables en x y $D^2u(x)$ podemos concluir también el principio de comparación.

Además, y como hemos anunciado antes, en este capítulo incluimos como resultado la regla de la suma "híbrida", cuyo enunciado es el siguiente:

"Sea M una variedad riemanniana con curvatura acotada inferiormente. Sean u_1, u_2 funciones semicontinuas superiores, tales que $u_i : M \to \mathbb{R}$. Sea $x_0 \in M$, y $(\zeta, Q) \in J^{2,+}(u_1 + u_2)(x_0)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existen $(\zeta_1, Q_1) \in \overline{J}^{2,+}u_1(x_1)$ y $(\zeta_2, Q_2) \in \overline{J}^{2,+}u_2(x_2)$ tales que

i) $d(x_1, x_0) < \varepsilon$ y $d(x_2, x_0) < \varepsilon$

ii)$|u_1(x_1) - u_1(x_0)| < \varepsilon$ y $|u_2(x_2) - u_2(x_0)| < \varepsilon$

iii)$\|\zeta_1 + L_{x_2x_1}(\zeta_2) - L_{x_0x_1}(\zeta)\|_{x_1} < \varepsilon$ y $\|Q_1 + L_{x_2x_1}(Q_2) - L_{x_0x_1}(Q)\|_{x_1} < \varepsilon$".

Este puede ser considerado un resultado híbrido, en el sentido de que, dando como dato un par $(\zeta, Q) \in J^{2,+}(u_1 + u_2)(x_0)$, obtenemos $(\zeta_1, Q_1) \in \overline{J}^{2,+}u_1(x_1)$ y $(\zeta_2, Q_2) \in \overline{J}^{2,+}u_2(x_2)$, en las clausuras de los superjet, y no en los superjet, como nos gustaría (y como ocurre en el caso euclideo).

En el cuarto capítulo conseguimos extender algunos de los resultados incluidos en [10] para soluciones de viscosidad de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en variedades riemannianas.

El estudio de las soluciones de viscosidad para ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades riemannianas ya había comenzado en [5, 21, 20]), y ahora lo continuamos para ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

Buscamos soluciones para el problema de Dirichlet en variedades riemannianas:

$$\begin{cases} F(x, u(x), du(x), d^2u(x)) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Con lo visto en el tercer capítulo acerca de la extensión del Teorema 3.2 de [10], generalizamos a variedades riemannianas el principio de comparación para soluciones de viscosidad de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, cuyo encunciado es el siguiente:

Sea Ω un conjunto abierto acotado de M, sea $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ propia y que satisface las siguientes condiciones:

1. existe $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma(r-s) \leq F(x,r,\zeta,P) - F(x,s,\zeta,P)$$

para $r \geq s$,

2. existe una función $\omega : [0,\infty] \to [0,\infty]$ que satisface $\omega(0+) = 0$ tal que

$$F(y,r,\alpha exp_y^{-1}(x),Q) - F(x,r,-\alpha exp_x^{-1}(y),P) \leq \omega(\alpha d(x,y)^2 + d(x,y))$$

siempre y cuando $x, y \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$, $P, Q \in T_{2,s}M$ y además se cumpla que

$$-(\frac{1}{\varepsilon_\alpha} + \|A_\alpha\|)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \leq A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2,$$

donde A_α es la matriz hessiana de la función $\varphi_\alpha = \frac{\alpha}{2}d(x,y)^2$ y $\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2(1+\|A_\alpha\|)}$. Sea $u \in USC(\overline{\Omega})$ una subsolución y $v \in LSC(\overline{\Omega})$ una supersolución de $F = 0$ en Ω y $u \leq v$ en $\partial\Omega$. Entonces $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$.

Por otra parte, y en relación a la existencia de soluciones, el método de Perrón se extiende fácilmente a variedades riemannianas, de la siguiente manera:

Supongamos que podemos aplicar el criterio de comparación para el problema de Dirichlet, es decir, si w es una subsolución y v es una supersolución del problema de Dirichlet, entonces $w \leq v$. Supongamos también que existe una subsolución $\underline{u}$ y una supersolución $\overline{u}$ del problema de Dirichlet que satisface la condición frontera $\underline{u}_*(x) = \overline{u}^*(x) = f(x)$ para $x \in \partial\Omega$. Entonces

$$W(x) = sup\{w(x) : \underline{u} \leq w \leq \overline{u} \text{ y } w \text{ es una subsolución del problema de Dirichlet}\}$$

es una solución del problema de Dirichlet. En lo anterior usamos la siguiente notación

$$\begin{cases} u^*(x) = \lim_{r\downarrow 0} sup\{u(y) : y \in \Omega \text{ y } d(y,x) \leq r\}, \\ u_*(x) = \lim_{r\downarrow 0} inf\{u(y) : y \in \Omega \text{ y } d(y,x) \leq r\}. \end{cases}$$

En particular conseguimos la existencia de soluciones de viscosidad para la ecuación $u + G(x, du, d^2u) = 0$.

En el quinto capítulo "Puntos Fijos y Ceros para funciones conjunto-valoradas en variedades riemannianas", nos introducimos en la teoría del punto fijo y en la búsqueda de ceros. Lo hacemos para funciones conjunto-valoradas en variedades riemannianas. Trabajamos con derivadas gráficas al igual que Aubin ([1]) que concluyó resultados de existencia de puntos fijos y del teorema de la función inversa. Por otro lado (como ahora detallaremos), Mordukhovich y Outrata (ver [24]) usaron también la derivada contingente de la subdiferencial de una función para resolver un problema de fricción no monótona.

Para variedades riemannianas damos la siguiente definición de derivada gráfica de funciones conjunto-valoradas:

Consideramos una aplicación conjunto-valorada $G : M \rightrightarrows M$, y un punto $x_0 \in M$. La derivada gráfica (o derivada contingente) de G en x_0 para $y_0 \in G(x_0)$ es la aplicación conjunto-valorada $DG(x_0|y_0) : T_{x_0}M \to T_{y_0}M$ definida por

$$v \in DG(x_0|y_0) \text{ si y solo si } \exists h_n \in T_{x_0}M, \exists v_n \in T_{y_0}M, \exists t_n \downarrow 0 \text{ tal que}$$

$$(h, v) = lim_n(h_n, v_n) \text{ y } exp_{y_0}(t_n v_n) \in G(exp_{x_0}(t_n h_n))$$

Introducimos la siguiente definición de condición de derivabilidad débil:

Decimos que una aplicación conjunto-valorada $G : M \rightrightarrows M$ satisface la condición de derivabilidad débil, (WDC) para abreviar, para una constante positiva K_0, si para cada $x_0, z_0 \in M$ tal que $d(G(x_0), z_0) < i_M(z_0)$, hay $h \in T_{x_0}M$, $\|h\| = 1$, y $v \in DG(x_0|y_0)(h)$ tal que $\langle exp_{y_0}^{-1}(z_0), v\rangle \geq K_0 d(z_0, y_0)$, donde $y_0 \in G(x_0)$ con $d(z_0, G(x_0)) = d(y_0, z_0)$.

También incluimos una condición tipo Lipschitz, que llamaremos propiedad de Aubin, para nuestras funciones conjunto valoradas y que es la siguiente:

Decimos que una aplicación conjunto-valorada $H : M \rightrightarrows M$ tiene la propiedad de Aubin con módulo L siempre y cuando para todo $x_1, x_2 \in M$ y para todo $y_1 \in H(x_1)$, hay un $y_2 \in H(x_2)$ que satisface $d(y_1, y_2) \leq Ld(x_1, x_2)$.

Exigimos a la variedad que sea completa y, en el caso en que tengamos que sumar puntos de la variedad, que tenga estructura de grupo de Lie abeliano, para que la distancia sea invariante por traslaciones. Para demostrar nuestro lema principal (que es una especie de regla de la cadena para la derivada gráfica) usamos caracterizaciones y propiedades de la subdiferencial proximal. El enunciado del lema es el siguiente:

Sea $G : M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada, y definimos $\varphi : M \to \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = d(z_0, G(x))$. Asumimos que $\zeta \in D^-\varphi(x_0)$, con $\varphi(x_0) > 0$. Si $y_0 \in G(x_0)$ satisface que $\varphi(x_0) = d(y_0, z_0)$, $v \in DG(x_0|y_0)(h)$ y la función $x \to d^2(x, z_0)$ es C^2 en y_0, entonces llegamos a que

$$\langle \zeta, h\rangle \leq \langle \frac{-exp_{y_0}^{-1}(z_0)}{d(y_0, z_0)}, v\rangle,$$

y por tanto para $h \neq 0$, tenemos

$$\|\zeta\| \geq \langle \frac{exp_{y_0}^{-1}(z_0)}{d(y_0, z_0)}, \frac{v}{\|h\|}\rangle$$

mientras que

$$\langle \frac{-exp_{y_0}^{-1}(z_0)}{d(y_0, z_0)}, v\rangle \geq 0$$

cuando $h = 0$.

Llegamos así al resultado principal, que nos asegura la existencia de ceros:

Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano. Sea $a \in M$. Sea $G : B(a,R) \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada que satisface (WDC) para $K_0 > 0$. Sea $H : M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada y que tenga la propiedad de Aubin con módulo $L < K_0$. Supongamos también que para cada $x \in B(a,R)$, al menos uno de los conjuntos $G(x)$, $H(x)$ es compacto, y que $d(-H(x), G(x)) < i_M$. Entonces la ecuación $0_M \in F(x) = G(x) + H(x)$ tiene una solución en $B(a,R)$ siempre que $F(a) \cap B(0, R(K_0 - L)) \neq \emptyset$.

Y con similar demostración llegamos al resultado principal del punto fijo:

Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano, y $a \in M$. Sea $G : B(a,R) \subset M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada, y $K_0 > 1$. Supongamos que G satisface la condición (WDC) para K_0. Sea $H : M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin con módulo $L < K_0 - 1$. Supongamos también que para cada $x \in B(a,R)$ al menos uno de los conjuntos $G(x)$ y $H(x)$ es compacto, y que $d(x - H(x), G(x)) < i_M$. Entonces la aplicación $F(x) = G(x) + H(x)$ tiene un punto fijo en $B(a,R)$ siempre que $F(a) \cap B(a, R(K_0 - L - 1)) \neq \emptyset$.

Además en este último capítulo, hacemos mención de que nuestros resultados constituyen otro método para asegurar la existencia de solución de la ecuación del tipo

$$0 \in Ay + p(x) + \partial\phi(\mathbf{B}y) \tag{β}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz de rigidez $m \times m$ definida positiva, $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un vector diferenciable relacionado con las fuerzas externas y $\mathbf{B}$ es una matriz $m \times m$ no singular definida por una fórmula de cuadratura. La función ϕ es de la forma

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(z_i) \quad z \in \mathbb{R}^m,$$

y las funciones φ_i que se utilizan son las siguientes

$$\varphi_i(z_i) = \begin{cases} (-k_1 + k_2 e_0) z_i + \frac{k_2}{2}(e_0)^2 & \text{si} \quad z_i < -e_0, \\ -k_1 z_i - \frac{k_2}{2}(z_i)^2 & \text{si} \quad z_i \in [-e_0, 0), \\ k_1 z_i - \frac{k_2}{2}(z_i)^2 & \text{si} \quad z_i \in [0, e_0), \\ (k_1 - k_2 e_0) z_i + \frac{k_2}{2}(e_0)^2 & \text{si} \quad z_i \geq e_0, \end{cases}$$

donde $e_0 > 0$, $k_1 > 0$, y $k_2 > 0$ son parámetros dados, que Mordukhovich y Outrata tratan de otra forma (ver [24]).

Los resultados principales de este capítulo nos permiten deducir otros corolarios y aplicaciones útiles, también en el caso de funciones univaloradas, y que de hecho, nos permiten mejorar los resultados conseguidos en el artículo [3].

AGRADECIMIENTOS

A mis directores, Juan y Daniel, por el tiempo que me han dedicado y por lo mucho que he aprendido de ellos. A mi familia, a mi novio y a mis amigos, que tanto me han apoyado y que sin ellos no hubiera sido posible. De forma especial, a todos los anteriores que desafortunadamente no podrán verme doctorarme, porque estaríàn orgullosos.

A todos os lo agradezco de corazón.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se incluirán nociones y resultados en variedades riemannianas que se habrán de tener en cuenta para entender los siguientes capítulos.

Vamos a considerar campos vectoriales, el funcional energía y sus fórmulas de variación, que nos permitirán en el siguiente capítulo analizar propiedades del hessiano de la función $d^2(x, y)$ en una variedad riemanniana y éstas a su vez serán claves para el desarrollo del capítulo 3.

Además también se recuerda la noción de grupo de Lie, para tratar el último capítulo.

Lo primero es recordar la definición de variedad riemanniana.

Definición 1.1. *Una variedad riemanniana (M, g) es una variedad M de clase C^∞ modelada sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (posiblemente infinito-dimensional), tal que para todo $p \in M$ existe un producto escalar $g(p) = g_p := \langle .,. \rangle_p$ en el espacio tangente $TM_p \simeq \mathcal{H}$ en el punto p, de modo que $\|x\|_p = (\langle x, x \rangle_p)^{1/2}$ define una norma equivalente en TM_p para todo $p \in M$ y la aplicación $p \in M \to g_p \in \mathcal{L}^2(TM_p)$ es una sección de clase C^∞ del fibrado $\sigma_2 : \mathcal{S}_2 \to M$ de las formas bilineales simétricas.*

Si una función $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $p \in M$, la norma de la diferencial $df(p) \in T^*M_p$ en el punto p se define por

$$\|df(p)\|_p = sup\{df(p)(v) : v \in TM_p, \|v\|_p \leq 1\}.$$

Dado que $(TM_p, \|.\|_p)$ es un espacio de Hilbert, tenemos una isometría lineal que identifica este espacio y su dual $(T^*M, \|.\|_p)$. De este modo podemos identificar $df(p) \in T^*M_p$ con el vector gradiente de f, $\nabla f(p) \in TM_p$, es decir,

$$\langle \nabla f(p), v \rangle_p = df(p)(v) \text{ para todo } v \in TM_p.$$

Para definir la distancia entre dos puntos de la variedad, necesitamos introducir el concepto de longitud de caminos. Para un camino $\gamma : [a, b] \to M$, de clase C^1, definimos su longitud por

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt}(s) \right\|_{\gamma(s)} ds.$$

Esta longitud depende solamente de la imagen $\gamma[a,b]$, y no de como se mueven los puntos $\gamma(t)$. De forma más concreta, si $h : [0,1] \to [a,b]$ es una función continua y monótona, entonces $L(\gamma \circ h) = L(\gamma)$. Diremos que un camino γ es una parametrización por la longitud del arco, cuando $\gamma : [0,T] \to M$ satisface $\left\| \frac{d\gamma}{dt}(s) \right\|_{\gamma(s)} = 1$ para todo s, y en este caso

$$L(\gamma|_{[0,r]}) = \int_0^r \left\| \frac{d\gamma}{dt}(s) \right\|_{\gamma(s)} ds = r$$

para cada $r \in [0,T]$. Para dos puntos $p, q \in M$ definimos la distancia d entre p y q como

$$d(p,q) = inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ es un camino de clase } C^1 \text{ que une } p \text{ y } q \text{ en } M\}$$

cuando p y q están en la misma componente conexa de M, y $d(p,q) = \infty$ en el caso contrario. Entonces d es una métrica en M (denominada g-distancia en M) la cual define la misma topología que la dada en M. Para esa métrica definimos la bola cerrada de centro p y radio $r > 0$ como

$$B_M(p,r) = \{q \in M : d(p,q) \leq r\}.$$

Como vamos a trabajar con campos vectoriales en la variedad, recordamos su definición.

Definición 1.2. *Un campo vectorial X en una variedad diferenciable es una aplicación de M en el fibrado tangente TM. El campo es diferenciable si la aplicación $X : M \to TM$ es diferenciable. Si dim $M < \infty$, esto ocurre si y solo si $X(f)(p) \doteqdot df(p)(X(p))$ es diferenciable para todo f diferenciable.*

Denotamos el espacio de campos vectoriales en M por $\chi(M)$.

Para cada par de campos vectoriales X e Y podemos asociar un campo vectorial $[X,Y]$ definido de la siguiente forma:

$$[X,Y](f) = XY(f) - YX(f).$$

Ahora vamos a definir lo que se entiende por conexión en una variedad diferenciable.

Definición 1.3. *Una conexión* ∇ *en una variedad diferenciable* M *es una aplicación*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

que se denota por $(X, Y) \to \nabla_X Y$ *y que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

donde $X, Y, Z \in \chi(M)$ *y* f, g *son diferenciables.*

Para el caso concreto de variedades riemannianas podemos definir las siguientes propiedades de las conexiones:

Definición 1.4. *Una conexión* ∇ *en una variedad riemanniana* M *es compatible con la métrica si y solo si*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \chi(M).$$

Definición 1.5. *Una conexión* ∇ *en una variedad* M *es simétrica si*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad X, Y \in \chi(M).$$

A partir de ahora, en una variedad riemanniana M, trabajaremos con la conexión de Levi-Civita, que es caracterizada por el siguiente teorema.

Teorema 1.6. *Dada una variedad riemanniana* M*, existe una única conexión* ∇ *en* M *que satisface las siguientes condiciones:*

1. ∇ *es simétrica*
2. ∇ *es compatible con la métrica riemanniana.*

A partir de ahora ∇ denotará la conexión de Levi-Civita.

Con esta conexión podemos definir una derivación covariante a partir de ella, que nos permita diferenciar campos vectoriales en la variedad M. Ésta viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 1.7. *Sea* M *una variedad riemanniana y* ∇ *la conexión de Levi-Civita. Existe una única correspondencia que asocia a cada campo vectorial* V *a lo largo de la curva diferenciable* $c : I \to M$ *otro campo vectorial* $\frac{\mathbf{D}V}{dt}$ *a lo largo de* c*, al que llamamos la derivada de* V *a lo largo de* c*, tal que:*

1. $\frac{\mathbf{D}}{dt}(V+W) = \frac{\mathbf{D}V}{dt} + \frac{\mathbf{D}W}{dt}$.

2. $\frac{\mathbf{D}}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{\mathbf{D}V}{dt}$, *donde* W *es un campo vectorial a lo largo de* c *y* f *es una función diferenciable en* I.

3. *Si* V *es inducida por un campo vectorial* $Y \in \chi(M)$, *es decir,* $V(t) = Y(c(t))$, *entonces* $\frac{\mathbf{D}V}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$.

También denotaremos $\frac{\mathbf{D}V}{dt} = V'(t)$ *cuando no haya lugar a ambigüedad.*

El campo $\nabla_X Y$ es la derivada de Y respecto a X. Cuando dim $M < \infty$, si pensamos en M como variedad inmersa en algún espacio $\mathbb{R}^n$ (esto es posible gracias al teorema de Nash), la forma natural de diferenciar un campo vectorial Y con respecto a otro campo vectorial X en un punto $p \in M$ sería extender X e Y localmente a campos vectoriales diferenciables $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$ definido en un subconjunto abierto $\mathbb{R}^M$ conteniendo a p, para calcular (usando el cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$) el vector

$$D\widetilde{Y}(p)(\widetilde{X}(p))$$

(que de hecho, es lo que llamamos la derivada direccional de $\widetilde{Y}$ en p en la dirección $\widetilde{X}(p) = X(p)$, que en general no tiene porqué pertenecer a TM_p), y después proyectar este vector en el espacio tangente TM_p. Se puede comprobar que el vector de TM_p que se obtiene por este método no depende de las extensiones $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$, y que la operación descrita satisface las propiedades de la conexión de Levi-Civita. Se sigue que

$$\nabla_X Y = [D\widetilde{Y}(p)(X(p))]^\top,$$

donde la derivada D es la diferencial usual de las funciones definidas en espacios euclídeos, y $v^\top$ denota la proyección ortogonal de un vector $v \in \mathbb{R}^m_p$ en TM_p, o lo que es lo mismo, la componente de v que es tangente a TM_p.

De la propiedad (3) de la proposición 1.7 podemos deducir que $\nabla_X Y(p)$ solo depende del vector $X(p) \in TM_p$ y de los valores de Y a lo largo de una curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $c(0) = p$ y $c'(0) = X(p)$. Es decir, se puede calcular $\nabla_X Y(p)$ tomando una curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $c(0) = p$ y $c'(0) = X(p)$, y calcular $\frac{\mathbf{D}V}{dt}|_{t=0}$ donde $V(t) = Y(c(t))$. Si consideramos M como variedad inmersa isométricamente en algún $\mathbb{R}^m$, eso es equivalente a calcular la derivada usual (o vector velocidad) de la curva $t \to Y(c(t))$ en $\mathbb{R}^n$ en $t = 0$, y luego proyectar esta derivada en TM_p.

Si V, W son campos a lo largo de una curva c entonces la derivada de la función $t \to \langle V(t), W(t)\rangle_{c(t)}$ se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{\mathbf{D}V}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{\mathbf{D}W}{dt}\rangle$$

Definición 1.8. *Decimos que un campo V es paralelo a lo largo de γ cuando $\mathbf{D}V(t)/dt = 0$.*

Con esta noción podemos recordar la definición de transporte paralelo.

Lema 1.9. *Sea $\gamma : I \to M$ una curva, t_0 y t_1 en I.*

1. *Para cada $V_0 \in TM_{\gamma(t_0)}$ existe exactamente un campo vectorial paralelo V a lo largo de γ tal que $V(t_0) = V_0$.*
2. *La aplicación*
$$P_{t_0,\gamma}^{t_1} : TM_{\gamma(t_0)} \to TM_{\gamma(t_1)}$$
que asocia a cada V_0 el valor $V(t_1)$ del campo vectorial paralelo determinado en (1) es una isometría lineal que denominaremos transporte paralelo.

Demostración. Basta considerar el caso $\gamma|_{[t_0,t_1]}$ contenido en una carta (u, M'). En el caso contrario subdividiríamos el intervalo $[t_0, t_1]$ en un número finito de subintervalos cuyas imágenes estuvieran contenidas en una carta. Si ponemos $u \circ \gamma(t) = u(t)$ y Γ es el símbolo de Christoffel asociado a la carta (u, M') de la derivada covariante considerada en M, que $V(t)$ sea paralelo equivale a

$$\frac{\mathbf{D}V}{dt}(t) = \frac{dV}{dt}(t) + \Gamma(u(t))\left(\frac{du}{dt}, V(t)\right) = 0.$$

Así, el enunciado del lema es consecuencia de los resultados estándar para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, es decir al ser una ecuación diferencial lineal, la aplicación solución $V_0 \to V(t_1)$ que para cada V_0 me da un $V(t_1)$ es lineal(y tiene la misma norma que V_0). $\square$

Denotaremos por $L_{x,y}$ al transporte paralelo que equivale a $P_{t_0,\gamma}^{t_1}$ donde γ es la geodésica minimal que une $\gamma(t_0) = x$ con $\gamma(t_1) = y$.

Si identificamos de forma canónica el espacio de formas bilineales simétricas de TM_x con el espacio de aplicaciones lineales de TM_x a TM_x, tenemos que

$$L_{yx}(Q) = L_{xy}^{-1} Q L_{xy}$$

para $Q \in \mathcal{L}_s^2(TM_x)$.

Por tanto $traza(L_{yx}Q) = traza(Q)$, y $det_+(L_{yx}(Q)) = det_+(Q)$, donde $det_+(A)$ se define como el producto de autovalores no negativos de A.

Definición 1.10. *Una geodésica γ es un camino de clase C^∞ que satisface la ecuación*

$$\mathbf{D}_{d\gamma(t)/dt} d\gamma(t)/dt = 0.$$

Si esta geodésica tiene por longitud la distancia entre sus puntos extremos, se denomina geodésica minimal (o minimizante).

Observaciones 1.11. El símbolo de Christoffel, Γ, usado anteriormente se define mediante sus coordenadas, o símbolos de Christoffel, que son los coeficiente de la conexión ∇, en el sistema de coordenadas (U, x), es decir, en función de los vectores base

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k,$$

y tenemos que

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\},$$

donde g_{ij} son los coeficientes de la métrica, es decir

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$$

y como la matriz (g_{km}) admite una inversa, de coeficientes (g^{km}), obtenemos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

lo que prueba el carácter intrínseco del concepto de geodésica y transporte paralelo (véase [14, Remark 3.7]).

Si consideramos la ecuación

$$\nabla_{d\gamma(t)/dt} d\gamma(t)/dt = \frac{d^2 u(t)}{t^2} + \Gamma(u(t)) \left(\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt} \right) = 0,$$

los resultados estándar para ecuaciones diferenciales de segundo orden nos dicen que para cada $X \in TM$ existe un intervalo $J(X)$ conteniendo al 0 y una geodésica $\gamma = \gamma_X : J(X) \to M$ con $\frac{d\gamma(0)}{dt} = X$. El par $(\gamma_X, J(X))$ está unívocamente determinado si elegimos $J(X)$ maximal con respecto a la propiedad anterior. Si reformulamos ligeramente la ecuación anterior obtenemos la existencia de un entorno abierto $\widetilde{T}M$ de X en TM tal que para todo $V \in \widetilde{T}M$, la geodésica $\gamma_V(t)$ está definida para $|t| < 2$.

Definición 1.12. *La aplicación exponencial* $exp : \widetilde{T}M \to M$ *se define como*

$$exp(V) = \gamma_V(1),$$

y la restricción de exp *a la fibra* TM_x *en* $\widetilde{T}M$ *se denota por* exp_x*.*

A continuación se exponen algunas propiedades de la función exponencial. Para la demostración del teorema véase [18] y [19].

Teorema 1.13. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Entonces para cada $x \in M$ existe un número $r > 0$ tal que la aplicación $exp_x : B(0_x, r) \subset TM_x \to M$ está definida y verifica:*

1. *$exp_x : B(0_x, \delta) \to B_M(x, \delta)$ es un difeomorfismo bi-Lipschitz C^∞, para toda $\delta \in (0, r]$.*

2. *exp_x transforma segmentos que pasan por 0_x y están contenidos en $B(0_x, r)$ en geodésicas en $B_M(x, r)$.*

3. *$dexp_x(0_x) = id_{TM_x}$.*

En particular, teniendo en cuenta la condición 3, para cada $C > 1$, el radio r puede ser elegido suficientemente pequeño para que las aplicaciones $exp_x : B(0_x, r) \to B_M(x, r)$ y $exp_x^{-1} : B_M(x, r) \to B(0_x, r)$ sean C-Lipschitz.

Cualquier camino γ que une p y q en M y tal que $L(\gamma) = d(p, q)$ es una geodésica, y se denomina geodésica minimal (ver Corolario 3.9, pag. 73 [14]). En lo que sigue, si no se especifica lo contrario, supondremos que un camino geodésico está parametrizado por la longitud de arco.

Mediante el transporte paralelo podemos calcular la distancia entre dos vectores (o formas) que están en diferentes espacios tangentes TM_x y TM_y (o en diferentes duales de espacios tangentes, esto es, en diferentes fibras del fibrado cotangente, T^*M_x y T^*M_y) siempre que exista una geodésica minimizante que conecte los puntos $x, y \in M$, de forma que $\gamma(t_0) = x, \gamma(t_1) = y$. Sean los vectores $v \in TM_x, w \in TM_y$, entonces podemos definir la distancia entre v y w como el número

$$\|w - P_{t_0,\gamma}^{t_1}(v)\|_y = \|v - P_{t_1,\gamma}^{t_0}(w)\|_x$$

o lo que es lo mismo

$$\|w - L_{x,y}(v)\|_y = \|v - L_{y,x}(w)\|_x$$

(esta igualdad es cierta porque $P_{t_0}^{t_1}$ es una isometría lineal entre dos espacios tangentes, con inversa $P_{t_1}^{t_0}$).

Del hecho de que los espacios T^*M_x y TM_x son isométricamente identificables por la fórmula $v = \langle v, . \rangle$, podemos, de manera obvia, utilizar el mismo método seguido en espacios tangentes, para medir distancias entre formas $\xi \in T^*M$ y $\eta \in T^*M_y$ que se encuentran en diferentes fibras del fibrado cotangente.

Teorema 1.14 (Hopf-Rinow). *Si M es una variedad finito-dimensional riemanniana completa y conexa, entonces existe al menos una geodésica minimal que conecta dos puntos cualquiera de M.*

En otro orden de cosas, para cualquier punto p dado, la afirmación "q puede ser unido a p por una única geodésica minimal" es cierta para casi todo $q \in M$; ver [23]. Como es bien conocido, el teorema de Hopf-Rinow falla cuando M es infinito-dimensional, pero Ekeland [15] probó (utilizando su principio variacional) que, en infinitas dimensiones, el conjunto de puntos que pueden ser unidos por una geodésica minimal en M es denso.

Teorema 1.15 (Ekeland). *Si M es una variedad riemanniana de dimensión infinita, completa y conexa, entonces para cualquier punto p dado, el conjunto* $\{q \in M : q$ que pueden ser unidos a p por una unica geodésica minimal $\}$ *es residual en M, es decir contiene un G_δ denso en M.*

Definición 1.16. *Una variedad riemanniana M, se dice que es* geodésicamente completa *cuando el intervalo maximal de definición de cada geodésica en M es* $\mathbb{R}$.

Esto es equivalente a decir que para cualquier $x \in M$, la aplicación exponencial $\exp_x$ está definida en todo el espacio tangente TM_x (aunque, no obstante, $\exp_x$ no es necesariamente inyectiva en TM_x). Sabemos también que toda variedad riemanniana completa es geodésicamente completa. De hecho se tiene el siguiente resultado (véase [19], p. 224 para una demostración).

Proposición 1.17. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Considérese las siguientes condiciones:*

1. *M es completa (con respecto a la g-distancia).*
2. *M es geodésicamente completa.*
3. *Para cualquier $x \in M$, la aplicación exponencial* $\exp_x$ *está definida en todo TM_x.*
4. *Existe algún $x \in M$ tal que la aplicación exponencial* $\exp_x$ *está definida en todo TM_x.*

Entonces $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4)$*, y si suponemos que M es* finito-dimensional*, entonces todas las condiciones son equivalentes a cinco:*

5. *Cada conjunto de M cerrado y d_g-acotado es compacto.*

Ahora recordaremos algunos resultados acerca de la convexidad en variedades riemannianas.

Definición 1.18. Diremos que un subconjunto U de una variedad riemanniana es *convexo* si para cualquier x e y, $x, y \in U$, existe una única geodésica que une x e y, tal que la longitud de la geodésica es igual a $\operatorname{dist}(x, y)$, y que está contenida en U.

Cada variedad riemanniana es *localmente convexa*, en el siguiente sentido.

Teorema 1.19 (Whitehead). *Sea M una variedad riemanniana. Para cada $x \in M$, existe $c > 0$ tal que para todo r con $0 < r < c$, la bola abierta $B(x, r) = \exp_x B(0_x, r)$ es convexa.*

Este teorema justifica la necesidad de introducir la noción de variedad *uniformemente localmente convexa*, que será utilizada de manera relevante cuando desarrollemos los principios variacionales y las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en variedades riemannianas.

Definición 1.20. Diremos que una variedad riemanniana M es *uniformemente localmente convexa* cuando existe $c > 0$ tal que para cada $x \in M$ y cada r con $0 < r < c$ la bola $B(x, r) = \exp_x B(0_x, r)$ es convexa.

Definición 1.21. El radio de convexidad de un punto $x \in M$ en una variedad riemanniana M lo definimos como el supremo en $\overline{\mathbb{R}^+}$ de los numeros $r > 0$ tales que la bola $B(x, r)$ es convexa. Anotamos este supremo por $c(M, x)$, y definimos el radio de convexidad global de M como $c(M) := \inf\{c(M, x) : x \in M\}$.

Observaciones 1.22.

1. De las definiciones precedentes se concluye directamente que una variedad riemanniana M es uniformemente localmente convexa cuando, y sólo cuando, $c(M) > 0$.

2. Por el teorema de Whitehead sabemos que $c(M, X) > 0$ para cada $x \in M$. En otro orden de cosas, la función $x \mapsto c(M, x)$ es continua en M, véase [18, Corolario 1.9.10]. Consecuentemente, si M es compacta, entonces $c(M) > 0$, esto es, M es uniformemente localmente convexa.

También recordamos la definición de radio de inyectividad que será tenido en cuenta más adelante.

Definición 1.23. Se define el radio de inyectividad de una variedad riemanniana M en un punto $x \in M$ como el supremo en $\overline{\mathbb{R}^+}$ de los números $r > 0$ tales que $\exp_x$ es un difeomorfismo de clase C^∞ entre la bola $B(0_x, r)$ y su imagen. Denotamos este supremo por $i_M(x)$. El radio de inyectividad de M lo definimos por $i_M := \inf\{i_M(x) : x \in M\}$.

Observación 1.24. Para una variedad finito-dimensional M, se prueba que $i_M(x)$ equivale al supremo de lo números $r > 0$ tales que $\exp_x$ es inyectiva cuando la restringimos a la bola $B(0_x, r)$, véase [18]. Sin embargo, para variedades infinito dimensionales no está claro si esta afirmación es siempre verdadera.

Observación 1.25. Por el Teorema 1.13 sabemos que $i_M(x) > 0$ para cada $x \in M$. También se tiene que la función $x \mapsto i_M(x)$ es continua en M [18, Proposición 2.1.10]. Consecuentemente, si M es compacta, entonces $i_M > 0$.

Vamos a recordar la definición de curvatura R de una variedad riemanniana M ([14]).

Definición 1.26. *La curvatura R de una variedad riemanniana M es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \chi(M)$ una aplicación $R(X,Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \chi(M),$$

donde ∇ es la conexión riemanniana de M.

La curvatura en cada punto $p \in M$ solo depende de los valores de X, Y y Z en p. Si trabajamos con $M = \mathbb{R}^n$ entonces la curvatura $R = 0$, por tanto podemos pensar que R mide la desviación de M con respecto al caso euclídeo.

También podemos definir la curvatura usando el sistema de coordenadas $\{x_i\}$, y en este caso como $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ tenemos que

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

y por tanto la curvatura mide la no conmutatividad de la derivada covariante.

Teorema 1.27. *Llamemos $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = (X,Y,Z,T)$. La curvatura R de M tiene las siguientes propiedades:*

1. *R es bilineal en $\chi(M) \times \chi(M)$;*

2. $R(X,Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ *es lineal;*

3. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$*;*

4. $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$*;*

5. $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$*;*

6. $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$.

Definición 1.28. *La curvatura seccional de* M *en un punto* p *con respecto a un plano generado por dos vectores* $v, w \in TM_p$ *se define como*

$$K(p; v, w) = \frac{\langle R(v,w)v, w\rangle}{|v \wedge w|^2}$$

donde $|v \wedge w|$ *es el área del paralelogramo definido por* u *y* v *en* TM_p*, es decir*

$$|v \wedge w| = \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2}$$

Proposición 1.29. *La definición* $K(p; v, w)$ *no depende de* $v, w \in TM_p$*, solo depende del plano que ambos generan. Así para cada subespacio bidimensional* $\mathcal{P} \subset TM_p$ *existe un número* $K(p;\mathcal{P})$ *tal que para cada par de vectores* v, w *linealmente independientes se tiene*

$$K(p, \mathcal{P}) = K(p; v, w).$$

Además la curvatura seccional de M determina la curvatura de M en el siguiente sentido: si R y R' cumplen las propiedades del teorema 1.27 y además tenemos que

$$K(p; v, W) := \frac{\langle R(v,w)v, w\rangle}{|v \wedge w|^2} = \frac{\langle R'(v,w)v, w\rangle}{|v \wedge w|^2} =: K'(p; v, w),$$

entonces $R = R'$.

Necesitaremos trabajar con variaciones de curvas y con campos de Jacobi, para después poder deducir propiedades de la hessiana de la función distancia al cuadrado. Por tanto será necesario que demos algunas definiciones.

Definición 1.30. *Sea* $\gamma : [0, l] \to M$ *una curva diferenciable. Llamamos una variación diferenciable de* γ *a una aplicación diferenciable* $\alpha : [0, l] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$

tal que $\alpha(t,0) = \gamma(t)$ para todo $t \in [0,l]$. Además definimos a los funcionales asociados de longitud y energía por

$$L(s) = L(\alpha_s) = \int_0^l \|\alpha_s'(t)\| dt$$

y

$$E(s) = E(\alpha_s) = \int_0^l \|\alpha_s'(t)\|^2 dt,$$

donde α_s es la curva variación definida por $\alpha_s(t) = \alpha(t,s)$ para todo $t \in [0,l]$. El campo vectorial V a lo largo de γ definido por

$$V(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(t,0)$$

se llama campo variacional de α.

Se puede demostrar que cada campo vectorial a lo largo de γ es el campo variacional de alguna variacion α de γ. Cuando γ es una geodésica, diremos que α es una variación de γ por geodésicas si las curvas $t \to \alpha_s(t)$ son geodésicas para todo $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Si aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz (a las funciones $f \equiv 1$ y $g(t) = \|\alpha_s'(t)\|$ en el intervalo $[0,l]$) tenemos que

$$L(s)^2 \leq lE(s),$$

para todo $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, con igualdad si y sólo si α está parametrizada por el arco.

Es posible demostrar que, si $\gamma : [0,l] \to M$ es una geodésica y α es una variación de γ a través de geodésicas, entonces el campo variacional de α,

$$V(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(t,0)$$

satisface la ecuación de Jacobi

$$J''(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0 \qquad (JE)$$

para todo $t \in [0,l]$. Recíprocamente, para cada campo vectorial J a lo largo de una geodésica γ que satisfaga (JE), existe una variación α de γ a través de geodésicas tal que el campo variacional de α coincide con J.

Definición 1.31. *Un campo vectorial J a lo largo de una geodésica γ se dice que es un campo de Jacobi cuando J satisface la ecuación (JE).*

Si localizamos (JE) usando coordenadas, deducimos que (JE) es localmente equivalente a un sistema lineal de segundo orden de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por tanto, se sigue, que para cada $v, w \in TM_{\gamma(0)}$ existe un único campo de Jacobi J a lo largo de γ tal que $J(0) = v$ y $J'(0) = w$. Además, el espacio vectorial de campos de Jacobi a lo largo de γ es de dimensión $2n$ (donde n es la dimensión de M), y si aadimos la condición $J(0) = 0$ tiene dimensión n.

De acuerdo a lo anterior, los campos de Jacobi a lo largo de una geodésica γ coinciden con los campos variacionales de variaciones de γ por geodésicas (ver por ejemplo, Proposición 4, Capítulo 8 de [29]).

Es posible demostrar que cada campo de Jacobi J a lo largo de γ puede escribirse de la siguiente forma

$$J(t) = f(t)\gamma'(t) + J^{\perp}(t),$$

donde f es una función lineal con valores reales, y $J^{\perp}$ es un campo de Jacobi a lo largo de γ tal que $\langle \gamma'(t), J^{\perp}(t) \rangle = 0$ para todo t.

Veamos ahora las fórmulas de la primera y la segunda variación del funcional de la energia.

Teorema 1.32 (Fórmula para la primera variación de la energía). *Sea $\gamma : [0, a] \to M$ una curva diferenciable, y sea $\alpha : [0, l] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ una variación diferenciable de γ. Si $E : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ es la energía de α, entonces*

$$\frac{1}{2}E'(0) = \langle V, \gamma'(t) \rangle|_0^l - \int_0^l \langle V, \gamma''(t) \rangle dt,$$

donde $V = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(t, 0)$.

Una consecuencia de esta fórmula es la siguiente caracterización de las geodésicas: una curva γ es una geodésica si y solo si para cada variación α de γ con los mismos puntos extremos (esto es $\alpha(0, s) = \gamma(0)$ y $\alpha(l, s) = \gamma(l)$ para todo s) tenemos que $E'(0) = 0$.

Teorema 1.33 (Fórmula para la segunda variación de la energía). *Sea $\gamma : [0, l] \to M$ una geodésica, y sea α una variación diferenciable de γ, y E la energía de α. Sea X el campo variacional de α, esto es $X = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(t, 0)$. Entonces*

$$\frac{1}{2}E''(0) = -\int_0^l \langle X, X'' + R(\gamma', X)\gamma' \rangle dt + \langle X(t), X'(t) \rangle|_{t=0}^{t=l} + \langle \frac{D}{ds}\frac{\partial \alpha}{\partial s}(t, 0), \gamma'(t) \rangle|_{t=0}^{t=l},$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{2}E''(0) = \int_0^l (\langle X', X' \rangle - \langle R(\gamma', X)\gamma', X \rangle) dt + \langle \frac{D}{ds}\frac{\partial \alpha}{\partial s}(t, 0), \gamma'(t) \rangle|_{t=0}^{t=l}.$$

A la expresión
$$\int_0^l (\langle X', X' \rangle - \langle R(\gamma', X)\gamma', X \rangle) dt$$
se la denota por $I(X, X)$.

Corolario 1.34. *Si α es una variación de γ a través de geodésicas entonces*
$$\frac{1}{2}E''(0) = -\int_0^l \langle X, X'' + R(\gamma', X)\gamma' \rangle dt + \langle X(t), X'(t) \rangle|_{t=0}^{t=l} + \langle \frac{D}{ds}\frac{\partial \alpha}{\partial s}(t, 0), \gamma'(t) \rangle|_{t=0}^{t=l} =$$
$$= I(X, X) + \langle \frac{D}{ds}\frac{\partial \alpha}{\partial s}(t, 0), \gamma'(t) \rangle|_{t=0}^{t=l}.$$

Veamos ahora la relación entre los campos de Jacobi y los puntos críticos de exp_p. Consideramos la curva $s \to v(s) \in TM_p$ y denotamos $v(0) = v, v'(0) = w$. Entonces la fórmula
$$\alpha(t, s) = exp_p(tv(s))$$
define la variación de $\gamma(t) = exp_p(tv)$ a través de geodésicas, con campo variacional
$$V(t) = dexp_p(tv)(tw).$$
Tenemos que $V(0) = 0$, y $V(1) = dexp_p(v)(w)$. Se sigue que si v es un punto crítico de exp_p entonces existe un campo de Jacobi J a lo largo de $\gamma(t) = exp_p(tv)$ tal que $J(0) = 0$ y $J(1) = 0$. Se puede demostrar que el recíproco también es cierto.

Definición 1.35. *Sea $\gamma : [0, l] \to M$ una geodésica. Decimos que un punto $\gamma(t_0)$ esta conjugado con el punto $\gamma(0)$ si existe un campo de Jacobi no nulo J a lo largo de γ con $J(0) = 0$ y $J(t_0) = 0$.*

Por lo tanto, si $\gamma(t) = exp_p(tv)$, entonces $p = \gamma(0)$ y $exp_p(v) = \gamma(1)$ son puntos conjugados si y solo si v es un punto crítico de exp_p.

Proposición 1.36. *Sea $\gamma : [0, l] \to M$ una geodésica sin puntos conjugados. Entonces para cada $v \in TM_{\gamma(0)}$ y $w \in TM_{\gamma(l)}$ existe un único campo de Jacobi a lo largo de γ tal que $J(0) = v$ y $J(l) = w$.*

Observamos que si α es una variación de una geodésica $\gamma : [0, l] \to M$ con puntos extremos fijos, y W es su campo variacional, entonces $W(0) = 0, W(l) = 0$, y para la energía E de su variación α tenemos
$$\frac{1}{2}E''(0) = I(W, W).$$

Se puede demostrar que, si $\gamma : [0, l] \to M$ es una geodésica sin puntos conjugados, entonces $I(W, W) > 0$ para cada campo vectorial no nulo a lo largo de γ tal que $W(0) = 0$, $W(l) = 0$. Por otro lado, si γ contiene puntos conjugados, entonces existe algún campo vectorial no nulo W a lo largo de γ con $W(0) = 0$, $W(l) = 0$, y tal que $I(W, W) < 0$. Esto significa que, entre todos los caminos cercanos con los mismos puntos extremos, una geodésica γ minimiza la energia (y la longitud) si y solo si γ no contiene ningún punto conjugado.

Concluimos con un resultado que afirma que, entre todos los campos vectoriales de γ con las mismas condiciones frontera, el único campo de Jacobi a lo largo de γ determinado con esas condiciones minimiza la expresión $I(X, X)$ (siempre que γ no tenga puntos conjugados).

Lema 1.37. *Sea $\gamma : [0, l] \to M$ una geodésica sin puntos conjugados, X un campo de Jacobi a lo largo de γ, y Z un campo vectorial diferenciable a trozos a lo largo de γ tal que $X(0) = Z(0)$ y $X(l) = Z(l)$. Entonces*

$$I(X, X) \leq I(Z, Z),$$

y la igualdad se da cuando $Z = X$.

Para la demostración del lema ver [30].

En el capítulo siguiente veremos propiedades del hessiano de la función $d^2(x, y)$ (distancia al cuadrado). Por ello, vamos a recordar que se entiende por hessiano de una función φ, C^2, en una variedad riemanniana M, y se define como

$$D^2\varphi(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla\varphi, Y \rangle,$$

donde $\nabla\varphi$ es el gradiente de φ y X, Y son campos vectoriales en M (ver [28], página 31). El hessiano es un campo tensorial simétrico del tipo $(0, 2)$ y, para un punto $p \in M$, el valor $D^2\varphi(X, Y)(p)$ solo depende de f y de los vectores $X(p), Y(p) \in TM_p$. Así podemos definir la segunda derivada de φ en p como la forma bilineal $d^2\varphi(p) : TM_p \times TM_p \to \mathbb{R}$

$$(v, w) \to d^2\varphi(p)(v, w) := D^2\varphi(X, Y)(p),$$

donde X, Y son campos vectoriales cualesquiera tales que $X(p) = v$, $Y(p) = w$. Una forma para calcular $d^2\varphi(p)(v, v)$ es tomar una geodésica γ con $\gamma'(0) = v$ y calcular

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(\gamma(t))|_{t=0},$$

lo que es lo mismo que $d^2\varphi(p)(v, v)$. A veces usaremos la notación de $d^2\varphi(p)(v)^2$ en vez de $d^2\varphi(p)(v, v)$.

En lo sucesivo, en particular en el capítulo 3, aparecerán funciones de la forma

$$F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$$

donde $\mathcal{X} = \{(x, r, \zeta, A) : x \in M, r \in \mathbb{R}, \zeta \in TM_x, A \in \mathcal{L}_s^2(TM_x)\}$.

Definición 1.38. *Dada una función $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, decimos que es elíptica degenerada siempre que*

$$F(x, r, \zeta, A) \leq F(x, r, \zeta, B)$$

cuando $B \leq A$ (siendo $x \in M$, $r \in \mathbb{R}$, $\zeta \in TM_x$, $A, B \in \mathcal{L}_s^2(TM_x)$).

Por ejemplo, son elípticas degeneradas las funciones del tipo $F(x, r, \zeta, A) = -trace(A)$ y $F(x, r, \zeta, A) = -det_+(A)$, y además son invariantes por traslaciones (por transporte paralelo), en el sentido de que

$$G(r, \zeta, A) = G(r, L_{xy}\zeta, L_{xy}A)$$

para todo $r \in \mathbb{R}, \zeta \in TM_x, A \in \mathcal{L}_s^2(TM_x)$.

Definición 1.39. *Dada una función $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, decimos que es propia siempre que además de ser elíptica degenerada, se cumpla que*

$$F(x, r, \zeta, A) \leq F(x, s, \zeta, A)$$

cuando $r \leq s$.

Definición 1.40. *Decimos que $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ es intrínsecamente uniformemente continua si se cumple*

$$|F(y, r, L_{xy}\zeta, L_{xy}P) - F(x, r, \zeta, P)| \to 0 \text{ uniformemente cuando } y \to x.$$

Ahora recordaremos la definición de grupo de Lie y algunas de sus propiedades, noción que será necesaria en el capítulo 5.

Definición 1.41. *Un grupo de Lie, es un grupo G con una estructura de variedad diferenciable tal que la aplicación $G \times G \to G$ dada por $(x, y) \to xy^{-1}$, $x, y \in G$, es diferenciable, y tal que las traslaciones por la izquierda $\mathbf{L}_x$ y las traslaciones por la derecha $\mathbf{R}_x$ dadas por $\mathbf{L}_x : G \to G$, $\mathbf{L}_x(y) = xy$; $\mathbf{R}_x : G \to G$, $\mathbf{R}_x(y) = yx$, son difeomorfismos.*

Decimos que una métrica riemanniana en G es invariante por la izquierda si

$$\langle u, v\rangle_y = \langle d(\mathbf{L}_x)_y u, d(\mathbf{L}_x)_y v\rangle_{L_x(y)}$$

(donde hemos identificado $d(\mathbf{L}_x)_y = d(\mathbf{L}_x)(y)$). De la misma forma una métrica riemanniana es invariante por la derecha en G si

$$\langle u, v\rangle_y = \langle d(\mathbf{R}_x)_y u, d(\mathbf{R}_x)_y v\rangle_{R_x(y)}.$$

Una métrica riemanniana es bi-invariante si es invariante por la derecha y por la izquierda. Luego, si trabajamos en un grupo de Lie abeliano, la métrica riemanniana es bi-invariante, o lo que es lo mismo es invariante por traslaciones.

Capítulo 2

Propiedades del Hessiano de la función distancia al cuadrado

Vamos a dar unas propiedades de la matriz hessiana de la función distancia al cuadrado, es decir $M \times M \ni (x, y) \to d(x, y)^2 \in \mathbb{R}$, que denotaremos:

$$\varphi(x, y) = d(x, y)^2.$$

Lo que nos será útil para el siguiente capítulo es saber en que variedades M, tenemos que

$$d^2\varphi(x, y)(v, L_{xy}v)^2 \leq 0 \tag{2.1}$$

para todo $v \in TM_x$, con $x, y \in M$, lo bastante cercanos para que $d(x, y) \leq min\{i_M(x), i_M(y)\}$.

Calculamos una parcial de esta función y obtenemos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 2d(x, y)\frac{\partial d}{\partial x}(x, y) = -2exp_x^{-1}(y). \tag{2.2}$$

La segunda igualdad se tiene, por ejemplo, usando la fórmula de la primera variación de la longitud de arco (ver [28], p.90). De hecho, si $\alpha(t, s)$ es una variación a través de geodésicas de una geodésica minimizante $\gamma(t)$ con $y = \gamma(0)$ y $x = \gamma(l)$, donde $l = d(x, y)$, y si $L(s)$ denota la longitud de la geodésica $t \to \alpha(t, s)$, entonces

$$\frac{d}{ds}L(s)|_{s=0} = \left[\langle V, T\rangle|_0^l - \int_0^l \langle V, \nabla_T T\rangle dt\right] = (\langle V(l), T(l)\rangle - \langle V(0), T(0)\rangle)$$

donde $T = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ (luego $\nabla_T T = 0$) y $V = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$. Tomando un α tal que V es el campo de Jacobi a lo largo de γ que satisface $V(0) = 0$, $V(l) = v$, tenemos que

$$\frac{\partial d}{\partial x}(x, y)(v) = \frac{d}{ds}L(s)|_{s=0} = \frac{1}{l}\langle v, -exp_x^{-1}(y)\rangle.$$

De igual forma tenemos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 2d(x, y)\frac{\partial d}{\partial y}(x, y) = -2exp_y^{-1}(x). \tag{2.3}$$

Observamos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + L_{xy}(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)) = 0 = \frac{\partial d}{\partial y}(x, y) + L_{xy}(\frac{\partial d}{\partial x}(x, y)). \tag{2.4}$$

Derivando otra vez en las expresiones (2.2) y (2.3), obtenemos que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y)(v)^2 = 2\left(\frac{\partial d}{\partial x}(x, y)(v)\right)^2 + 2d(x, y)\frac{\partial^2 d}{\partial x^2}(x, y)(v)^2,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y)(v, w) = 2\frac{\partial d}{\partial x}(x, y)(v)\frac{\partial d}{\partial y}(x, y)(w) + 2d(x, y)\frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y}(x, y)(v, w)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y)(w)^2 = 2\left(\frac{\partial d}{\partial y}(x, y)(w)\right)^2 + 2d(x, y)\frac{\partial^2 d}{\partial y^2}(v, y)(w)^2$$

entonces, si tomamos $w = L_{xy}v$ y sumamos las dos primeras ecuaciones, y luego usamos (2.4), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y)(v)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y)(v, L_{x,y}v) = 2d(x, y)\left[\frac{\partial^2 d}{\partial x^2}(x, y)(v)^2 + \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y}(x, y)(v, L_{xy}v)\right]$$

y si cambiamos x por y obtenemos una ecuación similar. Así, si sumamos estas dos ecuaciones conseguimos

$$d^2\varphi(x, y)(v, L_{xy}v)^2 = 2d(x, y)d^2(d)(x, y)(v, L_{xy}v)^2,$$

luego podemos afirmar que la condición (2.1) se tiene si y solo si

$$d^2(d)(x, y)(v, L_{xy}(v))^2 \leq 0 \tag{2.5}$$

para todo $v \in TM_x$.

Podemos escribir las condiciones (2.1) y (2.5) de otra forma

$$\frac{d^2}{dt^2}(d(\sigma_x(t), \sigma_y(t)))|_{t=0} \leq 0 \tag{2.6}$$

donde σ_x y σ_y son geodésicas con $\sigma_x(0) = x$, $\sigma_y(0) = y$, $\sigma'_x(0) = v$ y $\sigma'_y(0) = L_{xy}v$. La función $t \to h(t) := d(\sigma_x(t), \sigma_y(t))$ mide la distancia entre las geodésicas σ_x y σ_y (que tienen la misma velocidad y son paralelas en $t = 0$) evaluada en dos puntos que se mueven a lo largo de cada una de estas geodésicas. Vamos a demostrar que la segunda derivada $h''(0)$ es negativa (esto es, que se de la condición (2.6)) si y solo si M tiene derivada seccional positiva. En particular, combinando este hecho con la ecuación (2.4) (que nos dice que $h'(0) = 0$), vemos que la función $h(t)$ tiene un máximo local en $t = 0$ si y solo si M tiene curvatura seccional positiva. Esto corresponde a la noción de que dos geodésicas que son paralelas en sus puntos iniciales, van a acercarse si la curvatura es positiva, mientras que se separan si la curvatura es negativa.

Teorema 2.1. *La condición (2.6) (o equivalentemente (2.1), o (2.5)) se tiene en una variedad riemanniana M si y solo si M tiene curvatura seccional no negativa. De hecho se tiene que para la función $\varphi(x, y) = d(x, y)^2$ en $M \times M$:*

1. *Si M tiene curvatura seccional positiva, entonces*

$$d^2\varphi(x, y)(v, L_{xy}v)^2 \leq 0$$

para todo $v \in TM_x$, con $x, y \in M$ lo bastante cercanos para que $d(x, y) < min\{i_M(x), i_M(y)\}$.

2. *Si M tiene curvatura seccional negativa entonces*

$$d^2\varphi(x, y)(v, L_{xy}v)^2 \geq 0$$

para todo $v \in TM_x$, $x, y \in M$, tales que $d(x, y) < min\{i_M(x), i_M(y)\}$.

Demostración. Primero vamos a ver la parte (1) del Teorema.

Tomemos dos puntos $x_0, y_0 \in M$ con $d(x_0, y_0) < min\{i_M(x_0), i_M(y_0)\}$, y sea γ la única geodésica minimizante, parametrizada al arco, que une x_0 e y_0. Sea $l = d(x_0, y_0)$, la longitud de γ. Consideramos $\alpha(t, s)$, una variación de γ, que es una función regular $\alpha : [0, l] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$, tal que $\alpha(t, 0) = \gamma(t)$ para todo $t \in [0, l]$. Consideramos los funcionales de la longitud y de la energía de la variación, que sabemos que se definen por

$$L(s) = L(\alpha_s) = \int_0^l \|\alpha_s'(t)\| dt$$

y

$$E(s) = E(\alpha_s) = \int_0^l \|\alpha_s'(t)\|^2 dt,$$

donde α_s es la curva en la variación definida por $\alpha_s(t) = \alpha(t, s)$ para cada $t \in [0, l]$. Si usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, aplicándola a las funciones $f \equiv 1$ y $g(t) = \|\alpha_s'(t)\|$ en el intervalo $[0, l]$, obtenemos

$$L(s)^2 \leq lE(s),$$

para cada $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Sea $v \in TM_{x_0}$ un vector fijado, $w = L_{x_0 y_0} v$, su trasladado al TM_{y_0} a lo largo de γ, y las geodésicas $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}$ definidas como

$$\sigma_{x_0}(s) = exp_{x_0}(sv), \quad \sigma_{y_0}(s) = exp_{y_0}(sw).$$

Queremos calcular

$$d^2\varphi(x_0, y_0)(v, w)^2 = \frac{d^2}{ds^2}\varphi(\sigma_{x_0}(s), \sigma_{y_0}(s))|_{s=0},$$

donde $\varphi(x, y) = d(x, y)^2$.

Llamamos $\alpha_s : [0, l] \to M$ a la única geodésica minimizante que une el punto $\sigma_{x_0}(s)$ al punto $\sigma_{y_0}(s)$, (aunque ahora α_s no tiene porque estar necesariamente parametrizada al arco cuando $s \neq 0$,) y definimos $\alpha : [0, l] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ como $\alpha(t, s) = \alpha_s(t)$.

Por tanto α es una variación a través de geodésicas de $\gamma(t) = \alpha(t, 0)$ y según lo anterior, tenemos que

$$\varphi(\sigma_{x_0}(s), \sigma_{y_0}(s)) = L(s)^2 = lE(s),$$

y por tanto

$$d^2\varphi(x_0, y_0)(v, w)^2 = lE''(0). \tag{2.7}$$

Si llamamos $X(t) = \frac{\partial\alpha(t,0)}{\partial s}$ al campo variacional de α, entonces la fórmula de la segunda variación de Energia es la siguiente:

$$\frac{1}{2}E''(0) = -\int_0^l \langle X, X'' + R(\gamma', X)\gamma'\rangle dt + \langle X(t), X'(t)\rangle|_{t=0}^{t=l} + \langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(t, 0), \gamma'(t)\rangle|_{t=0}^{t=l}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{2}E''(0) = \int_0^l (\langle X', X'\rangle - \langle R(\gamma', X)\gamma', X\rangle) dt + \langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(t, 0), \gamma'(t)\rangle|_{t=0}^{t=l}$$

donde $X' = \nabla_{\gamma'(t)} X$, y $X'' = \nabla_{\gamma'(t)} X'$.

Como el campo variacional de una variación a través de geodésicas es un campo de Jacobi (como ya hemos observado anteriormente), y como los puntos x_0 e y_0 no son conjugados, el campo X es de hecho el único campo de Jacobi, que satisface que $X(0) = v$, $X(l) = w$, esto es, X es el único campo de vectores a lo largo de γ que satisface

$$X''(t) + R(\gamma'(t), X(t))\gamma'(t) = 0, \quad \text{y} \quad X(0) = v, \quad X(l) = w,$$

donde R es la curvatura de M. Por otro lado, como las curvas $s \to \alpha(0, s) = \sigma_{x_0}(s)$ y $s \to \alpha(l, s) = \sigma_{y_0}(s)$ son geodésicas, tenemos que

$$\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(t, 0), \gamma'(t)\rangle|_{t=0}^{t=l} = 0.$$

Con esto, podemos deducir, y simplificar las expresiones que teníamos para $\frac{1}{2}E''(0)$, obteniendo

$$\frac{1}{2}E''(0) = \langle X(l), X'(l)\rangle - \langle X(0), X'(0)\rangle \tag{2.8}$$

y

$$\frac{1}{2}E''(0) = \int_0^l (\langle X', X'\rangle - \langle R(\gamma', X)\gamma', X\rangle)dt. \tag{2.9}$$

La parte derecha de la expresión anterior, es la 'index form' y se denota por $I(X,X)$.

Ahora si recopilamos las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9), tenemos lo siguiente:

$$d^2\varphi(x_0,y_0)(v,w)^2 = 2l(\langle X(l), X'(l)\rangle - \langle X(0), X'(0)\rangle) =$$

$$= 2l\int_0^l (\langle X', X'\rangle - \langle R(\gamma', X)\gamma', X\rangle)dt.$$

De esta forma, la condición (1) de la proposición 2.1 (o lo que es lo mismo la condición (2.1)) se obtiene siempre que, para todo campo de Jacobi X a lo largo de γ con $X(0) = v$, $X(l) = w = L_{x_0y_0}v$, se tiene que

$$\langle X(l), X'(l)\rangle - \langle X(0), X'(0)\rangle \leq 0 \tag{2.10}$$

o lo que es equivalente

$$\int_0^l (\langle X', X'\rangle - \langle R(\gamma', X)\gamma', X\rangle)dt \leq 0$$

para los campos de Jacobi con las mismas condiciones.

Sabemos que X es el único campo de Jacobi con $X(0) = v$, $X(l) = w = L_{x_0y_0}(v)$. Definimos $Z = P(t)$, donde $P(t)$ es el transporte paralelo a lo largo de γ con $P(0) = v$, y por tanto $P(l) = w$. El campo Z en este caso no tiene porqué ser un campo de Jacobi, pero podemos usar que $Z'(t) = 0$ para todo t, por definición, ya que Z es un campo paralelo (ver Definición 1.8) , luego tenemos que

$$I(Z,Z) = \int_0^l (\langle Z', Z'\rangle - \langle R(\gamma', Z)\gamma', Z\rangle)dt = -\int_0^l \langle R(\gamma', Z)\gamma', Z\rangle dt \leq 0$$

ya que M tiene curvatura seccional no negativa. Y ahora usando el lema 1.37 que nos dice que entre los campos vectoriales de γ con los mismos puntos extremos, el que minimiza la 'index form' es precisamente el campo X, el único campo de Jacobi con esas condiciones, obtenemos que

$$\langle X(l), X'(l)\rangle - \langle X(0), X'(0)\rangle = I(X,X) \leq I(Z,Z) \leq 0,$$

y como la condición (2.10) es equivalente a la condición (2.1) obtenemos la parte (1) del Teorema 2.1.

Para la parte (2) del Teorema tenemos una demostración más sencilla, y además existen referencias para esto (ver [19]). Si tenemos que M tiene curvatura seccional no positiva, entonces tenemos que $\langle R(\gamma', X)\gamma', X\rangle \leq 0$, y usando las fórmulas anteriores deducimos que

$$d^2\varphi(x_0, y_0)(v, w)^2 = 2l \int_0^l (\langle X', X'\rangle - \langle R(\gamma', X)\gamma', X\rangle)dt \geq 2l \int_0^l \langle X', X'\rangle dt \geq 0,$$

lo cual nos demuestra la condición (2) de la proposición. En este caso no hemos usado que $w = L_{x_0y_0}v$, es decir, esto nos vale para v y w cualesquiera. (En el otro caso necesitábamos que Z fuera un campo paralelo y llevase v a w para aplicar que $Z'(t) = 0$). □

Aunque no podamos afirmar que $d^2\varphi(x,y)(v, L_{xy}v)^2 \leq 0$ cuando M tiene curvatura negativa, podemos acotar esta canditad por un término que depende de la distancia al cuadrado $d(x,y)^2$, cuando tengamos que la curvatura de M está acotada inferiormente. Esto nos será útil para algunos corolarios del capítulo 3.

Teorema 2.2. *Sea M una variedad riemanniana, y sea la función $\varphi(x,y) = d(x,y)^2$, definida en $M \times M$. Supongamos que la curvatura seccional K de M está acotada inferiormente, es decir $K \geq -K_0$. Entonces*

$$d^2\varphi(x,y)(v, L_{xy}v)^2 \leq 2K_0 d(x,y)^2\|v\|^2$$

para todo $v \in TM_x$ y $x, y \in M$ con $d(x,y) < min\{i_M(x), i_M(y)\}$.

Si tenemos que $K_0 = 0$ obtenemos la condición (1) del Teorema 2.1.

Demostración. Sean X, Z como en la demostración del Teorema anterior. Usando las fórmulas anteriores y el lema 1.37, tenemos que

$$d^2\varphi(x,y)(v, L_{xy}v)^2 = 2lI(X,X) \leq 2lI(Z,Z) = -2l \int_0^l \langle R(\gamma', Z)\gamma', Z\rangle dt$$

y usando la definición 1.28 podemos acotar esta expresión por

$$\leq 2l \int_0^l K_0|\gamma'(t) \wedge Z(t)|^2 dt \leq 2l \int_0^l K_0\|\gamma'(t)\|^2\|Z(t)\|^2 =$$

$$2l \int_0^l K_0\|v\|^2 dt = 2l^2 K_0\|v\|^2.$$

□

Capítulo 3

Cálculo subdiferencial de segundo orden en variedades

En este capítulos daremos las herramientas necesarias, para obtener los resultados de los capítulos siguientes. Así además de las definiciones de subdiferencial y superdiferencial (de viscosidad) de segundo orden, la definición de subdiferencial proximal y su relación con la de viscosidad, veremos lemas básicos y teoremas que utilizaremos en los capítulos 3 y 4.

3.1. Definiciones de subdiferencial de segundo orden y resultados clave

Comenzamos dando las nociones de subdiferencial y superdiferencial.

Definición 3.1. *Sea M una variedad riemanniana finito dimensional, y $f : M \to (-\infty, \infty]$ una función semicontinua inferior. Definimos el "subjet"de segundo orden de f en un punto $x \in M$ por*

$$J^{2,-}f(x) = \{(d\varphi(x), d^2\varphi(x)) : \varphi \in C^2(M, \mathbb{R}), f - \varphi \text{ alcanza un mínimo local en } x\}.$$

Si $(\zeta, A) \in J^{2,-}f(x)$, decimos que ζ es una subdiferencial de primer orden y A es una subdiferencial de segundo orden de f en x.

De la misma forma, para una función semicontinua superior $g : M \to [-\infty, \infty)$, definimos el "superjet"de segundo orden de f en x por

$$J^{2,+}f(x) = \{(d\varphi(x), d^2\varphi(x)) : \varphi \in C^2(M, \mathbb{R}), f - \varphi \text{ alcanza un máximo local en } x\}.$$

Veamos ahora que podemos dar dos definiciones equivalentes de las subdiferenciales, recogidas en la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Sea $f : M \to (-\infty, +\infty]$ una función semicontinua. Sean $\zeta \in TM_x^*, A \in \mathcal{L}_s^2(TM_x, \mathbb{R})$, $x \in M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $(\zeta, A) \in J^{2,-}f(x)$.
2. $f(\exp_x(v)) \geq f(x) + \langle \zeta, v\rangle_x + \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle_x + o(\|v\|^2)$.

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2): Si $(\zeta, A) \in J^{2,-}f(x)$, por definición existe $\varphi \in C^2(M, \mathbb{R})$ tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en x y $\zeta = d\varphi(x)$, $A = d^2\varphi(x)$. Podemos asumir que $\varphi(x) = f(x)$, así que tenemos

$$f(y) - \varphi(y) \geq 0$$

en un entorno de x. Consideremos la función $h(v) = \varphi(\exp_x(v))$ definida en un entorno de 0_x en TM_x. Tenemos que

$$h(v) = h(0) + \langle dh(0), v\rangle_x + \frac{1}{2}\langle d^2h(0)v, v\rangle_x + o(\|v\|^2).$$

Tomando $y = \exp_x(v)$ y combinando esto con la desigualdad anterior conseguimos

$$f(\exp_x(v)) \geq f(x) + \langle dh(0), v\rangle_x + \frac{1}{2}\langle d^2h(0)v, v\rangle_x + o(\|v\|^2),$$

así que solo necesitamos demostrar que $\zeta = dh(0)$ y que $A = d^2h(0)$. Para verlo, fijamos $v \in TM_x$ y consideramos la geodésica $\gamma(t) = \exp_x(tv)$ y la función $t \mapsto f(\gamma(t)) = h(tv)$. Así tenemos que

$$\frac{d}{dt}h(tv) = \langle d\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle,$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}h(tv) = \langle d^2\varphi(\gamma(t))\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + \langle d\varphi(\gamma(t)), \gamma''(t)\rangle = \langle d^2\varphi(\gamma(t))\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle$$

ya que γ es una geodésica, y por tanto $\gamma''(t) = 0$ para todo t. En particular, para $t = 0$, obtenemos

$$dh(0)(v) = \frac{d}{dt}h(tv)|_{t=0} = \langle d\varphi(x), v\rangle = \langle \zeta, v\rangle,$$

esto es que $dh(0) = \zeta$; y también

$$\langle d^2h(0)v, v\rangle = \frac{d^2}{dt^2}h(tv)|_{t=0} = \langle d^2\varphi(a)v, v\rangle = \langle Av, v\rangle,$$

que nos da $A = d^2h(0)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Definimos $F(v) = f(\exp_x(v))$ para v en un entorno de $0_x \in TM_x$. Tenemos que

$$F(v) \geq F(0) + \langle \zeta, v \rangle_x + \frac{1}{2}\langle Av, v \rangle_x + o(\|v\|^2).$$

Lo que queremos probar es bien conocido en el caso $M = \mathbb{R}^n$, y por tanto existe $\psi : TM_x \to \mathbb{R}$ tal que $F - \psi$ alcanza un mínimo en 0 y $d\psi(0) = \zeta$, $d^2\psi(0) = A$. Como los mínimos se conservan por la composición con difeomorfismos, la función $\varphi := \psi \circ \exp_x^{-1}$, definida en un entorno abierto de $x \in M$, tiene la propiedad de que $f - \varphi = (F - \psi) \circ \exp_x^{-1}$ alcanza un mínimo local en $x = \exp_x^{-1}(0)$. Además, de acuerdo con la implicación anterior (1) $\Longrightarrow$ (2), tenemos que

$$d\varphi(x) = d\psi(0), \text{ and } d^2\varphi(x) = d^2\psi(0),$$

así que obtenemos $d\varphi(x) = \zeta$ y $d^2\varphi(x) = A$. Por último, usando particiones diferenciables de clase C^2 de la unidad podemos extender φ de un entorno abierto de x a toda M. □

Corolario 3.3. *Sea $f : M \to (-\infty, +\infty]$ una función semicontinua inferior, y consideremos $\zeta \in TM_x^*, A \in \mathcal{L}_s^2(TM_x, \mathbb{R})$, $x \in M$. Entonces*

$$(\zeta, A) \in J^{2,-}f(x) \iff (\zeta, A) \in J^{2,-}F(0_x),$$

donde $F = f \circ \exp_x$.

Haciendo uso de la caracterización anterior, se pueden extender fácilmente muchas propiedades conocidas de los conjuntos $J^{2,-}f(x)$ y $J^{2,+}f(x)$ desde el ámbito euclídeo al riemanniano. Por ejemplo, se puede ver inmediatamente que $J^{2,-}f(x)$ y $J^{2,+}f(x)$ son subconjuntos convexos de $TM_x^* \times \mathcal{L}_s(TM_x)$. Estos no son cerrados necesariamente, pero si se fija un $\zeta \in TM_x^*$ entonces el conjunto $\{A : (\zeta, A) \in J^{2,-}f(x)\}$ es cerrado.

Observación 3.4. Una propiedad útil que se extiende del contexto euclídeo al riemanniano es la siguiente: si ψ es C^2 en un entorno de x entonces

$$J^{2,-}(f - \psi)(x) = \{\big(\zeta - d\psi(x),\, A - d^2\psi(x)\big) \;:\; (\zeta, A) \in J^{2,-}f(x)\}.$$

Ahora definiremos los cierres de estas aplicaciones conjunto-valoradas, pero antes recordemos lo siguiente:

Definición 3.5. *Una sucesión (A_n) con $A_n \in \mathcal{L}_s(TM_{x_n})$ se dice que converge a $A \in \mathcal{L}_s(TM_x)$ cuando x_n converge a x en M y para cada campo vectorial V definido en un entorno de x tenemos que $\langle A_n V(x_n), V(x_n)\rangle$ converge a $\langle AV(x), V(x)\rangle$. De igual forma, una sucesión (ζ_n) con $\zeta_n \in TM^*_{x_n}$ converge a ζ siempre que $x_n \to x$ y $\langle \zeta_n, V(x_n)\rangle \to \langle \zeta, V(x)\rangle$ para cada campo vectorial V definido en un entorno abierto de x.*

Definición 3.6. Sea f una función semicontinua inferior definida en una variedad riemanniana M, y $x \in M$. Definimos

$$\overline{J}^{2,-}f(x) = \{(\zeta, A) \in TM^*_x \times \mathcal{L}_s(TM_x) \,:\, \exists (x_n, \zeta_n, A_n) \in M \times TM^*_{x_n} \times \mathcal{L}_s(TM_{x_n})$$
$$t.q.\ (\zeta_n, A_n) \in J^{2,-}f(x_n),\ (x_n, f(x_n), \zeta_n, A_n) \to (x, f(x), \zeta, A)\},$$

y para una función semicontinua superior g en M definimos $\overline{J}^{2,+}g(x)$ de forma análoga,

$$\overline{J}^{2,+}g(x) = \{(\zeta, A) \in TM^*_x \times \mathcal{L}_s(TM_x) \,:\, \exists (x_n, \zeta_n, A_n) \in M \times TM^*_{x_n} \times \mathcal{L}_s(TM_{x_n})$$
$$t.q.\ (\zeta_n, A_n) \in J^{2,+}g(x_n),\ (x_n, g(x_n), \zeta_n, A_n) \to (x, g(x), \zeta, A)\}$$

Para establecer el análogo del corolario 3.3 para las adherencias de esos sub- y superjet, usaremos el siguiente resultado.

Lema 3.7. *Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función C^2, y definamos $\psi = \varphi \circ exp_x$ en un entorno de un punto $0 \in TM_x$. Sea $\widetilde{V}$ un campo vectorial definido en un entorno de 0 de TM_x, y consideremos el campo vectorial definido por $V(y) = dexp_x(w_y)(\widetilde{V}(w_y))$ en un entorno de x, donde $w_y := exp_x^{-1}(y)$, y sea*

$$\sigma_y(t) = exp_x(w_y + t\widetilde{V}(w_y)).$$

Entonces tenemos que

$$D^2\psi(\widetilde{V}, \widetilde{V})(w_y) = D^2\varphi(V, V)(y) + \langle \nabla\varphi(y), \sigma''_y(0)\rangle.$$

Observamos que $\sigma''_x(0) = 0$, luego, cuando $y = x$ tenemos

$$d^2\psi(0)(v, v) = d^2\varphi(x)(v, v)$$

para todo $v \in TM_x$.

Demostración. Fijamos un y cerca de x. Tenemos que

$$\frac{d}{dt}\psi(w_y + t\widetilde{V}) = \frac{d}{dt}\varphi(\sigma_y(t)) = \langle \nabla\varphi(\sigma_y(t)), \sigma'_y(t)\rangle,$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}\psi(w_y+t\widetilde{V}(w_y)) = \frac{d^2}{dt^2}\varphi(\sigma_y(t)) = \langle \nabla_{\sigma'_y(t)}\nabla\varphi(\sigma_y(t)), \sigma'_y(t)\rangle + \langle \nabla\varphi(\sigma_y(t)), \sigma''_y(t)\rangle.$$

Vemos que $\sigma'_y(0) = V(y)$, entonces tomando $t = 0$ conseguimos la igualdad de la afirmación. Observamos que cuando $y = x$ la curva σ_x es una geodésica, así que $\sigma''_x(0) = 0$. $\square$

Ahora podemos probar:

Proposición 3.8. *Sea $f : M \to (-\infty, +\infty]$ una función semicontinua inferior, y considera $\zeta \in TM^*_x, A \in \mathcal{L}^2_s(TM_x, \mathbb{R})$, $x \in M$. Entonces*

$$(\zeta, A) \in \overline{J}^{2,-} f(x) \iff (\zeta, A) \in \overline{J}^{2,-}(f \circ \exp_x)(0_x).$$

Demostración. ($\Rightarrow$): Si $(\zeta, A) \in \overline{J}^{2,-} f(x)$ existe una sucesión $x_n \to x$ y $(\zeta_n, A_n) \in J^{2,-}f(x_n)$ tal que $\zeta_n \to \zeta$, $A_n \to A$, y $f(x_n) \to f(x)$. Tomamos $\varphi_n \in C^2(M)$ tal que $f - \varphi_n$ alcanza un mínimo en x_n y $\zeta_n = d\varphi_n(x_n)$, $A_n = d^2\varphi_n(x_n)$. Definimos $\psi_n = \varphi_n \circ exp_x$ en un entorno de 0 en TM_x, y $v_n = exp_x^{-1}(x_n)$. Es obvio que $f \circ exp_x - \psi_n$ alcanza un mínimo en v_n. Tenemos entonces que $(d\psi_n(v_n), d^2\psi_n(v_n)) \in J^{2,-}(f \circ exp_x)(v_n)$, y como $v_n \to 0$ y $f \circ exp_x(v_n) \to f(x)$, solo nos falta demostrar que $d\psi_n(v_n) \to \zeta$ y $d^2\psi_n(v_n) \to A$.

Tomamos un campo vectorial V en un entorno de x en M y se define el correspondiente $\widetilde{V}$ en un entorno de 0 en TM_x, por

$$\widetilde{V}(w_y) = dexp_x^{-1}(y)V(y)$$

donde $w_y = exp_x^{-1}(y)$ (o lo que es equivalente

$$V(y) = dexp_x(w_y)(\widetilde{V}(w_y)).)$$

Tenemos que

$$\langle d\psi_n(v_n), \widetilde{V}(v_n)\rangle = \langle d\varphi_n(x_n) \circ dexp_x(v_n), \widetilde{V}(v_n)\rangle = \langle d\varphi_n(x_n), V(x_n)\rangle,$$

(ya que $\langle d\varphi_n(x_n) \circ dexp_x(v_n), \widetilde{V}(v_n)\rangle = d\varphi_n(x_n) \circ dexp_x(v_n)(\widetilde{V}(v_n))$). Luego con lo anterior obtenemos que

$$\langle d\psi_n(v_n), \widetilde{V}(v_n)\rangle = \langle \zeta_n, V(x_n)\rangle \to \langle \zeta, V(x)\rangle = \langle \zeta, \widetilde{V}(0)\rangle,$$

lo que demuestra que $d\psi_n(v_n) \to \zeta$. Por otro lado, usando el lema anterior, tenemos también que

$$d^2\psi_n(v_n)(\widetilde{V}(v_n), \widetilde{V}(v_n)) = A_n(V(x_n), V(x_n)) + \langle \zeta_n, \sigma''_{x_n}(0)\rangle,$$

donde $\sigma_y(t) = exp_x(w_y + t\widetilde{V}(w_y))$.

Como la aplicación $y \to \sigma_y''(0)$ define un campo vectorial regular en un entorno de x en M (y en particular $\sigma_{x_n}''(0) \to \sigma_x''(0) = 0$ cuando $n \to \infty$) y además $A_n \to A$ y $\zeta_n \to \zeta$, conseguimos, tomando límites cuando $n \to \infty$ en la igualdad anterior, que

$$d^2\psi_n(v_n)(\widetilde{V}(v_n), \widetilde{V}(v_n)) \to A(V(x), V(x)) + 0 = A(\widetilde{V}(0), \widetilde{V}(0)),$$

lo que nos da que $d^2\psi_n(v_n) \to A$.

($\Leftarrow$) Si $(\zeta, A) \in \overline{J}^{2,-}(f \circ exp_x)(0)$ existe $v_n \to 0$ y $(\widetilde{\zeta_n}, \widetilde{A_n}) \in J^{2,-}(f \circ exp_x)(v_n)$ tal que $\widetilde{\zeta_n} \to \zeta$, $\widetilde{A_n} \to A$, $f(x_n) \to f(x)$, donde $x_n = exp_x(v_n)$. Tomamos $\psi_n \in C^2(TM_x)$ tal que $f \circ exp_x - \psi_n$ alcanza un mínimo en v_n y $\widetilde{\zeta_n} = d\psi_n(v_n)$, $\widetilde{A_n} = d^2\psi_n(v_n)$. Definimos $\varphi_n = \psi_n \circ exp_x^{-1}$ en un entorno de x en M. Entonces $f - \varphi_n$ alcanza un mínimo en x_n, así que $(d\varphi_n(x_n), d^2\varphi_n(x_n)) \in J^{2,-}f(x_n)$, y sólo nos falta demostrar que $d\varphi_n(x_n) \to \zeta$ y $d^2\varphi_n(x_n) \to A$. Tomamos un campo vectorial V en un entorno de x en M, y definimos un campo vectorial correspondiente $\widetilde{V}$ en un entorno de 0 en TM_x de la siguiente forma

$$\widetilde{V}(w_y) = dexp_x^{-1}(y)(V(y)),$$

donde $w_y = exp_x^{-1}(y)$. Ahora tenemos que

$$\langle d\psi_n(v_n), \widetilde{V}(v_n)\rangle = \langle d\varphi_n(x_n), V(x_n)\rangle,$$

del que deducimos que $d\varphi_n(x_n) \to \zeta$; y también, usando este hecho y el lema anterior, tenemos que

$$d^2\varphi_n(V(x_n), V(x_n)) = \widetilde{A}_n(\widetilde{V}(v_n), \widetilde{V}(v_n)) - \langle d\varphi_n(x_n), \sigma_{x_n}''(0)\rangle \to$$
$$\to \langle AV(x), V(x)\rangle - \langle \zeta, \sigma_x''(0)\rangle = \langle AV(x), V(x)\rangle - 0,$$

lo que concluye la prueba. $\square$

Observación 3.9. Se puede ver, como en el caso de $J^{2,-}f(x)$, que si ψ es C^2 en un entorno de x entonces

$$\overline{J}^{2,-}(f-\psi)(x) = \{\big(\zeta - d\psi(x),\, A - d^2\psi(x)\big) \,:\, (\zeta, A) \in \overline{J}^{2,-}f(x)\}.$$

Y también, por tanto, se tiene la misma propiedad para $\overline{J}^{2,+}$.

Ahora extendemos la noción de solución de viscosidad a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en una variedad riemanniana.

Vamos a considerar funciones definidas en el espacio $\mathcal{X}$, que como vimos en los preliminares era

$$\mathcal{X} = \{(x, r, \zeta, A) : x \in M, r \in \mathbb{R}, \zeta \in TM_x, A \in \mathcal{L}_s^2(TM_x)\}$$

Definición 3.10. Sea M una variedad riemanniana, y $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Decimos que una función semicontinua superior $u : M \to \mathbb{R}$ es una subsolución de viscosidad de la ecuación $F = 0$ siempre que

$$F(x, u(x), \zeta, A) \leq 0$$

para todo $x \in M$ y $(\zeta, A) \in J^{2,+}u(x)$. De igual forma, una supersolución de viscosidad de $F = 0$ en M es una función semicontinua inferior $u : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, u(x), \zeta, A) \geq 0$$

para todo $x \in M$ y $(\zeta, A) \in J^{2,-}u(x)$. Si u es a la vez una subsolución de viscosidad y una supersolución de $F = 0$, decimos que u es una solución de viscosidad de $F = 0$ en M.

Observación 3.11. *Si u es una solución de $F \leq 0$ y F es continua entonces $F(x, u(x), \zeta, A) \leq 0$ para cada $(\zeta, A) \in \overline{J}^{2,-}u(x)$. Una observación similar se aplica a soluciones de $F \geq 0$ y soluciones de $F = 0$.*

Lema 3.12. *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $u \in USC(\overline{\Omega})$, $v \in LSC(\overline{\Omega})$ y*

$$M_\alpha = \sup_{\Omega\times\Omega}(u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}d(x, y)^2)$$

para $\alpha > 0$. Supongamos que $M_\alpha < \infty$ para α grande y sea (x_α, y_α) tal que

$$\lim_{\alpha\to\infty}(M_\alpha - (u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}d(x_\alpha, y_\alpha)^2)) = 0.$$

Entonces se tiene lo siguiente

$$\left\{ \begin{array}{c} (i) \lim_{\alpha\to\infty} \alpha d(x_\alpha, y_\alpha)^2 = 0 \ y \\ (ii) \lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha = u(\widehat{x}) - v(\widehat{x}) = sup_\Omega(u(x) - v(x)) \\ \text{siempre y cuando } \widehat{x} \in \Omega \text{ es un punto límite de } x_\alpha \text{ cuando } \alpha \to \infty. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Demostración. Sea $\delta_\alpha = M_\alpha - (u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}d(x_\alpha, y_\alpha)^2)$ tal que $\delta_\alpha \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$. Como $d(.,.)^2 \geq 0$, M_α decrece cuando se incrementa α y existe $\lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha$ (es finito por suposición). Además

$$M_{\frac{\alpha}{2}} \geq u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}d(x_\alpha, y_\alpha)^2 + \frac{\alpha}{4}d(x_\alpha, y_\alpha)^2 \geq$$

$$\geq M_\alpha - \delta_\alpha + \frac{\alpha}{4}d(x_\alpha, y_\alpha)^2$$

así que $2(M_{\frac{\alpha}{2}} - M_\alpha + \delta_\alpha) \geq \frac{\alpha}{2} d(x_\alpha, y_\alpha)^2$ lo que muestra que $\frac{\alpha}{2} d(x_\alpha, y_\alpha)^2 \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$. Supongamos ahora que $\alpha_n \to \infty$ y que $y_{\alpha_n} \to \widehat{y} \in \Omega$ y $x_{\alpha_n} \to \widehat{x} \in \Omega$. Entonces $\frac{d(x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n})^2}{2} \to 0$ y por la semicontinuidad inferior $\frac{d(\widehat{x}, \widehat{y})^2}{2} = 0$.

Como

$$u(x_{\alpha_n}) - v(y_{\alpha_n}) - \alpha_n \frac{d(x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n})^2}{2} \geq M_{\alpha_n} - \delta_{\alpha_n} \geq \sup_{\{x \in \Omega\}} (u(x) - v(x)) - \delta_{\alpha_n}$$

y $u - v$ es semicontinua superior se tiene el resultado (3.1). $\square$

Teorema 3.13. *Sean $\Omega_i \subset M_i$ abiertos y $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n \subset M_1 \times \ldots \times M_n = M$. Sean $u_i \in USC(\Omega_i)$, $\varphi \in C^2$ en Ω y*

$$\omega(x) = u_1(x_1) + \ldots + u_n(x_n).$$

Sea $(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_n})$ un máximo local de $\omega - \varphi$ en Ω. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen P_i formas bilineales $P_i : TM_{\hat{x_i}} \times TM_{\hat{x_i}} \to \mathbb{R}$ para $i = 1 \ldots n$, tal que

$$(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\hat{x}), P_i) \in \overline{J}^{2+} u_i(\hat{x_i})$$

y

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|A\|\right) I \leq \begin{pmatrix} P_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & P_n \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2$$

donde $A = d^2\varphi(\widehat{x}) \in \mathcal{L}_s^2(TM_{\widehat{x}}, \mathbb{R})$.

Recordemos que, por la definición dada en el primer capítulo, para $\zeta \in TM^*$, tenemos que la expresión para su norma es:

$$\|\zeta\|_x = sup\{\langle \zeta, v \rangle_x : v \in TM_x, \|v\|_x \leq 1\}.$$

De forma análoga,

$$\|A\|_x = sup\{|\langle Av, v \rangle_x| : v \in TM_x, \|v\|_x \leq 1\} = sup\{|\lambda| : \lambda \text{ es un autovalor de } A\ \}.$$

Demostración. El resultado es conocido en el caso de que todas las variedades M_i fueran espacios euclídeos (ver [10]). Veamos como reducimos el problema a la situación euclídea y así aplicaremos el resultado probado en [10].

Tomamos entornos de x_i lo suficientemente pequeños, para que podamos asumir que los conjuntos Ω_i son imágenes difeomorfas de bolas (en plano euclídeo) por medio de las aplicaciones exponenciales de la forma $exp_{\widehat{x}_i} : B(0, r_i) \to \Omega_i = B(\widehat{x}_i, r_i)$, y que la exponencial $exp_{\widehat{x}}$ lleva difeomórficamente una bola en

$TM_{\widehat{x}}$ en una bola que contiene a Ω. Esta aplicación exponencial que lleva la primera bola en $TM_{\widehat{x}} = (TM_1)_{\widehat{x}_1} \times \ldots \times (TM_k)_{\widehat{x}_k}$ en M se define de la siguiente forma:

$$exp_{\widehat{x}}(v_1, \ldots, v_k) = (exp_{\widehat{x}_1}(v_1), \ldots, exp_{\widehat{x}_k}(v_k)).$$

Definimos funciones en subconjuntos abiertos de los espacios euclídeos de la forma $\widetilde{\omega}(v) = \omega(exp_{\widehat{x}}(v))$ y $\widetilde{u}_i(v_i) = u_i(exp_{\widehat{x}_i}(v_i))$. Tenemos que $\widetilde{\omega}(v_1, \ldots, v_k) = \widetilde{u}_1(v_1) + \ldots + \widetilde{u}_k(v_k)$, y que $0_{\widehat{x}} = (0_{\widehat{x}_1}, \ldots, 0_{\widehat{x}_k})$ es un máximo local de $\widetilde{\omega} - \psi$, donde $\psi = \varphi \circ exp_{\widehat{x}}$.

Aplicando ahora el resultado que es cierto para espacios euclídeos, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existen formas bilineales $P_i \in \mathcal{L}^2_s((TM_i)_{\widehat{x}_i}, \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, k$, tales que

$$(\frac{\partial}{\partial v_i}\psi(0_{\widehat{x}}), P_i) \in \overline{J}^{2,+}\widetilde{u}_i(0_{\widehat{x}_i})$$

para $i = 1, \ldots, k$, y la matriz diagonal por bloques satisface

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|A\|\right) I \leq \begin{pmatrix} P_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & P_n \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2$$

donde $A = D^2\psi(0_{\widehat{x}}) \in \mathcal{L}^2_s(TM_{\widehat{x}}, \mathbb{R})$.

Por la proposición 3.8, sabemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\psi(0_{\widehat{x}}), P_i\right) \in \overline{J}^{2,+}\widetilde{u}_i(0_{\widehat{x}_i}) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\psi(0_{\widehat{x}}), P_i\right) \in \overline{J}^{2,+}u_i(\widehat{x}_i),$$

y solo falta ver para conseguir el resultado que

$$\frac{\partial}{\partial v_i}\psi(0_{\widehat{x}}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(\widehat{x}) \text{ y } d^2\psi(0_{\widehat{x}}) = d^2\varphi(\widehat{x}),$$

pero esto es cierto por el lema 3.7

□

En particular lo hemos demostrado para $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

Teorema 3.14. *Sean $\Omega_i \subset M_i$ abiertos (finito-dimensionales) y $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset M_1 \times M_2 = M$. Sea $u \in USC(\Omega_1)$,$v \in LSC(\Omega_2)$ y $\varphi \in C^2$ en Ω y sea*

$$\omega(x) = u(x) - v(y), \text{ para } (x, y) \in \Omega$$

Sea $(\hat{x}, \hat{y})$ un máximo local de $\omega - \varphi$ en Ω. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen P y Q formas bilineales, $P : TM_{\hat{x}} \times TM_{\hat{x}} \to \mathbb{R}$ y $Q : TM_{\hat{y}} \times TM_{\hat{y}} \to \mathbb{R}$, tales que

$$(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\hat{x}), P) \in \overline{J}^{2+}u(\hat{x}) \text{ y } (\frac{\partial}{\partial y}\varphi(\hat{y}), Q) \in \overline{J}^{2-}v(\hat{y})$$

y

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\|A\|\right) I \leq \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \leq A+\varepsilon A^2$$

donde $A = d^2\varphi(\hat{x},\hat{y})$.

Con estos resultados podemos probar el principio del máximo en Variedades (o el principio de Comparación) que lo veremos en el siguiente capítulo. También probaremos con ellos (en este mismo capítulo) la regla fuzzy de la suma para subdiferenciales de segundo orden.

3.2. Regla Fuzzy de la suma

El resultado al que llegan R. Deville y El Haddad en [12], lo trasladamos para variedades riemannianas, obteniendo en cierto modo un resultado "híbrido", ya que aparecen no sólo los conjuntos $J^{2,+}$ sino sus cierres $\overline{J}^{2,+}$.

Teorema 3.15. *Sea* M *una variedad riemanniana con curvatura seccional acotada inferiormente. Sean* u_1, u_2 *funciones semicontinuas superiores, tales que* $u_i : M \to \mathbb{R}$. *Sea* $x_0 \in M$, *y* $(\zeta, Q) \in J^{2,+}(u_1+u_2)(x_0)$. *Entonces para todo* $\varepsilon > 0$, *existen* $(\zeta_1, Q_1) \in \overline{J}^{2,+}u_1(x_1)$ *y* $(\zeta_2, Q_2) \in \overline{J}^{2,+}u_2(x_2)$ *tales que*
i) $d(x_1,x_0) < \varepsilon$ *y* $d(x_2,x_0) < \varepsilon$
ii)$|u_1(x_1) - u_1(x_0)| < \varepsilon$ *y* $|u_2(x_2) - u_2(x_0)| < \varepsilon$
iii)$\|\zeta_1 + L_{x_2x_1}(\zeta_2) - L_{x_0x_1}(\zeta)\|_{x_1} < \varepsilon$ *y* $\|Q_1 + L_{x_2x_1}(Q_2) - L_{x_0x_1}(Q)\|_{x_1} < \varepsilon$.

Demostración. **Primer paso**
Si suponemos que u_1+u_2 tiene un máximo local estricto en $x_0 \in M$, entonces vamos a demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existen $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, $(\zeta_1, Q_1) \in \overline{J}^{2,+}u_1(x_1)$ y $(\zeta_2, Q_2) \in \overline{J}^{2,+}u_2(x_2)$, tales que
i)$d(x_1,x_0) < \varepsilon$ y $d(x_2,x_0) < \varepsilon$
ii)$|u_1(x_1) - u_1(x_0)| < \varepsilon$ y $|u_2(x_2) - u_2(x_0)| < \varepsilon$
iii)$\|\zeta_1 + L_{x_2x_1}(\zeta_2)\|_{x_1} < 2\varepsilon$ y $\|Q_1 + L_{x_2x_1}(Q_2)\|_{x_1} < K_0\varepsilon$ donde $-K_0 \leq 0$ es la cota inferior de la curvatura. Podemos elegir un $r > 0$ tal que

$$(u_1+u_2)(x_0) > (u_1+u_2)(x) \quad \text{para } x \in \overline{B(x_0,r)} \setminus \{x_0\} = \mathcal{K}.$$

Consideramos

$$\omega_\alpha(x,y) = u_1(x) + u_2(y) - \frac{\alpha}{2} d(x,y)^2$$

para $\alpha > 0$ y $(x, y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Por el lema 3.12, existen sucesiones x_α, y y_α, tales que $\alpha d(x_\alpha, y_\alpha)^2 \to 0$,

$$\lim y_\alpha = \lim x_\alpha = \overline{x},$$

$$\lim u_1(x_\alpha) = u_1(\overline{x}), \quad \lim u_2(y_\alpha) = u_2(\overline{x})$$

y

$$u_1(\overline{x}) + u_2(\overline{x}) = \sup_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}} u_1(x) + u_2(y)$$

y como x_0 es un máximo local estricto, se tiene que $\overline{x} = x_0$. Luego existe $C > 0$ tal que para $\alpha_0 > C$ (grande) tenemos que

a) $\alpha_0 d(x_{\alpha_0}, y_{\alpha_0})^2 < \varepsilon$

y tambien

b) $d(x_\alpha, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(y_\alpha, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$

c)$|u_1(x_\alpha) - u_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|u_2(y_\alpha) - u_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora podemos aplicar el teorema 3.14 para $\widehat{x} = (x_{\alpha_0}, y_{\alpha_0})$, $\omega = \omega_{\alpha_0}$ para un $\alpha_0 > C$. Por tanto existen

$$(-\alpha_0 exp^{-1}_{x_{\alpha_0}}(y_{\alpha_0}), B_1) \in \overline{J}^{2,+} u_1(x_{\alpha_0})$$

y

$$(-\alpha_0 exp^{-1}_{y_{\alpha_0}}(x_{\alpha_0}), B_2) \in \overline{J}^{2,+} u_2(y_{\alpha_0})$$

tales que

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|A\|\right) I \leq \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2,$$

donde $A = D^2(\frac{\alpha_0}{2} d(x_{\alpha_0}, y_{\alpha_0})^2)$.

Llamamos $x_1 = x_{\alpha_0}$ y $x_2 = y_{\alpha_0}$.

Ahora, como podemos acotar

$$(A + \varepsilon A^2)(v, L_{x_1 x_2} v)^2 \leq \alpha_0 K_0 d(x_1, x_2)^2 \|v\|^2$$

entonces tenemos que para este tipo de vectores

$$B_1 + L_{x_2 x_1}(B_2) \leq \alpha_0 K_0 d(x_1, x_2)^2 I_{x_1}$$

y por lo anterior

$$B_1 + L_{x_2 x_1}(B_2) \leq \varepsilon K_0 I_{x_1}$$

y si tomamos

$$\zeta_1 = -\alpha_0 exp^{-1}_{x_1}(x_2) \quad \text{ y } \zeta_2 = -\alpha_0 exp^{-1}_{x_2}(x_1)$$

$$Q_1 = -L_{x_2 x_1}(B_2) + \alpha_0 K_0 d(x_1, x_2)^2 I_{x_1} \quad \text{ y } \quad Q_2 = B_2$$

Por la anterior desigualdad sabemos que $(\zeta_1, Q_1) \in \overline{J}^{2,+} u_1(x_1)$. Luego por tanto tenemos que

$$\|\zeta_1 + L_{x_2 x_1}(\zeta_2)\|_{x_1} = 0$$

y

$$\|Q_1 + L_{x_2x_1}(Q_2)\|_{x_1} = \|\alpha_0 K_0 d(x_1,x_2)^2 I\| \leq K_0\varepsilon.$$

Segundo Paso

Tenemos ahora un $x_0 \in M$, un par $(\zeta, Q) \in J^{2+}(u_1+u_2)(x_0)$, y sea $0<\varepsilon<1$ fijo. Por definición de J^{2+}, existe una función φ, C^2, $\varphi : M \to \mathbb{R}$, tal que $u_1 + u_2 - \varphi$ tiene un máximo local en x_0 para $\zeta = \varphi'(x_0)$ y $Q = \varphi''(x_0)$.

Sean

$$\widetilde{u_1} = u_1 - \varphi - \left(\frac{\varepsilon}{4}\right) d(.,x_0)^2 \text{ y } u_2,$$

que cumplen las condiciones del primer paso. Entonces obtenemos que existen $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, $(\widetilde{\zeta_1}, \widetilde{Q_1}) \in \overline{J}^{2,+}\widetilde{u_1}(x_1)$ y $(\zeta_2, Q_2) \in \overline{J}^{2,+}u_2(x_2)$ tales que

$$d(x_1,x_0) < \varepsilon \quad d(x_2,x_0) < \varepsilon$$

$$|\widetilde{u_1}(x_1) - \widetilde{u_1}(x_0)| < \varepsilon \quad |u_2(x_2) - u_2(x_0)| < \varepsilon$$

$$\|\widetilde{\zeta_1} + L_{x_2x_1}(\zeta_2)\|_{x_1} = 0 \quad \|\widetilde{Q_1} + L_{x_2x_1}(Q_2)\|_{x_1} < K_0\varepsilon.$$

Ahora ponemos que

$$\widetilde{\zeta_1} = \zeta_1 - \varphi'(x_1) + L_{x_0x_1}(\frac{\varepsilon}{2} exp_{x_0}^{-1}(x_1))$$

ya que $\frac{\partial d(.,x_0)}{\partial x}(x_1) = \frac{-exp_{x_0}^{-1}}{d(x_1,x_0)}$, y

$$\widetilde{Q_1} = Q_1 - \varphi''(x_1) - L_{x_0x_1}(\frac{\varepsilon}{4} D^2(d^2(x_1,x_0)))$$

con $(\zeta_1, Q_1) \in \overline{J}^{2,+}u_1(x_1)$ (aplicando la observación 3.9).

Por tanto veamos que obtenemos las desigualdades para el teorema. Sabiendo que se cumple el primer paso, y teniendo en cuenta las definiciones anteriores, tenemos que

$$\|Q_1 + L_{x_2x_1}(Q_2) - \varphi''(x_1) - L_{x_0x_1}(\frac{\varepsilon}{4} D^2(d^2(x_1,x_0)))\|_{x_1} < K_0\varepsilon$$

luego por ser φ una función C^2, existe δ', constante que depende del punto x_0, tal que

$$|\varphi(x_0) - \varphi(x_1)| < \delta'\varepsilon, \quad \|\varphi''(x_1) - L_{x_0x_1}\varphi''(x_0)\|_{x_1} < \delta'\varepsilon \quad \text{y} \quad \|\varphi'(x_1) - L_{x_0x_1}(\varphi'(x_0))\|_{x_1} < \delta'\varepsilon$$

para x_1, x_0 tales que $d(x_0,x_1) < \varepsilon$. Por tanto

$$\|Q_1 + L_{x_2x_1}(Q_2) - L_{x_0x_1}(\varphi''(x_0)) - L_{x_0x_1}(\frac{\varepsilon}{4} D^2(d^2(x_1,x_0)))\|_{x_1} \leq K_0\varepsilon + \delta'\varepsilon.$$

Por otro lado podemos acotar

$$\|\frac{\varepsilon}{4} D^2(d^2(x_1,x_0))\|_{x_0} < \varepsilon$$

ya que $d(x_1, x_0) < \varepsilon$,$\|\frac{\partial d(.,x_0)}{\partial x}(x_1)\| = 1$ y $\|D^2(d(., x_0))(x_1)\| = \frac{1}{d(x_0,x_1)}$, y por tanto obtenemos:

$$\|L_{x_1 x_0}(Q_1) + L_{x_2 x_0}(Q_2) - \varphi''(x_0)\|_{x_0} \leq (1 + \delta')\varepsilon + K_0\varepsilon.$$

Por otra parte tenemos que

$$\|\zeta_1 + L_{x_2 x_1}(\zeta_2) - \varphi'(x_1) + L_{x_0 x_1}(\frac{\varepsilon}{4} exp_{x_0}^{-1}(x_1))\|_{x_1} = 0$$

Como φ es C^2, existe un δ' tal que

$$\|\zeta_1 + L_{x_2 x_1}(\zeta_2) - L_{x_0 x_1}(\varphi'(x_0)) + L_{x_0 x_1}(\frac{\varepsilon}{4} exp_{x_0}^{-1}(x_1))\|_{x_1} < \varepsilon\delta'$$

y además como podemos acotar

$$\|\frac{\varepsilon}{2} exp_{x_0}^{-1}(x_1)\|_{x_0} \leq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Luego en total tenemos que

$$\|\zeta_1 + L_{x_2 x_1}(\zeta_2) - L_{x_0 x_1}(\varphi'(x_0))\|_{x_1} \leq \delta'\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Además

$$|u_1(x_1) - u_1(x_0)| = |\widetilde{u_1}(x_1) - \varphi(x_1) + \frac{\varepsilon}{4} d(x_1, x_0)^2 - \widetilde{u_1}(x_0) + \varphi(x_0)| \leq$$

$$|\widetilde{u_1}(x_1) - \widetilde{u_1}(x_0)| + |\varphi(x_0) - \varphi(x_1)| + \frac{\varepsilon}{4} d(x_1, x_0)^2 < \varepsilon + \delta'\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{4}.$$

Ahora tomamos $k = 1 + \delta' + K_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ que solo depende del ε escogido , de x_0 y del resto de datos dados. Pues bien con esta constante podemos afirmar que:

i)$d(x_1, x_0) < k\varepsilon$ y $d(x_2, x_0) < k\varepsilon$

ii)$|u_1(x_1) - u_1(x_0)| < k\varepsilon$ y $|u_2(x_2) - u_2(x_0)| < k\varepsilon$

iii)$\|L_{x_1 x_2}(\zeta_1) + L_{x_2 x_0}(\zeta_2) - \zeta\|_{x_0} < k\varepsilon$ y $\|L_{x_1 x_0}(Q_1) + L_{x_2 x_0}(Q_2) - Q\|_{x_0} < k\varepsilon$.

Luego se puede repetir todo el razonamiento, utilizando $\frac{\varepsilon}{k}$ y así obtendríamos lo que afirma el enunciado del teorema. □

3.3. Convergencia en $\mathbb{R}^n$

Proposición 3.16. *Sea una sucesión de vectores ζ_n y una sucesión de matrices simétricas(o formas bilineales simétricas) A_n. Entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

i) Si ζ_n converge a ζ_0 en norma entonces

$$\langle \zeta_n, V \rangle \to \langle \zeta_0, V \rangle \quad \forall V \in \chi(\mathbb{R}^n).$$

ii)Si A_n converge a A_0 en norma, entonces tenemos que

$$\langle A_n V, V \rangle \to \langle A_0 V, V \rangle \quad \forall V \in \chi(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Demostramos primero la parte i).

Sea una sucesión $x_n \to x_0$, y se definen los vectores $v_n = V(x_n) \to v_0 = V(x_0)$. Veamos que $\langle \zeta_n, V(x_n)\rangle \to \langle \zeta_0, V(x_0)\rangle$. Por tanto queremos acotar

$$|\langle \zeta_n, v_n\rangle - \langle \zeta_0, v_0\rangle|$$

que es igual a

$$|\langle \zeta_n - \zeta_0, v_n\rangle + \langle \zeta_0, v_n - v_0\rangle|$$

y esto se acota por

$$\leq \|\zeta_n - \zeta_0\|\|v_n\| + \|\zeta_0\|\|v_n - v_0\|$$

que tiende a cero por hipótesis, ya que para n suficientemente grande podemos conseguir

$$\|\zeta_n - \zeta_0\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|v_n - v_0\| < \varepsilon.$$

Por otro lado, para demostrar ii), queremos acotar

$$|\langle A_n V(x_n), V(x_n)\rangle - \langle A_0 V(x_0), V(x_0)\rangle| = |\langle A_n v_n, v_n\rangle - \langle A_0 v_0, v_0\rangle|$$

y esto es igual a

$$|\langle A_n v_n, v_n - v_0\rangle + \langle A_n v_n, v_0\rangle - \langle A_0 v_0, v_0\rangle| = |\langle A_n v_n, v_n - v_0\rangle + \langle A_n v_n - A_0 v_0, v_0\rangle| =$$

$$= |\langle A_n v_n, v_n - v_0\rangle + \langle A_n(v_n - v_0) + (A_n - A_0)v_0, v_0\rangle|$$

y esto se puede acotar por

$$\leq \|A_n\|\|v_n\|\|v_n - v_0\| + \|A_n\|\|v_0\|\|v_n - v_0\| + |\langle (A_n - A_0)v_0, v_0\rangle|$$

y esto último tiende a cero, por hipótesis. □

Proposición 3.17. *Sea A_n una sucesión de formas bilineales simétricas, y sea ζ_n una sucesión de formas lineales en $\mathbb{R}^n$. Entonces son ciertas:*

i) Si para todo $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\langle \zeta_n, v\rangle \to \langle \zeta_0, v\rangle$$

entonces ζ_n converge a ζ_0 en norma, es decir

$$\|\zeta_n - \zeta_0\| \to 0.$$

ii) Si para todo $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\langle A_n v, v\rangle \to \langle A_0 v, v\rangle$$

entonces se da que

$$\|A_n - A_0\| \to 0.$$

Demostración. Veamos primero i), es decir que $\|\zeta_n - \zeta_0\| \to 0$ con la hipótesis .

Supongamos lo contrario, entonces existe un $\varepsilon > 0$ y existe una subsucesión de ζ_n tal que
$$\|\zeta_n - \zeta_0\| \geq 2\varepsilon$$
luego por tanto, existe una sucesión de vectores v_n con $\|v_n\| \leq 1$ tales que
$$\|\zeta_n(v_n) - \zeta_0(v_n)\| \geq \varepsilon.$$
Por compacidad podemos suponer que $v_n \to v_0$ en la bola $\overline{B}(0,1)$. Por el principio de acotación uniforme, como
$$\langle \zeta_n, v\rangle \to \langle \zeta_0, v\rangle \quad \forall v$$
se tiene que existe un $M \geq 0$ tal que $\|\zeta_n\| \leq M$ para todo n. Entonces
$$|\zeta_n(v_n) - \zeta_0(v_n)| = |\zeta_n(v_n - v_0) + \zeta_n(v_0) - \zeta_0(v_0) + \zeta_0(v_0 - v_n)|$$
$$\leq \|\zeta_n\|\|v_n - v_0\| + |\zeta_n(v_0) - \zeta_0(v_0)| + \|\zeta_0\|\|v_n - v_0\|$$
que tiende a cero, luego tenemos una contradicción, que nos lleva a afirmar que efectivamente
$$\|\zeta_n - \zeta_0\| \to 0.$$
Veamos ahora ii). Queremos obtener que $\|A_n - A_0\| \to 0$.

Si no se diese esto, existiria $\varepsilon > 0$ y una subsucesión, que denotamos igual que la sucesión original A_n, tal que
$$\|A_n - A_0\| \geq \varepsilon \quad \forall n.$$
Por tanto existe una sucesión v_n con $\|v_n\| \leq 1$ tal que
$$|\langle A_n v_n, v_n\rangle - \langle A_0 v_n, v_n\rangle| \geq \varepsilon \quad \forall n.$$
Por compacidad podemos suponer que $v_n \to v_0$

Nótese que
$$\langle AV, W\rangle = \frac{1}{2}(\langle AV, V\rangle + \langle AW, W\rangle - \langle A(V-W), (V-W)\rangle$$
(ya que tratamos con formas bilineales simétricas), luego de la hipótesis $\langle A_n V, V\rangle \to \langle A_0 V, V\rangle \quad \forall V$, se sigue que
$$\langle A_n V, W\rangle \to \langle A_0 V, W\rangle \quad \forall V, W.$$
En particular $A_n V \to A_0 V$ puntualmente (en W), entendidos como formas lineales, luego de lo anterior visto para vectores (ζ_n) se sigue que
$$\|A_n V - A_0 V\| \to 0 \quad \forall V \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Por el principio de acotación uniforme, esto implica que existe $M > 0$, tal que $\|A_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego en este caso podemos deducir que

$$|\langle A_n v_n, v_n\rangle - \langle A_0 v_0, v_0\rangle| \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

acotándolo de la misma forma que en la proposición anterior.

Así con todo esto, podemos acotar

$$|\langle A_n v_n, v_n\rangle - \langle A_0 v_n, v_n\rangle|$$

$$= |\langle A_n v_n, v_n\rangle - \langle A_0 v_0, v_0\rangle - \langle A_0 v_0, v_n - v_0\rangle - \langle A_0(v_n - v_0), v_n\rangle| \leq$$

$$\leq |\langle A_n v_n, v_n\rangle - \langle A_0 v_0, v_0\rangle| + \|A_0 v_0\|\|v_n - v_0\| - \|A_0 v_n\|\|v_n - v_0\|$$

y ver que tiende a cero. Por tanto llegamos a una contradicción y podemos efectivamente afirmar que

$$\|A_n - A_0\| \to 0.$$

□

Corolario 3.18. *Sea A_n una sucesión de formas bilineales simétricas, y sea ζ_n una sucesión de formas lineales en $\mathbb{R}^n$. Entonces son ciertas:*

i)

$$\langle \zeta_n, V\rangle \to \langle \zeta_0, V\rangle \text{ para todo } V \in \chi(\mathbb{R}^n) \text{ si y sólo si } \|\zeta_n - \zeta_0\| \to 0.$$

ii)

$$\langle A_n V, V\rangle \to \langle A_0 V, V\rangle \text{ para todo } V \in \chi(\mathbb{R}^n) \text{ si y sólo si } \|A_n - A_0\| \to 0.$$

3.4. Convergencia en variedades riemannianas

Vamos a ver la equivalencia de las convergencias en una variedad M, y podemos considerar por tanto la convergencia en norma tanto de formas bilineales como en formas lineales.

Definición 3.19. *Sea una sucesión de formas bilineales simétricas A_n, tales que $A_n : TM_{x_n} \times TM_{x_n} \to \mathbb{R}$. Decimos que A_n converge en norma a $A_0 : TM_{x_0} \times TM_{x_0} \to \mathbb{R}$ si y solo si*

$$\|L_{x_n x_0}(A_n) - A_0\|_{x_0} \to 0$$

cuando $x_n \to x_0$. Esto, por definición de la norma es lo mismo que decir que

$$sup\{\langle L_{x_n x_0} A_n(L_{x_0 x_n}(v)) - Av, v\rangle_{x_0}, v \in TM_{x_0}, \|v\| \leq 1\} \to 0,$$

que, de acuerdo con el corolario 3.18, es lo mismo que

$$\langle L_{x_n x_0} A_n(L_{x_0 x_n}(v)), v\rangle_{x_0} \to \langle Av, v\rangle_{x_0} \quad \forall v \in TM_{x_0}.$$

De la misma forma para formas lineales, decimos que $\zeta_n : TM_{x_n} \to \mathbb{R}$ *converge en norma a* $\zeta_0 : TM_{x_0} \to \mathbb{R}$ *si y solo si*

$$\|L_{x_n x_0}\zeta_n - \zeta_0\|_{x_0} \to 0 \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty,$$

que, de acuerdo con el corolario 3.18, equivale a

$$\langle L_{x_n x_0}(\zeta_n), v\rangle_{x_0} \to \langle \zeta_0, v\rangle_{x_0} \quad \forall v \in TM_{x_0}$$

(identificando las formas bilineales con vectores $\zeta_n \in TM_{x_n}$*).*

Además tenemos otro tipo de convergencia en Variedades riemannianas que se dice convergencia continua

Definición 3.20. *Decimos que una sucesión de formas bilineales simétricas* $A_n : TM_{x_n} \times TM_{x_n} \to \mathbb{R}$ *converge continuamente a* $A_0 : TM_{x_0} \times TM_{x_0} \to \mathbb{R}$*, si y solo si*

$$\langle A_n V(x_n), V(x_n)\rangle_{x_n} \to \langle A_0 V(x_0), V(x_0)\rangle_{x_0} \quad \forall V \in \chi(M).$$

De la misma forma para formas lineales $\zeta_n \in TM^*$*, decimos que convergen a* $\zeta_0 \in TM^*_{x_0}$ *continuamente, si y solo si*

$$\langle \zeta_n, V(x_n)\rangle_{x_n} \to \langle \zeta_0, V(x_0)\rangle_{x_0} \quad \forall V \in \chi(M)$$

(identificando las formas lineales con vectores $\zeta_n \in TM_{x_n}$*).*

Vamos a ver que esas dos formas de convergencia son equivalentes.

Proposición 3.21. *Sea* M *una variedad riemanniana, y sea* A_n *una sucesión de formas bilineales simétricas* $A_n : TM_{x_n} \times TM_{x_n} \to \mathbb{R}$*, y* ζ_n *una sucesión de formas lineales* $\zeta_n \in TM^*_{x_n}$*. Entonces tenemos que:*

i)Si $A_n \to A_0$ *en norma, entonces* A_n *también converge de forma continua a* A_0*.*

ii)Si $\zeta_n \to \zeta_0$ *en norma, entonces* ζ_n *también converge a* ζ_0 *de forma continua.*

Demostración. Demostramos primero la parte ii) para formas lineales. Podemos identificar esas formas lineales, con vectores ζ_n (que los denominamos de la misma forma) tales que $\zeta_n \in TM_{x_n}$.

Tenemos que $\|L_{x_n x_0}\zeta_n - \zeta_0\|_{x_0} \to 0$ y por la definición de norma, sabemos que

$$|\langle L_{x_n x_0}\zeta_n, V(x_0)\rangle_{x_0} - \langle \zeta_0, V(x_0)\rangle_{x_0}| < \varepsilon.$$

Lo que queremos acotar es

$$|\langle \zeta_n, V(x_n)\rangle_{x_n} - \langle \zeta_0, V(x_0)\rangle_{x_0}| \quad \forall V \in \chi(M)$$

para conseguir la convergencia continua. Veamos que podemos hacerlo:

$$|\langle \zeta_n, V(x_n)\rangle_{x_n} - \langle \zeta_0, V(x_0)\rangle_{x_0}| = |\langle L_{x_n x_0}(\zeta_n), L_{x_n x_0}V(x_n)\rangle_{x_0} - \langle \zeta_0, V(x_0)\rangle_{x_0}|$$

$$= |\langle L_{x_n x_0}\zeta_n, V(x_0)\rangle_{x_0} - \langle \zeta_0, V(x_0)\rangle_{x_0} + \langle L_{x_n x_0}\zeta_n, L_{x_n x_0}V(x_n) - V(x_0)\rangle_{x_0}|$$

$$\leq |\langle L_{x_n x_0}\zeta_n, V(x_0)\rangle_{x_0} - \langle \zeta_0, V(x_0)\rangle_{x_0}| + \|L_{x_n x_0}V(x_n) - V(x_0)\|\|L_{x_n x_0}\zeta_n\|$$

y lo de la derecha tiende a cero por la hipótesis, porque $L_{x_n x_0} \to I_{x_0}$ cuando $d(x_n, x_0) \to 0$ y porque de la hipótesis tambien podemos deducir que $\|L_{x_n x_0}\zeta_n\|$ está acotado.

Demostramos ahora la afirmación i).

Sabemos que $\|L_{x_n x_0}A_n - A_0\|_{x_0} \to 0$ cuando $x_n \to 0$, luego por definición tenemos que

$$\langle L_{x_n x_0}A_n(L_{x_0 x_n}(v)), v\rangle_{x_0} \to \langle A_0 v, v\rangle_{x_0} \quad \forall v \in TM_{x_0} \quad \|v\| \leq 1.$$

Queremos conseguir que

$$\langle A_n V(x_n), V(x_n)\rangle_{x_n} \to \langle AV(x_0), V(x_0)\rangle_{x_0} \quad \forall V \in \chi(M).$$

Veámoslo:

$$|\langle A_n V(x_n), V(x_n)\rangle_{x_n} - \langle A_0 V(x_0), V(x_0)\rangle_{x_0}| =$$

$$|\langle L_{x_n x_0}A_n V(x_n), L_{x_n x_0}V(x_n)\rangle_{x_0} - \langle A_0 V(x_0), V(x_0)\rangle_{x_0}|$$

$$\leq |\langle L_{x_n x_0}A_n V(x_n), L_{x_n x_0}V(x_n)\rangle - \langle L_{x_n x_0}A_n L_{x_0 x_n}V(x_0), V(x_0)\rangle|$$

$$+|\langle L_{x_n x_0}A_n L_{x_0 x_n}V(x_0), V(x_0)\rangle - \langle A_0 V(x_0), V(x_0)\rangle|$$

que por hipótesis

$$\leq |\langle L_{x_n x_0}A_n V(x_n), L_{x_n x_0}V(x_n)\rangle_{x_0} - \langle L_{x_n x_0}A_n L_{x_0 x_n}V(x_0), V(x_0)\rangle_{x_0}| + \varepsilon$$

$$= |\langle L_{x_n x_0}A_n V(x_n), L_{x_n x_0}V(x_n) - V(x_0)\rangle_{x_0} + \langle L_{x_n x_0}A_n V(x_n) - L_{x_n x_0}A_0 L_{x_0 x_n}V(x_0), V(x_0)\rangle_{x_0}| + \varepsilon$$

$$\leq |Ł_{x_n x_0}A_n V(x_n), L_{x_n x_0}V(x_n) - V(x_0)\rangle_{x_0}| + |\langle A_n(V(x_n) - L_{x_0 x_n}V(x_0)), L_{x_0 x_n}V(x_0)\rangle_{x_n}| + \varepsilon$$

y como la parte derecha de la desigualdad tiende a cero, ya que $L_{x_n x_0} \to I_{x_0}$ continuamente, tenemos acotado lo que queríamos, y por tanto podemos afirmar que $A_n \to A_0$ continuamente. $\square$

Proposición 3.22. *Sea M una variedad riemanniana. Sea A_n una sucesión de formas bilineales simétricas $A_n : TM_{x_n} \times TM_{x_n} \to \mathbb{R}$ y sea ζ_n es una sucesión de formas lineales $\zeta_n \in TM^*_{x_n}$. Entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

i) Si A_n converge continuamente a $A_0 : TM_{x_0} \times TM_{x_0} \to \mathbb{R}$ entonces A_n converge en norma a A_0.

ii) Si ζ_n converge continuamente a $\zeta_0 \in TM^*_{x_0}$ entonces ζ_n también converge en norma a ζ_0.

Demostración. Primero vamos a demostrar ii) usando vectores ζ_n (que se identifican con las formas lineales $\zeta_n \in TM^*_{x_n}$). Supongamos que no es verdad que $\|L_{x_n x_0}(\zeta_n) - \zeta_0\| \to 0$ entonces existe una subsucesión que la denominamos de la misma forma ζ_n tal que $\|L_{x_n x_0}(\zeta_n) - \zeta_0\| \geq 2\varepsilon$ luego por tanto existe una sucesión $v_n \in TM_{x_0}$, $\|v_n\| \leq 1$ tales que

$$|L_{x_n x_0}(\zeta_n(L_{x_0 x_n}(v_n))) - \zeta_0(v_n)| \geq \varepsilon.$$

Por compacidad, podemos suponer que $v_n \to v_0$ en $B(0,1) \subset TM_{x_0}$. Además sabemos que

$$\langle \zeta_n, L_{x_n x_0} v\rangle \to \langle \zeta_0, v\rangle \quad \forall v \in TM_{x_0},$$

ya que para cada $v \in TM_{x_0}$ podemos definir un campo vectorial $V \in \chi(M)$ de forma que $V(x_0) = v$ y $V(x_n) = L_{x_0 x_n}(v)$ y por la hipótesis se deduce. Por tanto existe $k > 0$, tal que $\|\zeta_n\|_{x_n} \leq k$ para todo n. Así podemos acotar:

$$|\langle \zeta_n, L_{x_0 x_n}(v_n)\rangle - \langle \zeta_0, v_n\rangle| = |\langle \zeta_n, L_{x_0 x_n}(v_n) - L_{x_0 x_n}(v_0)\rangle + \langle \zeta_n, L_{x_0 x_n}(v_0)\rangle - \langle \zeta_0, v_0\rangle + \langle \zeta_0, v_0 - v_n\rangle| \leq$$

$$\leq \|\zeta_n\| \|v_n - v_0\|_{x_0} + |\langle \zeta_n, L_{x_0 x_n}(v_0)\rangle - \langle \zeta_0, v_0\rangle| + \|\zeta_0\| \|v_0 - v_n\|.$$

Luego llegamos a una contradicción, ya que todo lo de la derecha de la desigualdad tiende a cero.

Por tanto podemos afirmar efectivamente que ζ_n converge a ζ_0 en norma.

Ahora demostramos i), lo análogo para formas bilineales A_n.

Supongamos que no es cierto que $A_n \to A_0$ en norma, luego existe una subsucesión A_n tal que $\|L_{x_n x_0}(A_n) - A_0\| \geq \varepsilon$ para todo n. Entonces existe una sucesión $v_n \in TM_{x_0}$, $\|v_n\| \leq 1$ tal que

$$|\langle A_n L_{x_0 x_n}(v_n), L_{x_0 x_n}(v_n)\rangle_{x_n} - \langle A_0 v_n, v_n\rangle| \geq \varepsilon \quad \forall n$$

y por compacidad de la bola $B(0,1) \subset TM_{x_0}$, podemos suponer que $v_n \to v_0$.

Aparte recordemos que

$$\langle A_n V, W\rangle = \frac{1}{2}(\langle A_n V, V\rangle + \langle A_n W, W\rangle - \langle A_n(V - W), (V - W)\rangle$$

(por ser A_n formas bilineales simétricas) luego de la hipótesis $\langle A_n V(x_n), V(x_n)\rangle \to \langle A_0 V(x_0), V(x_0)\rangle$ se sigue

$$\langle A_n V, W\rangle \to \langle A_0 V, W\rangle \quad \forall V, W \in TM_{x_0}$$

o lo que es lo mismo

$$\langle A_n V(x_n), W(x_n)\rangle \to \langle A_0 V(x_0), W(x_0)\rangle.$$

En particular $A_n V \to A_0 V$ puntualmente, entendido como formas lineales,luego por la primera parte de la demostracion para formas lineales, tenemos que

$$\|L_{x_n x_0}(A_n V) - A_0 V\| \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty, \quad \forall V.$$

Luego podemos deducir como en la proposición anterior que

$$|\langle A_n L_{x_0 x_n} v_n, L_{x_0 x_n} v_n\rangle_{x_n} - \langle A_0 v_0, v_0\rangle| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Así acotamos

$$|\langle A_n L_{x_0 x_n} v_n, L_{x_0 x_n} v_n\rangle_{x_n} - \langle A_0 v_n, v_n\rangle| =$$

$$|\langle A_n L_{x_0 x_n} v_n, L_{x_0 x_n} v_n\rangle_{x_n} - \langle A_0 v_0, v_0\rangle - \langle A_0 v_0, v_n - v_0\rangle - \langle A_0(v_n - v_0), v_n\rangle| \leq$$

$$|\langle A_n(L_{x_0 x_n}(v_n)), L_{x_0 x_n} v_n\rangle_{x_n} - \langle A_0 v_0, v_0\rangle_{x_0}| + \|A_0 v_0\|\|v_n - v_0\| - \|A_0 v_n\|\|v_n - v_0\|$$

y como la parte derecha de esta desigualdad tiende a cero, llegamos a una contradicción, y podemos afirmar que

$$\|L_{x_n x_0}(A_n) - A_0\| \to 0.$$

□

Corolario 3.23. *Sea M una variedad riemanniana. Sea A_n una sucesión de formas bilineales simétricas, $A_n : TM_{x_n} \times TM_{x_n} \to \mathbb{R}$ y sea ζ_n una sucesión de formas lineales $\zeta_n \in TM^*_{x_n}$. Entonces se dan las siguientes equivalencias:*

1. *A_n converge continuamente a A_0 si y sólo si A_n converge en norma a A_0*
2. *ζ_n converge continuamente a ζ_0 si y sólo si ζ_n converge en norma a ζ_0*

3.5. Subdiferencial proximal y su relación con la de viscosidad

Vamos a introducir unas nociones y resultados básicos del cálculo proximal, que provienen en su mayoria de [3], que nos serán útiles en el capítulo 4.

Antes de nada conviene definir lo que se entiende por subdiferencial proximal.

Definición 3.24. *Sea M una variedad riemanniana, y $f : M \to (-\infty, \infty]$ una función semicontinua inferior. Entonces al conjunto*

$$\partial_P f(x) = \{d\varphi(x) : \varphi \in C^2(M, \mathbb{R}), \quad f - \varphi \text{ alcanza un mínimo local en } x \}$$

le llamamos subdiferencial proximal de f en x.

Otra forma de caracterizar o definir los $\zeta \in \partial_P f(x)$ es de la siguiente forma: $\zeta \in \partial_P f(x)$ si y solo si, existe un número positivo σ tal que

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, exp_x^{-1}(y) \rangle - \sigma d(x, y)^2$$

en un entorno de x.

Otro resultado importante que nos será útil, es de la regla Fuzzy de la Suma para la subdiferencial proximal (como ya observamos recogido en [3]).

Teorema 3.25. *Sean dos funciones $f_1, f_2 : M \to (-\infty, \infty]$ semicontinuas inferiores tal que al menos una de ellas es Lipschitz cerca de x_0. Si $\zeta \in \partial_P(f_1 + f_2)(x_0)$ entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existen x_1, x_2, y $\zeta_1 \in \partial_P f_1(x_1)$, $\zeta_2 \in \partial_P f_2(x_2)$ tales que*

1. *$d(x_i, x_0) < \varepsilon$ y $|f_i(x_i) - f_i(x_0)| < \varepsilon$ para $i = 1, 2$.*
2. *$\|\zeta - (L_{x_1 x_0}(\zeta_1) + L_{x_2 x_0}(\zeta_2))\|_{x_0} < \varepsilon$.*

Ahora veamos el principio de Decrecimiento (ver teorema 16 de [3])para variedades, en el que entran en juego las subdiferenciales proximales.

Teorema 3.26. *Sea M una variedad riemanniana completa. Sea $f : M \to (-\infty, \infty]$ una función semicontinua inferior, y $x_0 \in dom f$. Asumimos que existe $\delta > 0$ y $\rho > 0$ tal que $\|\zeta\|_x \geq \delta$ para cada x con $d(x, x_0) < \rho$ y para cada $\zeta \in \partial_P f(x)$. Entonces*

$$\inf\{f(x) : d(x, x_0) \leq \rho\} \leq f(x_0) - \rho\delta.$$

Otra propiedad de la subdiferencial proximal, es que si una función $\psi : M \to (-\infty, \infty]$ tiene un mínimo en un punto x_0 entonces

$$0 \in \partial_p \psi(x_0)$$

(ver Proposición 3.1. de [6]).

Vamos a recordar la definición de subdiferencial de viscosidad de primer orden y dar unas equivalencias a ésta, que utilizaremos en el capítulo siguiente (ver pags. 324, 325 de [5]).

Definición 3.27. *Sea (M, g) una variedad riemanniana, y $f : M \longrightarrow (-\infty, \infty]$ tal que $Dom f \neq \emptyset$. Diremos que f es subdiferenciable en el punto $p \in dom(f) = \{x \in M : f(x) < \infty\}$ cuando exista una función $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f - \varphi$ alcance un mínimo local en el punto p. En este caso diremos que $\zeta = d\varphi(p) \in (TM_p)^* \simeq \mathcal{H}^* = \mathcal{H}$ es una subdiferencial de f en p. Definimos la subdiferencial de f en el punto p por el conjunto*

$$D^- f(p) = \{d\varphi(p) : \varphi \in C^1(M, \mathbb{R}), f - \varphi \text{ alcanza un mínimo local en } p\},$$

Vamos a usar en el siguiente capítulo una de estas caracterizaciones de la subdiferencial, aunque el siguiente teorema no lo demostraremos (ver para ello pag. 325 de [5]).

Teorema 3.28 (Caracterizaciones de subdiferenciabilidad). *Sea $f : M \to (-\infty, \infty]$ una función definida en una variedad riemanniana, $p \in M$, y $\eta \in T^*M_p$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *$\eta \in D^- f(p)$, o lo que es lo mismo, existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en p, y $\eta = d\varphi(p)$.*

2. *Existe una función, $\varphi : M \to \mathbb{R}$, Fréchet-diferenciable en p tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en p, y $\eta = d\varphi(p)$.*

3. *Para cada carta $h : U \subset M \to \mathcal{H}$ con $p \in U$, si tomamos $\zeta = \eta \circ dh^{-1}(h(p))$, se verifica que*

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \geq 0.$$

4. *Existe una carta $h : U \subset M \to \mathcal{H}$ con $p \in U$ y tal que, para $\zeta = \eta \circ dh^{-1}(h(p))$, se verifica que*

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \geq 0.$$

Cuando la función f está localmente acotada inferiormente (esto es, para cada $x \in M$ existe un entorno U de x tal que f esta acotada inferiormente en U), entonces las condiciones anteriores son todas equivalentes a la siguiente condición:

5. *Existe una función, $\varphi : M \to \mathbb{R}$, de clase C^1 tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo* global *en p, y $\eta = d\varphi(p)$.*

Consecuentemente, cualquiera de las condiciones anteriores puede ser tomada como definición de $\eta \in D^- f(p)$.

Análogamente, se pueden establecer condiciones equivalentes para el caso de funciones superdiferenciables; en particular $\zeta \in D^+ f(p)$ *si, y sólo si, existe una carta* $h : U \subset M \to \mathcal{H}$ *con* $p \in U$ *tal que, para* $\zeta = \eta \circ dh^{-1}(h(p))$,

$$\limsup_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \leq 0.$$

A partir de la primera caracterización de la subdiferencial proximal, podemos deducir fácilmente que

$$\partial_P f(x) \subset D^- f(x)$$

es decir, que la subdiferencial de viscosidad (o de Frechet) contiene a la subdiferencial proximal.

Capítulo 4

Soluciones de viscosidad de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

En este capítulo vamos a garantizar unicidad de soluciones de viscosidad para el problema de Dirichlet en variedades riemannianas:

$$\begin{cases} F(x, u(x), du(x), d^2u(x)) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{DP}$$

donde la F en particular deberá reunir unas ciertas propiedades (como por ejemplo la de ser propia 1.39). Por ello, en primer lugar vamos a garantizar la unicidad mediante resultados de comparación y por otro lado garantizamos la existencia siguiendo un método análogo al de Perrón.

Recordamos que, como dijimos en el primer capítulo, nuestras funciones F estarán definidas del espacio $\mathcal{X} = \{(x, r, \zeta, A) : x \in M, r \in \mathbb{R}, \zeta \in TM_x, A \in \mathcal{L}^2_s(TM_x)\}$ en $\mathbb{R}$.

4.1. Resultados de comparación para el problema de Dirichlet

El resultado principal de esta sección es sin duda el siguiente teorema, que nos indica que a lo sumo hay una solución para el problema de Dirichlet (DP).

Teorema 4.1. *Sea Ω un conjunto abierto acotado de M, sea $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ propia y que satisface las siguientes condiciones:*

1. *existe $\gamma > 0$ tal que*

$$\gamma(r - s) \leq F(x, r, \zeta, P) - F(x, s, \zeta, P)$$

para $r \geq s$,

2. *existe una función* $\omega : [0, \infty] \to [0, \infty]$ *que satisface* $\omega(0+) = 0$ *tal que*

$$F(y, r, \alpha exp_y^{-1}(x), Q) - F(x, r, -\alpha exp_x^{-1}(y), P) \leq \omega(\alpha d(x, y)^2 + d(x, y))$$

siempre y cuando $x, y \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$, $P, Q \in T_{2,s}M$ *y además se cumpla que*

$$-(\frac{1}{\varepsilon_\alpha} + \|A_\alpha\|) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \leq A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2, \tag{4.1}$$

donde A_α *es la matriz hessiana de la función* $\varphi_\alpha = \frac{\alpha}{2} d(x, y)^2$ *y* $\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2(1+\|A_\alpha\|)}$. *Sea* $u \in USC(\overline{\Omega})$ *una subsolución y* $v \in LSC(\overline{\Omega})$ *una supersolución de* $F = 0$ *en* Ω *y* $u \leq v$ *en* $\partial\Omega$. *Entonces* $u \leq v$ *en* $\overline{\Omega}$.

Demostración. Supongamos que no es cierto el resultado, entonces existe $z \in \Omega$ tal que $u(z) > v(z)$. Aplicando el lema 3.12,

$$\exists(x_\alpha, y_\alpha) \text{ máximo de } u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2} d^2(x, y).$$

En este caso,

$$M_\alpha = u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2} d(x_\alpha, y_\alpha)^2 \geq \delta = u(z) - v(z) > 0.$$

Por el Lema 3.12

$$\alpha d(x_\alpha, y_\alpha)^2 \to 0 \text{ cuando } \alpha \to \infty.$$

Como $\overline{\Omega}$ es compacto podemos suponer que al menos una sucesión de (x_α, y_α), que por abuso de notación la seguimos nombrando igual, converge a un punto $(x_0, y_0) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, y por el lema 3.12, tenemos que $x_0 = y_0$ y

$$\delta \leq \lim_{\alpha \to \infty} M_\alpha = u(x_0) - v(x_0) = \sup_{\overline{\Omega}} (u(x) - v(x)).$$

Además tomando un $r_0 > 0$ y un $R_0 > 0$ tales que, para cada $x \in B(x_0, r_0)$, exp_x es un difeomorfismo de $B(0, R_0) \in TM_x$ a $B(x, R_0) \supset B(x_0, r_0)$. Sabemos que para cada $x, y \in B(x_0, r_0)$ la distancia $d(x, y) < min\{i_M(x), i_M(y)\}$, los vectores $exp_x^{-1}(y) \in TM_x \equiv TM_x^*$ y $exp_y^{-1}(x) \in TM_y \equiv TM_y^*$ están bien definidos, y la función $\varphi(x, y) = d(x, y)^2$ es C^2 en $B(x_0, r_0) \times B(x_0, r_0) \in M \times M$ (es decir, que tomando una subsucesión si es necesario podemos suponer que $x_\alpha, y_\alpha \in B(x_0, r_0)$ para todo α). Por ello, podemos hacer uso de las igualdades:

$$D_x \varphi(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x_0, y_0) = -\alpha exp_{x_0}^{-1}(y_0)$$

y

$$-D_y\varphi(x_0,y_0) = -\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x_0,y_0) = \alpha exp_{y_0}^{-1}(x_0)$$

Ahora aplicamos el Teorema 3.14 en $\Omega_1 = \Omega_2 = B(x_0, r_0)$ para $\omega(x,y) = u(x) - v(y)$ y $\varphi(x,y) = \frac{\alpha}{2}d^2(x,y)$ con (x_α, y_α) su máximo local. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, y en particular para ε_α existen P, Q formas bilineales

$$P : TM_{x_\alpha} \times TM_{x_\alpha} \to \mathbb{R} \text{ y } Q : TM_{y_\alpha} \times TM_{y_\alpha} \to \mathbb{R}$$

tal que

$$(\alpha d(x_\alpha,y_\alpha)D_x d(x_\alpha,y_\alpha), P) = (D_x\varphi(x_\alpha,y_\alpha), P) \in \overline{J}^{2+}u(x_\alpha)$$

$$(-\alpha d(x_\alpha,y_\alpha)D_y d(x_\alpha,y_\alpha), Q) = (-D_y\varphi(x_\alpha,y_\alpha), Q) \in \overline{J}^{2-}v(y_\alpha)$$

y

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon_\alpha} + \|A_\alpha\|\right)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \leq A_\alpha + \varepsilon A_\alpha^2$$

donde $A_\alpha = D^2(\frac{\alpha}{2}d^2(x_\alpha,y_\alpha))$.

Luego para esos P y Q se puede aplicar la condición 2 del teorema.

Por otro lado, como $(-\alpha exp_{x_\alpha}^{-1}(y_\alpha), P) \in \overline{J}^{2+}u(x_\alpha)$ y u es subsolución de $F = 0$ entonces

$$F(x_\alpha, u(x_\alpha), -\alpha exp_{x_\alpha}^{-1}(y_\alpha), P) \leq 0$$

y como $(\alpha exp_{y_\alpha}^{-1}(x_\alpha), Q) \in \overline{J}^{2-}v(y_\alpha)$ y v es supersolución de $F = 0$ (y F continua) entonces

$$F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha exp_{y_\alpha}^{-1}(x_\alpha), Q) \geq 0.$$

Por la condición 1, por ser $M_\alpha \geq \delta > 0$ y por suponer $u(z) > v(z)$ tenemos

$$0 < \gamma\delta \leq \gamma(u(x_\alpha) - v(y_\alpha)) \leq$$

$$F(x_\alpha, u(x_\alpha), -\alpha exp_{x_\alpha}^{-1}(y_\alpha), P) - F(x_\alpha, v(y_\alpha), -\alpha exp_{x_\alpha}^{-1}(y_\alpha), P) =$$

$$= F(x_\alpha, u(x_\alpha), -\alpha exp_{x_\alpha}^{-1}(y_\alpha), P) - F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha exp_{y_\alpha}^{-1}(x_\alpha), Q) +$$

$$+ F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha exp_{y_\alpha}^{-1}(x_\alpha), Q) - F(x_\alpha, v(y_\alpha), -\alpha exp_{x_\alpha}^{-1}(y_\alpha), P) \leq$$

$$\leq \omega(\alpha d(x_\alpha,y_\alpha)^2 + d(x_\alpha,y_\alpha)).$$

Haciendo $\alpha \to \infty$ obtenemos una contradicción, luego llegamos a que $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$, como queríamos demostrar. $\square$

Observación 4.2. El Teorema 4.1 es aplicable siempre que la matriz hessiana en cuestión, A_α, sea semidefinida negativa para el subespacio generado por vectores del tipo (v, Lv), ya que en este caso $P \leq L_{yx}(Q)$. Esto lo podemos asegurar cuando la variedad M tiene curvatura seccional no negativa ya que si $A_\alpha = D^2(\frac{\alpha}{2}d^2(x_0, y_0))$ es semidefinida negativa para vectores de la forma (v, Lv) entonces también lo es $A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2$.

Las condiciones que exige el teorema 4.1 son complicadas de escribir y por tanto podemos utilizar otras más fuertes, pero más simples de indicar.

Observación 4.3. Nos damos cuenta que como $\alpha exp_y^{-1}(x) = L_{xy}(-\alpha exp_x^{-1}(y))$, la condición 2 del teorema 4.1 se puede sustituir por la siguiente condición más fuerte:

$$F(y, r, L_{xy}(\zeta), Q) - F(x, r, \zeta, P) \leq \omega(\alpha d(x, y)^2 + d(x, y))$$

para todo $x, y \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$, $P \in T_{2,s}(M)_x$, $Q \in T_{2,s}(M)_y$, $\zeta \in TM_x^*$ que satisfacen la condición (4.1).

Observación 4.4. En el caso de que ambas funciones u y v estén acotadas por algún $R > 0$, entonces las condiciones 1 y 2 del teorema 4.1 se relajan, en el sentido de que basta que se cumplan para r y s en el intervalo $[-R, R]$.

Proposición 4.5. *Si M tiene curvatura seccional no negativa, entonces la condición*

$$-(\frac{1}{\varepsilon_\alpha} + \|A_\alpha\|)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \leq A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2,$$

donde $A_\alpha = D^2(\frac{\alpha}{2}d^2(x_0, y_0))$, implica que $P \leq L_{yx}(Q)$.

Demostración. En este caso vamos a ver que tenemos entonces que $A_\alpha + \varepsilon A_\alpha^2$ también es semidefinida negativa en el subespacio

$$D = \{(v, L_{xy}v) : v \in TM_x\}$$

de $TM_x \times TM_y$. Como sabemos que $A_\alpha(v, L_{xy}v) \leq 0$ para todo $v \in TM_x$ (ver Proposición 2.1). Equivalente a lo anterior es que todos sus autovalores $\lambda_i \leq 0$. Por otro lado queremos deducir que

$$\lambda_i + \varepsilon_\alpha \lambda_i^2 \leq 0$$

porque los autovalores de $A_\alpha + \varepsilon A_\alpha^2$ son de la forma $\lambda_i + \varepsilon_\alpha \lambda_i^2$. Por la elección del ε_α tenemos que

$$\lambda_i + \varepsilon_\alpha \lambda^2 \leq \lambda_i + \frac{1}{2(1 + sup_{1\leq j\leq n}|\lambda_j|)}\lambda^2 \leq \lambda_i + \frac{|\lambda_i|}{2} = \frac{\lambda_i}{2} \leq 0.$$

Por tanto tenemos que

$$(A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2)(v, L_{xy}(v))^2 \leq 0.$$

Luego la condición

$$-(\frac{1}{\varepsilon_\alpha} + \|A_\alpha\|)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \leq A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2$$

implica que

$$P(v)^2 - Q(L_{xy}(v))^2 \leq (A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2)(v, L_{xy}v)^2 \leq 0$$

para todo $v \in TM_x$, luego obtenemos finalmente que

$$P \leq L_{yx}(Q).$$

□

Con este resultado podemos deducir que si M tiene curvatura seccional no negativa, y F es elíptica degenerada entonces la condición (4.1) automáticamente implica que

$$F(x, r, \zeta, L_{yx}Q) - F(x, r, \zeta, P) \leq 0,$$

y por ello

$$F(y, r, L_{xy}\zeta, Q) - F(x, r, \zeta, P) =$$

$$F(y, r, L_{xy}\zeta, Q) - F(x, r, \zeta, L_{yx}Q) + F(x, r, \zeta, L_{yx}Q) - F(x, r, \zeta, P) \leq$$

$$F(y, r, L_{xy}\zeta, Q) - F(x, r, \zeta, L_{yx}Q).$$

Visto lo anterior, si estamos en las hipótesis de que M tiene curvatura seccional no negativa y F es elíptica degenerada, entonces añadiendo la hipótesis de que

$$F(y, r, \eta, Q) - F(x, r, L_{yx}\eta, Q) \leq \omega(d(x, y)), \tag{β}$$

(es decir, que F sea intrínsecamente uniformemente continua) la condición 2 del Teorema 4.1 se satisface.

Corolario 4.6. *Sea Ω un abierto acotado de una variedad riemanniana M completa de dimensión finita y con curvatura seccional no negativa, y sea $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función contínua, elíptica degenerada y que satisfaga:*

1. *exista un $\gamma > 0$ tal que si $r \geq S$ entonces*

$$\gamma(r - s) \leq F(x, r, \zeta, Q) - F(x, s, \zeta, Q) :$$

2. *que F intrínsecamente uniformemente continua, es decir, que exista una función $\omega : [0,\infty] \to [0,\infty]$ con $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$ y tal que*

$$F(y,r,\eta,Q) - F(x,r,L_{yx}\eta, L_{yx}Q) \leq \omega(d(x,y))$$

para todo x, y, r, η, Q con $d(x,y) < min\{i_M(x), i_M(y)\}$.

Sea $u \in USC(\overline{\Omega})$ una subsolución y $v \in LSC(\overline{\Omega})$ una supersolución de $F = 0$ en Ω, y $u \leq v$ en $\partial\Omega$.

Entonces $u \leq v$ en todo $\overline{\Omega}$. En particular, el problema de Dirichlet (DP) tiene como mucho una solución de viscosidad.

Sin embargo todo nuestro razonamiento anterior no sirve cuando M tiene curvatura negativa ya que la condición (4.1) en este caso no implica que $P \leq L_{yx}Q$, y por tanto la elipticidad degenerada con la condición (β) no basta para asegurar que la condición 2 del teorema 4.1 se satisface. Pero en este caso la condición 2 del teorema 4.1 requiere un tipo de continuidad uniforme a la función F con respecto a la variable $d^2u(x)$. En la siguiente observación se explica más detalladamente la situación.

Observación 4.7. Supongamos que M tiene curvatura seccional acotada inferiormente, por alguna constante $-K_0 \leq 0$. Entonces la condición (4.1) en el teorema 4.1 implica que

$$P - L_{yx}(Q) \leq \frac{3}{2} K_0 \alpha d(x,y)^2 I,$$

donde $I(v)^2 = \|v\|^2$.

Demostración. Sea $A_\alpha = (\frac{\alpha}{2}) d^2\varphi(x,y)$, al igual que en el teorema 4.1, donde $\varphi(x,y) = d(x,y)^2$. Por la proposición 2.2 tenemos

$$d^2\varphi(x,y)(v, L_{xy}v)^2 \leq 2K_0 d(x,y)^2 \|v\|^2$$

para todo $v \in TM_x$ y $x, y \in M$ con $d(x,y) < min\{i_M(x), i_M(y)\}$. Por tanto sabemos que

$$A_\alpha(v, L_{xy}v)^2 \leq \alpha K_0 d(x,y)^2 \|v\|^2.$$

Esto nos indica que el máximo autovalor de la matriz A_α restringida a $\mathcal{D} = \{(v, L_{xy}(v)) : v \in TM_x\}$, que denotamos λ_n, satisface

$$\lambda_n \leq \alpha K_0 d(x,y)^2.$$

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son autovalores de $(A_\alpha)|_{\mathcal{D}}$ entonces $\lambda_i + \varepsilon_\alpha \lambda_i^2$, $i = 1, \ldots, n$, son los de $(A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2)|_D$. Para un $i = 1, \ldots, n$, fijado, si $\lambda_i \leq 0$ entonces $\lambda \leq 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, asi que conseguimos que $\lambda_j + \varepsilon_\alpha \lambda_j^2 \leq 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, lo que significa que

$$(A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2)(v, L_{xy}v)^2 \leq 0.$$

Por otro lado, si $\lambda_n \geq 0$ entonces $\lambda_n + \varepsilon_\alpha \lambda_n^2 \geq 0$, y como la función $[0, \infty) \ni s \to s + \varepsilon_\alpha s^2 \in [0, \infty)$ es creciente, el autovalor máximo de $(A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2)|_D$ es precisamente $\lambda_n + \varepsilon_\alpha \lambda_n^2$. Esto significa que

$$(A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2)(v, L_{xy}v)^2 \leq \lambda_n + \varepsilon_\alpha \lambda_n^2$$

para todo $v \in TM_x$. Además tenemos que, por la elección de ε_α,

$$\lambda_n + \varepsilon_\alpha \lambda_n^2 \leq \lambda_n + \frac{1}{2(1 + sup_{1 \leq j \leq n}|\lambda_n|)} \lambda_n^2 \leq \lambda_n + \frac{\lambda_n}{2} = \frac{3}{2}\lambda_n,$$

por lo tanto

$$(A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2)(v, L_{xy}v)^2 \leq \frac{3}{2}\lambda_n \leq \frac{3}{2}\alpha K_0 d(x,y)^2 \|v\|^2.$$

En cualquier caso, sea cual sea el signo de λ_n, obtenemos la desigualdad anterior, y por tanto la condición (4.1) implica

$$P(v)^2 - Q(L_{xy}(v))^2 \leq (A_\alpha + \varepsilon_\alpha A_\alpha^2)(v, L_{xy}v)^2 \leq \frac{3}{2} K_0 \alpha d(x,y)^2 \|v\|^2.$$

$\square$

Corolario 4.8. *Sea M una variedad riemanniana completa (con curvatura cualquiera), y Ω un subconjunto abierto acotado de M. Supongamos que $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ es propia, continua, y satisface la siguiente condición de continuidad uniforme: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x,y) \leq \delta, \quad P - L_{xy}(Q) \leq \delta I \Rightarrow F(y, r, L_{xy}\zeta, Q) - F(x, r, \zeta, P) \leq \varepsilon$$

para todo $x, y \in M$ con $d(x,y) < i_M$, $r \in \mathbb{R}$, $\zeta \in TM_x^*$, $P \in \mathcal{L}_s^2(TM_x, \mathbb{R})$, y $Q \in \mathcal{L}_s^2(TM_y, \mathbb{R})$. Supongamos también que existe un $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma(r - s) \leq F(x, r, \zeta, Q) - F(x, s, \zeta, Q) \quad \text{para todo } r \geq s.$$

Sea u una subsolución y v una supersolución de $F = 0$. Entonces $u \leq v$ en Ω. En particular hay como mucho una solución de viscosidad para el problema de Dirichlet (DP).

Demostración. Como M es completa, por las equivalencias que nos da el teorema de Hopf-Rinow 1.17 (también se puede ver en [[14],pag.146]), como $\overline{\Omega}$ es cerrado y acotado entonces es compacto, y además el teorema nos dice que si M es completa, la función exp_p está definida en todo TM_p, para todo $p \in M$, luego sabemos que $\inf_{x\in\overline{\Omega}} i_M(x) > 0$. Tomamos un número r con $0 < 2r < \inf_{x\in\overline{\Omega}} i_M(x)$. Tambien, por la compacidad de $\overline{\Omega}$ podemos afirmar que existe un $K_0 > 0$ tal que la curvatura seccional está acotada inferiormente por $-K_0$ en $\overline{\Omega}$. Por tanto tenemos que $\varphi(x,y) = d(x,y)^2$ es C^∞ en el conjunto $\{(x,y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} : d(x,y) < r\}$ y de acuerdo con la observación anterior, si P, Q satisfacen la condición (4.1) del teorema 4.1, obtenemos $P - L_{yx}(Q) \leq \frac{3}{2}K_0\alpha d(x,y)^2 I$ siempre que $d(x,y) < r$. Entonces por la condición de continuidad uniforme sobre F existe una función $\omega : [0,\infty] \to [0,\infty]$ con $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$ y tal que

$$F(y, r, \alpha exp_y^{-1}(x), Q) - F(x, r, -\alpha exp_x^{-1}(y), P) \leq \omega(\alpha d(x,y)^2 + d(x,y)),$$

y con estas condiciones podemos aplicar el Teorema 4.1 para concluir con el resultado. □

Observación 4.9. Supongamos que tenemos M variedad riemanniana completa no compacta pero $i(M) > 0$. En este caso, se puede demostrar el Teorema 4.1 para $\Omega = M$, siempre que podamos asegurar que los M_α se alcanzan, al menos para α lo suficientemente grande. Condiciones suficientes para ello son:

1. Que existan $l_1 = \lim_{x\to\infty} u(x)$ y $l_2 = \lim_{y\to\infty} v(y)$, y además $l_1 \leq l_2$.

   Con esta condición, la demostración del Teorema 4.1 se puede adaptar sin apenas modificarla, para el caso de toda la variedad M.

2. Que u y v sean uniformemente continuas y además $\lim_{x\to\infty} u(x) - v(x) \leq 0$.

Para demostrar que la condición 2 de la observación anterior es suficiente para asegurar que los M_α se alcanzan, vamos a utilizar la siguiente definición y la proposición que va a continuación.

Definición 4.10. *Se dice que una función f es Lipschitz a distancias grandes, si para todo $\delta > 0$, existe $K_\delta > 0$, tal que si $d(x,y) \geq \delta$ entonces*

$$|f(x) - f(y)| \leq K_\delta d(x,y).$$

Proposición 4.11. *Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua y M es completa entonces f es Lipschitz a distancias grandes.*

Demostración. Por definición, dado $\varepsilon > 0$, existe δ' tal que para todo z, w tal que $d(z,w) < \delta'$ se tiene que $|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varepsilon = 1$.

Sea $d(x,y) = R \geq \delta'$. Como M es completa, hay una geodésica que une x e y cuya longitud es $d(x,y)$, y se puede dividir la geodésica en puntos x_i tal que $x_1 = x$ y $x_{n+1} = y$, y además de forma que $d(x_i, x_{i+1}) < \delta'$. Definimos $n = \frac{R}{\delta'}$ y en el caso de que no fuese entero, podemos tomar un δ más pequeño que δ' tal que el cociente $\frac{R}{\delta}$ sea entero, y por lo tanto trabajamos en este supuesto. En este caso

$$d(x,y) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta n = R$$

y por la definición de continuidad uniforme y usando que $\varepsilon = 1$ tenemos que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i+1})| \leq n = \frac{R}{\delta}.$$

Luego hemos visto que la función es Lipschitz a distancias grandes y la constante $K_\delta = \frac{1}{\delta}$. $\square$

Observación 4.12. También se puede demostrar la proposición sin suponer M completa, pero no lo necesitamos, así que omitimos la demostración

Ahora, ya podemos demostrar que la condición 2 de la observación anterior es suficiente para garantizar que los M_α se alcanzan en el teorema 4.1 adaptado para toda la variedad M.

Demostración de la condición 2 de la observación 4.9. En este caso trabajamos en toda la variedad (es decir $\Omega = M$). Vamos a demostrar que se alcanzan los

$$M_\alpha = \sup_{M\times M} (u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2} d(x,y)^2).$$

Supongamos, al igual que en la demostración del teorema 4.1 que existe z, tal que $u(z) > v(z)$, y sea $u(z) - v(z) = \varepsilon$. Podemos afirmar por continuidad de u y v que existe un compacto K, tal que para todo $x \in K$ se verifica $(u-v)(x) > \frac{\varepsilon}{3}$. Veamos que para todo $x \in M \setminus K$ podemos acotar la diferencia $u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2} d(x,y)^2$ para todo $y \in M$, al menos para α suficientemente grande y así asegurar que se alcanzan los M_α para $x = y \in K$.

Por la continuidad uniforme, si $d(x,y) \leq \delta$ tenemos que $|v(x) - v(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Si $d(x,y) \leq \delta$ entonces, para $x \in M \setminus K$, tenemos que

$$u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2} d(x,y)^2 = u(x) - v(x) + v(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2} d(x,y)^2 \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\alpha}{2}\delta^2.$$

Si por el contrario fuese $d(x,y) \geq \delta$ (y $x \in M \setminus K$) , sabemos que v es Lipschitz a distancias grandes (por ser uniformemente continua, como hemos visto en la proposición anterior) y además sabemos que $\lim_{x\to\infty} u(x) - v(x) \leq 0$ por suponer la condición 2 de la observación, por tanto

$$u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}d(x,y)^2 \leq u(x) - v(x) + v(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}d(x,y)^2$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + v(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}d(x,y)^2$$

porque, estamos suponiendo que x se aleja de y, y se hace grande, usamos la condición $\lim_{x\to\infty} u(x) - v(x) \leq 0$ y podemos acotar esa diferencia $(u(x) - v(x))$ por $\frac{\varepsilon}{3}$. Además, tenemos que

$$\frac{\varepsilon}{3} + v(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}d(x,y)^2 \leq \frac{\varepsilon}{3} + K_\delta d(x,y)^2 - \frac{\alpha}{2}d(x,y)^2$$

por ser v Lipschitz a distancias grandes, y para $\alpha \geq 2K_\delta$ se tiene

$$\frac{\varepsilon}{3} + K_\delta d(x,y)^2 - \frac{\alpha}{2}d(x,y)^2 \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es decir, hemos obtenido que para $x \in M \setminus K$ con $d(x,y) > \delta$,

$$u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}d^2(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

como pretendíamos.

Como se puede hacer el mismo razonamiento para y, tenemos que el supremo de $u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}d(x,y)^2$ en $M \times M$ se alcanza en $(x,y) \in K \times K$ para α lo suficientemente grande (ya que en $M \setminus K$ hemos podido acotar esa función por algo pequeño), y como K es un conjunto compacto, alcanzamos el máximo.

Con esto podemos adaptar la demostración del teorema 4.1 a toda la variedad M con las condiciones que hemos dado en la observación anterior, ya que efectivamente hemos visto que se alcanzan los M_α. $\square$

Corolario 4.13. *Sea M una variedad riemanniana compacta con curvatura seccional no negativa. Sea $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ continua, elíptica degenerada, y que satisfaga las condiciones*

1. *existe un $\gamma > 0$ tal que, si $r \geq s$ entonces*

$$\gamma(r-s) \leq F(x,r,\zeta,Q) - F(x,s,\zeta,Q);$$

2. *existe una función $\omega : [0,\infty] \to [0,\infty]$ con $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$ y tal que*

$$F(y,r,L_{xy}\zeta,Q) - F(x,r,\zeta,L_{yx}Q) \leq \omega(d(x,y))$$

para todo x,y,r,ζ,Q con $d(x,y) < min\{i_M(x), i_M(y)\}$.

Sea u una subsolución y v una supersolución de $F = 0$.
Entonces $u \leq v$ en M.

Demostración. Como este corolario es una variación del teorema principal (teorema 4.1) para toda la variedad M, veamos que se puede hacer una demostración análoga a la de éste. Podemos asegurar que los M_α del teorema 4.1 se alcanzan, ya que la variedad es compacta, y por tanto se puede aplicar el lema 3.12. Para la segunda parte del teorema 4.1 podemos hacer uso de los razonamientos dados en el corolario 4.6, y sabemos que con nuestras hipótesis podemos asegurar la condición 2 del teorema 4.1, luego la segunda parte de la demostración es análoga. □

Observación 4.14. Supongamos que F es propia y uniformemente continua con respecto a x. Entonces la condición (2) del Corolario anterior, se satisface cuando $F(x, r, \zeta, A)$ no depende de ζ sino que depende solamente de su norma $\|\zeta\|$ y de los autovalores de A. Por ejemplo, la función

$$F(x, r, \zeta, A) = r - (det_+(A))^3 \|\zeta\|^2 - f(x)(trace(A))^5$$

satisface las condiciones (1) y (2) del Corolario anterior, siempre que $f \geq 0$ y f sea uniformemente continua. Por lo tanto la ecuación

$$u - (det_+(D^2u))^3 \|\nabla u\|^2 - (\triangle u)^5 f = 0$$

tiene como mucho una solución de viscosidad en cualquier variedad compacta con curvatura positiva, solamente exigiendo que f sea continua y no negativa.

Corolario 4.15. *Sea M una variedad riemanniana compacta (no asumimos nada respecto a su curvatura). Supongamos que $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ satisface la siguiente condición de continuidad uniforme: que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, y) \leq \delta, P - L_{yx}(Q) \leq \delta I \Rightarrow F(y, r, L_{xy}\zeta, Q) - F(x, r, \zeta, P) \leq \varepsilon$$

para todo $x, y \in M$ con $d(x, y) < i_M$, $r \in \mathbb{R}$, $\zeta \in TM_x^*$, $P \in \mathcal{L}_s^2(TM_x, \mathbb{R})$, y $Q \in \mathcal{L}_s^2(TM_y, \mathbb{R})$. Asumimos también que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma(r - s) \leq F(x, r, \zeta, Q) - F(x, s, \zeta, Q) \text{ para todo } r \geq s.$$

Sea u una subsolución y v una supersolución de $F = 0$. Entonces $u \leq v$ en M. En particular hay a lo sumo una solución de viscosidad de $F = 0$.

Demostración. Como M es compacta, el radio de inyectividad i_M es positivo y la curvatura seccional de M está acotada en todo M, es decir $K \geq -K_0$.

Elegimos un r tal que $0 < 2r < i_M$. La función $\varphi(x,y) = d(x,y)^2$ es C^∞ en el conjunto $\{(x,y) \in M \times M : d(x,y) \leq 2r\}$. Supongamos que P y Q satisfacen la relación (4.1) del teorema 4.1, entonces por la observación 4.7, sabemos que

$$P - L_{yx}Q \leq \frac{3}{2} K_0 \alpha d(x,y)^2 I$$

siempre que $d(x,y) < r$. Por lo tanto la propiedad de continuidad de F nos da una función $\omega : [0,\infty] \to [0,\infty]$ con $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$ y tal que

$$F(y,r,\alpha_y^{-1}(x),Q) - F(x,r,-\alpha exp_x^{-1}(y),P) \leq \omega(\alpha d(x,y)^2 + d(x,y)).$$

En este caso no necesitamos la observación 4.9, ya que los M_α se alcanzan por ser M compacta, y por tanto tenemos el resultado.

□

4.2. Método de Perrón y Existencia

En esta sección adaptaremos el método de Perron adaptado para variedades riemannianas y las demostraciones son análogas en casi todos los casos a las de [10]. El resultado que no es inmediatamente trasladable al contexto de las variedades riemannianas es el siguiente:

Proposición 4.16. *Sea Ω abierto en M, $f \in USC(\Omega)$, $x \in \Omega$ y $(\zeta, A) \in J^{2,+}f(x)$. Supongamos también que f_n es una sucesión de funciones semicontinuas superiores en Ω tales que*

$$\begin{cases} (i) \text{ existe } x_n \in \Omega \text{ tal que } (x_n, f_n(x_n)) \to (x, f(x)), \\ (ii) \text{ si } y_n \in \Omega \text{ y } y_n \to y \in \Omega, \text{ entonces } \limsup_{n\to\infty} f_n(y_n) \leq f(y). \end{cases} \tag{4.2}$$

Entonces

$$\begin{cases} \text{existe } \widehat{x}_n \in \Omega, (\zeta_n, A_n) \in J^{2,+}f_n(\widehat{x_n}) \\ \text{tal que } (\widehat{x}_n, f_n(\widehat{x}_n), \zeta_n, A_n) \to (x, f(x), \zeta, A). \end{cases} \tag{4.3}$$

Demostración. Consideramos las funciones $f \circ exp_x$ y $f_n \circ exp_x$ definidos en un entorno de $0 \in TM_x$. Estas funciones satisfacen las propiedades (i) y (ii) del enunciado, si sustituimos f_n y f por $f_n \circ exp_x$ y $f \circ exp_x$, y en vez de en M trabajamos en TM_x.

Ahora usamos el corolario 3.3, y sabemos que $(\zeta, A) \in J^{2,+}(f \circ exp_x)(0)$.

Como el resultado es cierto para el caso $M = \mathbb{R}^n$ (ver [10]), tenemos una sucesión $\widehat{v}_n$ y $(\widetilde{\zeta_n}, \widetilde{A_n}) \in J^{2,+}(f_n \circ exp_x)(\widehat{v_n})$ tal que

$$(\widehat{v}_n, f_n \circ exp_x(\widehat{v}_n), \widetilde{\zeta}_n, \widetilde{A}_n) \to (0, f \circ exp_x(0), \zeta, A).$$

Sea $\widehat{x}_n = exp_x(\widehat{v}_n)$. Tenemos que $\widehat{x}_n \to x$ y $f_n(x_n) \to f(x)$. Como $(\widetilde{\zeta}_n, \widetilde{A}_n) \in J^{2,+}(f_n \circ exp_x)(\widehat{v}_n)$, existen funciones ψ_n tal que $f_n \circ exp_x - \psi_n$ alcanza un máximo en $\widehat{v}_n$, $\widetilde{\zeta}_n = d\psi_n(\widehat{v}_n)$ y $\widetilde{A}_n = d^2\psi_n(\widehat{v}_n)$. Definamos $\varphi = \psi_n \circ exp_x^{-1}$ en un entorno de x. Entonces $f_n - \varphi_n$ alcanza un máximo en $\widehat{x}_n$, asi que si llamamos $\zeta_n = d\varphi(\widehat{x}_n))$, $A_n = d^2\varphi(\widehat{x}_n)$, tenemos que $(\zeta_n, A_n) \in J^{2,+}f_n(\widehat{x}_n)$. Solo falta ver que $\zeta_n \to \zeta$ y $A_n \to A$. Pero esto se demuestra en una de las implicaciones (implicación ($\Leftarrow$)) de la demostración de la proposición 3.8, ya que nos demuestra que

$$(\zeta, A) \in \overline{J}^{2,-} f(x) \Leftrightarrow (\zeta, A) \in \overline{J}^{2,-}(f \circ exp_x)(0_x)$$

y por tanto se puede deducir por un razonamiento análogo que

$$(\zeta, A) \in \overline{J}^{2,+} f(x) \Leftrightarrow (\zeta, A) \in \overline{J}^{2,+}(f \circ exp_x)(0_x).$$

□

Dejemos claro ahora el problema que tratamos, definiendo lo que entendemos por el Problema de Dirichlet.

Sea Ω un conjunto arbitrario de M. Llamamos solución (respectivamente subsolución y supersolución) del problema de Dirichlet

$$(DP) \begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u = f & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

(siendo f continua), a una función $u \in C(\overline{\Omega})$ (respectivamente, $u \in USC(\overline{\Omega})$ y $u \in LSC(\overline{\Omega})$), esto es una solución de viscosidad (o subsolución o supersolución) de $F = 0$ en Ω y satisface $u(x) = 0$ (respectivamente $u(x) \leq 0$ o $u(x) \geq 0$) para $x \in \partial\Omega$ (notamos que esta formulación impone la condición frontera en un sentido estricto). Recordamos que asumimos siempre que F es propia y, a menos que se diga lo contrario, continua. Para discutir el método de Perrón, usaremos la siguiente notación: si $u : \Omega \to [-\infty, \infty]$, donde $\Omega \in M$, entonces

$$\begin{cases} u^*(x) = \text{lím}_{r \downarrow 0}\, sup\{u(y) : y \in \Omega \text{ y } d(y,x) \leq r\}, \\ u_*(x) = \text{lím}_{r \downarrow 0}\, inf\{u(y) : y \in \Omega \text{ y } d(y,x) \leq r\}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Se llama a u^* la envoltura semicontinua superior de u; es la función semicontinua superior más pequeña (con valores en $[-\infty, \infty]$) que satisface $u \leq u^*$. De la misma forma u_* es la envoltura semicontinua inferior de u.

Los dos siguientes lemas, que son también necesarios para demostrar el método de Perron, tienen una demostración análoga a la que aparece en [10], y que adaptamos para variedades riemannianas.

Lema 4.17. *Sea $\Omega \in M$ localmente compacto, $F \in LSC(\Omega \times \mathbb{R} \times TM \times BM)$, y sea $\mathbb{F}$ una familia de soluciones de $F \leq 0$ en Ω. Sea $w(x) = sup\{u(x) : u \in \mathbb{F}\}$ y asumamos que $w^*(x) < \infty$ para $x \in \Omega$. Entonces w^* es una solución de $F \leq 0$ en Ω.*

Demostración. Supongamos que $z \in \Omega$ y $(\zeta, A) \in J^{2,+}w^*(z)$. Queremos demostrar que $F(z, w^*(z), \zeta, A) \leq 0$. Claramente, por la definición de w^*, podemos elegir una sucesión $(x_n, u_n) \in \Omega \times \mathbb{F}$ tal que $(x_n, u_n(x_n)) \to (z, w^*(z))$ y que se tenga (4.2) con $f = w^*$. Por tanto, por la existencia de valores que satisfacen (4.3) (usando la proposición 4.16) y el hecho de que cada u_n es una subsolución, podemos pasar al límite en la relación $F(\widehat{x}_n, u_n(\widehat{x}_n), \zeta_n, A_n) \leq 0$ para encontrar $F(z, w^*(z), \zeta, A) \leq 0$ como queríamos. □

Lema 4.18. *Sea Ω abierto y sea u solución de $F \leq 0$ en Ω. Si u_* no es supersolución en algún punto $\widehat{x}$, es decir que existe $(\zeta, A) \in J^{2,-}u_*(\widehat{x})$ para el que $F(\widehat{x}, u_*(\widehat{x}), \zeta, A) < 0$, entonces para cada pequeño $r > 0$ hay una subsolución f_r de $F \leq 0$ en Ω que satisface*

$$\begin{cases} f_r(x) \geq u(x) & y \quad \sup_{\Omega}(f_r - u) > 0 \\ f_r(x) = u(x) & para\ x \in \Omega, d(x, \widehat{x}) \geq r \end{cases} \tag{4.5}$$

Demostración. Sea $z \in \Omega$ y tal que

$$F(z, u_*(z), \zeta, A) < 0 \quad \text{para algún } (\zeta, A) \in J^{2,-}u_*(z). \tag{4.6}$$

Entonces por continuidad

$$u_{\delta,\gamma}(x) = u_*(z) + \delta + \langle \zeta, exp_z^{-1}(x) \rangle + \frac{1}{2}\langle A(exp_z^{-1}(x)), exp_z^{-1}(x) \rangle - \gamma d(x,z)^2$$

es una solución clásica de $F \leq 0$ en $B_r = \{x : d(x, z) < r\}$ para todos $r, \delta, \gamma > 0$ pequeños. Como

$$u(x) \geq u_*(x) \geq u_*(z) + \langle \zeta, exp_z^{-1}(x) \rangle + \frac{1}{2}\langle A(exp_z^{-1}(x), exp_z^{-1}(x) \rangle - o(d(x,z)^2)$$

si elegimos $\delta = (\frac{r^2}{8})\gamma$ entonces $u(x) > u_{\delta,\gamma}(x)$ para $\frac{r}{2} \leq d(x, z) \leq r$ si r es suficientemente pequeño y entonces por lema 4.17, la función

$$f_r(x) = \begin{cases} max\{u(x), u_{\delta,\gamma}(x)\} & si \quad d(x,z) < r \\ u(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es solución de $F \leq 0$ en Ω. La última observación es que en cada entorno de z hay puntos tales que $f_r(x) > u(x)$; de hecho, por definición, hay una sucesión $(x_n, u(x_n))$ que converge a $(z, u_*(z))$ y entonces

$$\lim_{n\to\infty} (f_r(x_n) - u(x_n)) = u_{\delta,\gamma}(z) - u_*(z) = u_*(z) + \delta - u_*(z) > 0.$$

Luego hemos encontrado una f que sería según el enunciado f_r, y que cumple las condiciones exigidas. □

Teorema 4.19 (Método de Perrón). *Suponemos que podemos aplicar el criterio de comparación para* (DP)*, es decir, si* w *es una subsolución de* (DP) *y* v *es una supersolución de* (DP)*, entonces* $w \leq v$*. Supongamos también que existe una subsolución* $\underline{u}$ *y una supersolución* $\overline{u}$ *de* (DP) *que satisface la condición frontera* $\underline{u}_*(x) = \overline{u}^*(x) = f(x)$ *para* $x \in \partial\Omega$*. Entonces*

$$W(x) = sup\{w(x) : \underline{u} \leq w \leq \overline{u} \text{ y } w \text{ es una subsolución de } (DP)\} \tag{4.7}$$

es una solución de (DP)*.*

Demostración. Observamos que $\underline{u}_* \leq W_* \leq W \leq W^* \leq \overline{u}^*$ y en particular, $W_* = W = W^* = f$ en $\partial\Omega$. Por el lema 4.17, obtenemos que W^* es una subsolución de (DP) y por tanto, por comparación, $W^* \leq \overline{u}$. Se sigue de la definición de W que $W = W^*$ (luego W es una subsolución). Si W_* no es supersolución en algún punto $\widehat{x} \in \Omega$, sea W_k la que nos da el lema 4.18. Claramente $\underline{u} \leq W_k$ y $W_k = f$ en $\partial\Omega$ para k suficientemente pequeño. Por comparación $W_k \leq \overline{u}$ y como W es la subsolución maximal entre $\underline{u}$ y $\overline{u}$, llegamos a la contradicción $W_k \leq W$. Por lo tanto W_* es una supersolución de (DP) y entonces por comparación para (DP), $W^* = W \leq W_*$, que demuestra así que W es continua y es una solución. □

Con esto, podemos probar, o adaptar, para el caso de segundo orden el teorema 6.17 de [5].

Teorema 4.20. *Sea* M *una variedad riemanniana con un radio de inyectividad positivo y curvatura seccional acotada, y sea* $G : M \times TM^* \times TM^{2,s} \to \mathbb{R}$ *elíptica degenerada y uniformemente contínua como indicaba el corolario 4.8. Supongamos que la función* $x \to G(x, 0, 0)$ *está acotada en* M*. Entonces existe una única solución de viscosidad acotada de la ecuación*

$$u + G(x, du, d^2u) = 0$$

en M*.*

Demostración. En este caso podemos hacer una demostración análoga a la del corolario 4.8, usando que en este caso nuestra $F(x, r, \zeta, P) = r + G(x, \zeta, P)$ ya que como la curvatura seccional está acotada sabemos que si P, Q satisfacen la condición (4.1) del teorema 4.1, entonces por la observación 4.7, sabemos que $P - L_{xy}(Q) \leq \frac{3}{2}K_0\alpha d(x, y)^2 I$. Y por la condición de continuidad uniforme sabemos que existe una función $\omega : [0, \infty] \to [0, \infty]$ con $\lim_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$ y tal que

$$F(y, r, \alpha exp_y^{-1}(x), Q) - F(x, r, -\alpha exp_x^{-1}(y), P) =$$

$$G(y, \alpha exp_y^{-1}(x), Q) - G(x, -\alpha exp_x^{-1}(y), P) \leq \omega(\alpha d(x,y)^2 + d(x,y)),$$

ya que por ser $F(x, r, \zeta, P) = r + G(x, \zeta, P)$, y por la continuidad de G.

Además también se cumple la condición de que existe un $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma(r - s) \leq F(x, r, \zeta, Q) - F(x, s, \zeta, Q) \quad \text{para todo} \quad r \geq s,$$

ya que con nuestrá expresión de F basta con que tomemos $\gamma = 1$.

Si suponemos que $-A \leq G(x, 0, 0) \leq A$, entonces es fácil ver que $u = -A$ es una subsolución de $F = 0$ y que $v = A$ es una supersolución. Ahora aplicando el teorema 4.1 sabemos que hay solución única, y con el Método de Perrón que existe solución, por tanto obtenemos lo que decía el enunciado. □

Observación 4.21. Si M tiene curvatura no negativa, entonces la suposición de continuidad uniforme de G se puede sustituir por una continuidad global y una continuidad uniforme de las variables x y du (o, en muchos casos cuando G no depende de ζ y A sino de $\|\zeta\|$ y de los autovalores de A, solo se necesita sustituirlo por la continuidad uniforme de x; ver observación 4.14).

Si M es compacta, tenemos un enunciado más elegante.

Corolario 4.22. *Sea M una variedad riemanniana compacta, y $G : M \times TM^* \times TM^{2,s} \to \mathbb{R}$ elíptica degenerada y uniformemente continua en el sentido del Corolario 4.8. Entonces existe una única solución de viscosidad de la ecuación $u + G(x, du, d^2u) = 0$ en M.*

4.3. Ejemplos

De los ejemplos que se incluyen en [10] para una F propia, podemos adaptar la mayoría al entorno de variedades riemannianas. En particular como ya hemos visto, las funciones del tipo $(x, r, \zeta, A) \to -trace(A)$ son elípticas degeneradas. Eso también es cierto para muchas funciones que dependen de los autovalores de A, tales como menos el mínimo autovalor (o el máximo autovalor), y además las combinaciones no decrecientes y las sumas de estas, son también elípticas degeneradas.

Se pueden encontrar ejemplos de ecuaciones no lineales a las que se les puede aplicar los resultados vistos de existencia y unicidad de soluciones de viscosidad. Por ejemplo, se puede demostrar que, para cada variedad compacta de curvatura positiva, la ecuación

$$\text{máx}\{u - \lambda_1(D^2u)\|\nabla u\|^p - (\Delta u)^{2q+1}\|\nabla u\|^r - (det_+(D^2u))^{2k+1}f^2, u - g\} = 0$$

donde λ_1 es el mínimo autovalor de la función (en este caso de la hessiana D^2u) y $p, q, r, k \in \mathbb{N}$, tiene una única solución de viscosidad si pedimos solamente que f y g sean continuas. Esto nos da una idea de la generalidad de los resultados anteriormente vistos.

Vamos a aplicar nuestros resultados a una ecuación clásica, que es la de Yamabe, que ha sido ampliamente estudiada y resuelta usando métodos variacionales. No vamos a ver nada nuevo sobre la ecuación de Yamabe, simplemente podemos aplicar nuestros resultados a esta importante ecuación que viene de un problema geométrico (que por ejemplo aparece en [[2],pag. 126]).

Ejemplo 4.23 (La ecuación de Yamabe). Un problema fundamental en geometría conforme es saber si existe o no una métrica conforme g' con una constante escalar de curvatura S' en una variedad riemanniana compacta n-dimensional (M, g), con $n \geq 3$ (ver [1], [32]). Eso es equivalente a resolver la ecuación

$$-4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + S(x)u = S'u^{\frac{n+2}{n-2}}, \qquad (Y)$$

donde S es la curvatura escalar de g. Se puede escribir esta ecuación de la forma $F = 0$, donde

$$F(x, r, \zeta, A) = S(x)r - S'r^{\frac{n+2}{n-2}} - 4\frac{n-1}{n-2}trace(A) = 0.$$

Claramente, F es elíptica degenerada. Supongamos que S es positivo en todo punto y que $S' \leq 0$. Entonces, por compacidad, existe $\gamma > 0$, tal que $S(x) \geq \gamma$ para todo $x \in M$. De acuerdo con la observación 4.4, para verificar las condiciones 1 y 2 del teorema 4.1, para $\Omega = M$ (es decir obtener condiciones para que se de el teorema en toda la variedad M, ver observación 4.9), podemos asumir que r, s están en un intervalo acotado. Tenemos que

$$F(y, r, L_{xy}\zeta, Q) - F(x, r, \zeta, Q) \leq r|S(y) - S(x)|,$$

por tanto, como S es uniformemente continuo en M y r está acotado, deducimos que F satisface la condición 2. del corolario 4.13. Por otro lado, si $r \geq s$ entonces

$$F(x, r, \zeta, A) - F(x, s, \zeta, A) = S(x)(r - s) - S'(r^{\frac{n+2}{n-2}} - s^{\frac{n+2}{n-2}}) \geq \gamma(r - s),$$

entonces la condición 1 también se satisface. Por ello, tenemos que como mucho hay una solución de viscosidad de $F = 0$. Aseguramos la existencia usando el método de Perron. En total vemos que si S es positiva en todo punto, y $S' \leq 0$ entonces existe una única solución de viscosidad u de (Y).

Capítulo 5

Puntos fijos y ceros para funciones conjunto-valoradas en variedades riemannianas

En este capítulo vamos a abordar otro tipo de problemas. En particular, vamos a aplicar el cálculo subdiferencial para obtener teoremas del punto fijo, y en general, soluciones de ecuaciones.

Aquí nos situamos también en las variedades riemannianas pero en este caso las aplicaciones que aparecen serán en general conjunto-valoradas del tipo $F : M \rightrightarrows M$. Además veremos que las derivadas gráficas nos serán útiles para garantizar la existencia de puntos fijos y ceros en las aplicaciones conjunto-valoradas y resultados tales como los de la función inversa. De hecho usando derivadas contingentes podemos probar una adaptación del teorema de la función inversa de Ekeland (que generalizamos aqui para el ambiente de variedades riemannianas). También haremos alusión a los cálculos que hacen Mordukovich y Outrata ([24]), donde usan derivadas contingentes de la subdiferencial de una función dada y lo aplican al problema de contacto con fricción no monótona.

Vamos a introducir la noción de derivada gráfica para aplicaciones conjunto-valoradas en variedades riemannianas, y obtendremos un resultado muy general que nos garantiza la existencia de solución para inclusiones donde la aplicación conjunto-valorada es la suma de una aplicación que satisface una condicion Lipschitz (que luego definiremos) y otra aplicación cuyas derivadas gráficas satisfacen otra condición, en el caso en que la variedad riemanniana tenga una estructura de grupo de Lie. También veremos las propiedades de "Lipschitzianidad" que tendrán las soluciones, de las que aseguramos su existencia.

Vamos a suponer que las aplicaciones conjunto-valoradas $F : M \rightrightarrows M$ son propias y satisfacen lo siguiente:

1. $d(z, F(x))$ se alcanza para todo $x, z \in M$

2. Para todo $z_0 \in M$, la función $\varphi(x) = d(z_0, F(x))$ es semicontinua inferior.

Para tener la condición (1), necesitamos que $F(x)$ sea cerrado. Si en particular $F(x)$ es compacto o finito-dimensional, queda garantizado que (1) se cumple.

Necesitamos la condición (2), para asegurar la existencia de la subdiferencial de la función φ en un conjunto denso de puntos. Esto no es una restricción muy fuerte, se consigue con hipótesis muy naturales, tales como la semicontinuidad superior de F.

Recordamos que una aplicación conjunto-valorada $F : X \rightrightarrows X$ es semicontinua superior en x_0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $F(B(x_0, \delta)) \subset F(x_0) + B(0, \varepsilon)$. Por tanto veamos que así podemos asegurar que $\varphi(x) = d(z_0, F(x))$ es semicontinua inferior.

Tomamos una sucesión $x_n \to x_0$, y sabemos que existe un N tal que para todo $n \geq N$, $F(x_n) \subset F(x_0) + B(0, \varepsilon)$, es decir $d(F(x_0), F(x_n)) < \varepsilon$ por tanto podemos afirmar que

$$\varepsilon > d(F(x_0), F(x_n)) \geq d(z_0, F(x_0)) - d(z_0, F(x_n))$$

es decir

$$\varepsilon > \varphi(x_0) - \varphi(x_n)$$

luego haciendo tender ε a cero y $n \to \infty$

$$0 \geq \varphi(x_0) - \liminf_{x_n \to x_0} \varphi(x_n)$$

luego φ es semicontinua inferior.

Empezamos definiendo lo que se entiende por derivada gráfica.

Definición 5.1. *Sea M una variedad riemanniana. Consideramos una aplicación conjunto-valorada $G : M \rightrightarrows M$, y un punto $x_0 \in M$. La derivada gráfica (o derivada contingente) de G en x_0 para $y_0 \in G(x_0)$ es la aplicación conjunto-valorada $DG(x_0|y_0) : T_{x_0}M \to T_{y_0}M$ definida por*

$$v \in DG(x_0|y_0)(h) \textit{ si y solo si } \exists h_n \in T_{x_0}M, \exists v_n \in T_{y_0}M, \exists t_n \downarrow 0 \textit{ tal que}$$

$$(h, v) = lim_n(h_n, v_n) \textit{ y } exp_{y_0}(t_n v_n) \in G(exp_{x_0}(t_n h_n))$$

Cuando consideramos como M un espacio de Hilbert, la anterior definición es equivalente a la definición de derivada gráfica via el cono tangente que introdujo J.P. Aubin en [1]. La derivada gráfica de una función univalorada coincide con su diferencial siempre que la función sea diferenciable.

A continuación vamos a dar un lema crucial para la demostración de los resultados principales de este capítulo. Entenderemos que cada producto escalar se hace en el espacio tangente en el que se encuentren los vectores que multiplicamos.

Lema 5.2. *Sea M una variedad riemanniana. Sea $G : M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada, y definimos $\varphi : M \to \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = d(z_0, G(x))$. Asumimos que $\zeta \in D^-\varphi(x_0)$, con $\varphi(x_0) > 0$. Si $y_0 \in G(x_0)$ satisface que $\varphi(x_0) = d(y_0, z_0)$, $v \in DG(x_0|y_0)(h)$ y la función $x \to d^2(x, z_0)$ es C^2 en y_0, entonces llegamos a que*

$$\langle \zeta, h \rangle \leq \langle \frac{-exp_{y_0}^{-1}(z_0)}{d(y_0, z_0)}, v \rangle,$$

y por tanto para $h \neq 0$, tenemos

$$\|\zeta\| \geq \langle \frac{exp_{y_0}^{-1}(z_0)}{d(y_0, z_0)}, \frac{v}{\|h\|} \rangle$$

mientras que

$$\langle \frac{-exp_{y_0}^{-1}(z_0)}{d(y_0, z_0)}, v \rangle \geq 0$$

cuando $h = 0$.

Demostración. Sabemos que $(h, v) = lim(h_n, v_n)$ con $exp_{y_0}(t_n v_n) \in G(exp_{x_0}(t_n h_n))$ para una sucesión $\{t_n\} \downarrow 0$.

Por otro lado, por las caracterizaciones de la subdiferencial de viscosidad (ver teorema 3.28) como $\zeta \in D^-\varphi(x_0)$, por definición, tenemos que para cada carta $f : U \subset M \to H$ y $x_0 \in U$ (donde U es un conjunto abierto en M),

$$\liminf_{w \to 0} \frac{(\varphi \circ f^{-1})(f(x_0) + w) - \varphi(x_0) - \langle \eta, w \rangle}{\|w\|} \geq 0$$

cuando $\eta = \zeta \circ df^{-1}(f(x_0))$.

Así, obtenemos que

$$(\varphi \circ f^{-1})(f(x_0) + w) \geq \varphi(x_0) + \langle \eta, w \rangle + o(\|w\|)$$

para $\|w\|$ suficientemente pequeño. Si tomamos $f = exp_{x_0}^{-1}$, entonces $\eta = \zeta$, ya que $\eta = \zeta \circ dexp_{x_0}(0) = \zeta \circ id_{T_{x_0}M} = \zeta$. Si $w = exp_{x_0}^{-1}(x)$ entonces

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x) \rangle + o(d(x, x_0))$$

para x cerca de x_0. Se deduce por tanto que

$$d(exp_{y_0}(t_n v_n), z_0) \geq \varphi(exp_{x_0}(t_n h_n) \geq d(y_0, z_0) + \langle \zeta, t_n h_n \rangle + o(t_n||h_n\|)$$

luego

$$\langle \zeta, h_n \rangle \leq \frac{d(exp_{y_0}(t_n v_n), z_0) - d(y_0, z_0)}{t_n} + \frac{1}{t_n} o(t_n\|h_n\|),$$

lo que es equivalente a que

$$\langle \zeta, h_n \rangle \leq \frac{d^2(exp_{y_0}(t_n v_n), z_0) - d^2(y_0, z_0)}{t_n(d(exp_{y_0}(t_n v_n), z_0) + d(y_0, z_0))} + \frac{1}{t_n} o(t_n \|h_n\|).$$

Ahora definimos $\psi(x) = d^2(x, z_0)$, entonces

$$\psi'(y_0) = 2d(y_0, z_0) D_1 d(y_0, z_0)$$

y tenemos que

$$d^2(exp_{y_0}(t_n v_n), z_0) - d^2(y_0, z_0) = 2t_n d(y_0, z_0) D_1 d(y_0, z_0)(v_n) + \psi''(y_0)(t_n v_n) + o(t_n^2 \|v_n\|^2).$$

Luego llegamos a que

$$\langle \zeta, h_n \rangle \leq \frac{2t_n d(y_0, z_0) D_1 d(y_0, z_0)(v_n) + \|\psi''(y_0)\| t_n^2 \|v_n\|^2 + o(t_n^2 \|v_n\|^2)}{t_n(d(exp_{y_0}(t_n v_n), z_0) + d(y_0, z_0))} + \frac{1}{t_n} o(t_n \|h_n\|).$$

Ahora, haciendo tender $t_n \downarrow 0$, $h_n \to h$ y $v_n \to v$, tenemos que

$$\langle \zeta, h \rangle \leq \frac{2d(y_0, z_0) D_1 d(y_0, z_0)(v)}{2d(y_0, z_0)}.$$

Simplificando lo anterior llegamos a que

$$\langle \zeta, h \rangle \leq D_1 d(y_0, z_0)(v) = \langle \frac{-exp_{y_0}^{-1}(z_0)}{d(y_0, z_0)}, v \rangle.$$

Para la segunda parte, basta observar que cuando $h \neq 0$

$$\|\zeta\| \|h\| \geq \langle \zeta, -h \rangle \geq \langle \frac{exp_{y_0}(z_0)}{d(y_0, z_0)}, v \rangle$$

y cuando $h = 0$,

$$0 \leq \langle \frac{-expy_0(z_0)}{d(y_0, z_0)}, v \rangle.$$

□

La condición de diferenciabilidad de $d^2(., z_0)$ se satisface, por ejemplo, si i_M es infinito, o más general si i_M es más grande que la distancia entre z_0 y $G(x_0)$. Este lema se puede considerar como una especie de regla de la cadena, ya que, de hecho, cuando $g : M \to M$ es una función univalorada y diferenciable, tenemos que $D\varphi(x_0)(h) = \langle \frac{\partial d(z_0, g(x_0))}{\partial x}, Dg(x_0)(h) \rangle$.

Sin embargo la igualdad puede fallar en general, incluso cuando tratamos con funciones univaloradas. De hecho, al considerar, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = |x| + 1$, $z_0 = 0$, (luego $\varphi = g$), $0 \in D^- \varphi(0)$, $h = 1$ y $v = 1$; en este caso tenemos que $\langle \zeta, h \rangle = 0 < 1 = \langle 1, v \rangle$.

Ahora vamos a definir un tipo de propiedad Lipschitz para las aplicaciones conjunto-valoradas.

Definición 5.3. *Sea M una variedad riemanniana. Decimos que una aplicación es conjunto-valorada $H : M \rightrightarrows M$ tiene la propiedad de Aubin con módulo L siempre y cuando para todo $x_1, x_2 \in M$ y para todo $y_1 \in H(x_1)$, hay un $y_2 \in H(x_2)$ que satisface $d(y_1, y_2) \leq Ld(x_1, x_2)$.*

Es fácil ver que si H tiene la propiedad de Aubin con módulo L, entonces la función $\varphi(x) = d(z_0, H(x))$ es L-Lipschitz.

Ahora vamos a dar otra propiedad para la derivada gráfica de algunas funciónes, que será condición necesaria para una de las hipótesis del teorema principal.

Definición 5.4. *Sea M una variedad riemanniana. Decimos que una aplicación conjunto-valorada $G : M \rightrightarrows M$ satisface la condición de derivabilidad débil, (WDC) para abreviar (weak derivative condition), para una constante positiva K_0, si para cada $x_0, z_0 \in M$ tal que $d(G(x_0), z_0) < i_M(z_0)$, hay $h \in T_{x_0}M$, $\|h\| = 1$, y $v \in DG(x_0|y_0)(h)$ tal que $\langle exp_{y_0}^{-1}(z_0), v\rangle \geq K_0 d(z_0, y_0)$, donde $y_0 \in G(x_0)$ con $d(z_0, G(x_0)) = d(y_0, z_0)$.*

En el teorema siguiente, vamos a necesitar que la variedad riemanniana M que usamos tenga una estructura de grupo de Lie para que podamos sumar puntos de la variedad, y si además exigimos que el grupo de Lie sea abeliano la distancia será invariante por traslaciones (ver [14]).

Teorema 5.5. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano. Sea $a \in M$. Sea $G : B(a, R) \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada que satisface (WDC) para $K_0 > 0$. Sea $H : M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada y que tenga la propiedad de Aubin con módulo $L < K_0$. Asumimos también que para cada $x \in B(a, R)$, al menos uno de los conjuntos $G(x)$, $H(x)$ es compacto, y que $d(-H(x), G(x)) < i_M$. Entonces la ecuación $0_M \in F(x) = G(x) + H(x)$ tiene una solución en $B(a, R)$ siempre que $F(a) \cap B(0, R(K_0 - L)) \neq \emptyset$.*

Demostración. Una solución de la ecuación es un cero de la función $f(x) = d(0, F(x))$ que es a su vez igual a $d(G(x), -H(x))$ por ser grupo abeliano (donde $-H(x) := \{-x | x \in H(x)\}$). Asumimos por el contrario que no hay solución.

Para cualquier $x_0 \in B(a, R)$ tenemos que $f(x_0) > 0$. Sea $z_0 \in -H(x_0)$, sea $y_0 \in G(x_0)$ tal que $f(x_0) = d(z_0, y_0)$ y $\zeta \in \partial_P f(x_0)$. La desigualdad proximal nos dice que hay una constante positiva σ, tal que para cada x cerca de x_0, tenemos que:

$$d(G(x), -H(x)) = f(x) \geq d(z_0, y_0) + \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x)\rangle - \sigma d(x, x_0)^2,$$

esto es

$$d(G(x), -H(x)) - \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x)\rangle + \sigma d(x, x_0)^2 \geq d(z_0, y_0) - \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x_0)\rangle,$$

entonces

$$d(z_0, -H(x)) + d(z_0, G(x)) - \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x)\rangle + \sigma d(x, x_0)^2 \geq d(z_0, y_0) - \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x_0)\rangle.$$

Si definimos una función $\psi(x) = d(z_0, -H(x)) + d(z_0, G(x)) - \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x)\rangle + \sigma d(x, x_0)^2$, tenemos que ψ tiene un mínimo local en x_0, entonces

$$0 \in \partial_P \psi(x_0) = -\zeta + \partial_P(h + \varphi)(x_0)$$

donde $h(x) = d(z_0, -H(x))$ y $\varphi(x) = d(z_0, G(x))$.

Para concluir lo anterior, hemos usado que la función $x \to \langle -\zeta, exp_{x_0}^{-1}(x)\rangle + \sigma d(x, x_0)^2$ es C^2 cerca de x_0, y tiene derivada $-\zeta$ ya que

$$\partial_P(\langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}()\rangle)(x_0) = \langle \zeta, dexp_{x_0}^{-1}(x_0)\rangle = \langle \zeta, Id_{TM_{x_0}}\rangle = \zeta.$$

Por lo tanto, para este $\zeta \in \partial_P(h + \varphi)(x_0)$, de acuerdo con la regla de la suma fuzzy (mirar Teorema 3.25), para cada $\varepsilon > 0$, existen $x_1, x_2 \in M$, $\zeta_2 \in \partial_P h(x_2)$ y $\zeta_1 \in \partial_P \varphi(x_1)$ tales que

$$d(x_i, x_0) < \varepsilon, \quad |h(x_2) - h(x_0)| < \varepsilon, \quad |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

y

$$\|\zeta - (L_{x_1 x_0}(\zeta_1) + L_{x_2 x_0}(\zeta_2))\|_{x_0} < \varepsilon,$$

porque h es L-Lipschitz. Entonces tenemos que

$$\|\zeta\| \geq \|L_{x_1 x_0}(\zeta_1) + L_{x_2 x_0}(\zeta_2)\|_{x_0} - \varepsilon \geq \|L_{x_1 x_0}(\zeta_1)\|_{x_0} - \|L_{x_2 x_0}(\zeta_2)\|_{x_0} - \varepsilon$$

con $\zeta_1 \in \partial_P \varphi(x_1)$ y $\|L_{x_2 x_0}(\zeta_2)\|_{x_0} \leq L$ (porque $\|\zeta_2\|_{x_2} \leq L$ y sabemos que $L_{x_2 x_0}$ es una isometria).

Ahora si aplicamos la condición (WDC) de G a x_1 y z_0, existe $h_1 \in TM_{x_1}$, con $\|h_1\| = 1$ y $v_1 \in DG(x_1|y_1)(h_1)$ tal que $\langle exp_{y_1}^{-1}(z_0), v_1\rangle \geq K_0 d(z_0, y_1)$. Entonces podemos aplicar el lema anterior (ya que $d(-H(x), G(x)) \leq i_M$ implica que $d^2(., z_0)$ es C^2 en y_0, por tanto en y_1 también ya que es un punto que lo elegimos tan cerca de y_0 como sea necesario) y deducimos que

$$\|\zeta_1\| \geq \langle \frac{exp_{y_1}^{-1}(z_0)}{d(y_1, z_0)}, v_1\rangle \geq K_0.$$

Juntando todo, $\|\zeta\| \geq \|L_{x_1 x_0}(\zeta_1)\|_{x_0} - \|L_{x_2 x_0}(\zeta_2)\|_{x_0} - \varepsilon \geq K_0 - L - \varepsilon$, y haciendo tender ε a 0, tenemos que $\|\zeta\| \geq K_0 - L$. Ahora aplicando el Principio del Decrecimiento (ver Teorema 3.26) obtenemos la contradicción:

$$0 \leq \inf\{f(x) : x \in B(a, R)\} \leq f(a) - R(K_0 - L) < 0$$

(ya que $f(a) = d(0, F(a)) < R(K_0 - L)$). Por tanto necesariamente existe un $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = 0$ luego $0 \in F(x_0)$.

□

Observaciones 5.6. 1. Tenemos que señalar que en el teorema anterior, podemos considerar cualquier otro punto z_0 en vez de 0_M, y el resultado se tendría con una demostración análoga.

2. Podemos usar el lema 5.2, con la subdiferencial proximal ya que

$$\partial_P f(x_0) \subset D^- f(x_0).$$

3. Cuando tenemos que $H \equiv 0$, las hipótesis en el Teorema 5.5 se suavizan. Para empezar, solo necesitamos que $\varphi(x) = d(0_M, G(x))$ sea semicontinua inferior, que es una condición bastantes débil.

   De hecho, si por ejemplo consideramos la función uni-valorada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = sign(x)$, observamos que la condición de continuidad no es imprescindible.

   Además la condición (WDC) sería lo siguiente: *para cada $x_0 \in M$, hay un $h \in TM_{x_0}$, $\|h\| = 1$, y $v \in DG(x_0|y_0)(h)$ tal que $\langle \frac{exp_{y_0}^{-1}(0_M)}{d(0_M, y_0)}, v\rangle \geq K_0$, donde $y_0 \in G(x_0)$ satisface que $d(0_M, G(x_0)) = d(0_M, y_0)$.*

   Además si $H \equiv 0$ no necesitamos exigir que M tenga estructura de grupo de Lie, y podemos reemplazar 0_M con cualquier punto dado p_0.

Después del teorema 5.5, podemos plantearnos el siguiente problema similar

$$0_M \in F(x) = G(x) + P(y) + H(x),$$

donde $P : X \to M$ es una función K-Lipschitz definida en X, un espacio métrico de parámetros. En este caso, puede ser útil conocer algo sobre las propiedades de continuidad de la aplicación solución $S : X \rightrightarrows M$ definida como

$$S(y) := \{x : 0_M \in G(x) + P(y) + H(x)\};$$

y formalmente llegamos a lo siguiente.

Teorema 5.7. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano. Sean H y G aplicaciones conjunto-valoradas que satisfacen las hipótesis del Teorema 5.5 para $R = \infty$. Asumimos que*

$$d(-H(x), G(x) + P(y)) \leq i_M$$

para todo $x \in M$, $y \in X$. Entonces, para cada $y \in X$, la ecuación $0_M \in F(x) = G(x)+P(y)+H(x)$ tiene una solución, y la aplicación conjunto-valorada solución $S : X \rightrightarrows M$, $y \to S(y) := \{x : 0_M \in G(x) + P(y) + H(x)\}$ tiene la propiedad de Aubin con módulo $\frac{K}{K_0 - L}$.

Demostración. Para un punto dado $y \in X$, la aplicación $G(x)+P(y)$ satisface la condición (WDC) porque la cumple G. Del Teorema 5.5 sabemos que , dado un y_1 tenemos que $x_1 \in S(y_1)$. Tomando ahora otro punto y_2, y usando el Teorema 5.5 para las aplicaciones $H(.)$ y $G(.) + P(y_2)$ con $R' = \frac{d(y_1,y_2)K}{K_0-L}$ para encontrar un $x_2 \in S(y_2) \cap B(x_1, R')$. Para conseguirlo, necesitamos que

$$G(x_1) + H(x_1) + P(y_2) \cap B(0_M, (K_0 - L)R') \neq \emptyset,$$

y teniendo en cuenta que $0_M \in G(x_1) + H(x_1) + P(y_1)$, eso implica que

$$P(y_2) - P(y_1) \in B(0_M, (K_0 - L)R'),$$

que es cierto ya que hemos tomado $R' = \frac{d(y_1,y_2)K}{K_0-L}$, asi que

$$d(P(y_2), P(y_1)) \leq Kd(y_2, y_1) = (K_0 - L)R'.$$

Por lo tanto

$$d(x_2, x_1) \leq R' = \frac{K}{K_0 - L} d(y_1, y_2).$$

Luego hemos probado que dado un $x_1 \in S(y_1)$ podemos encontrar $x_2 \in S(y_2)$ que satisface la desigualdad anterior, y por tanto esto significa que S tiene la propiedad de Aubin con módulo $\frac{K}{K_0-L}$. □

Con esos resultados principales y más importantes, podemos deducir otros resultados, que mas adelante exponemos.

Además podemos comparar las ecuaciones que hemos considerado, con las que usaron Mordukhovich y Outrata ([24, sección 5]). Ellos consideraron ecuaciones del tipo

$$0 \in f(x, y) + Q(x, y),$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es una función continuamente diferenciable, y $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación conjunto-valorada definida de la siguiente forma:

$$Q(x, y) = \begin{cases} \partial\varphi(g(x, y)) & \text{si } g(x, y) \in \text{dom } \varphi \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función real extendida propia, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es continuamente diferenciable en los puntos en cuestión (es decir en $\text{dom}(\varphi)$), y $\partial\varphi(x_0)$ es la subdiferencial básica (que usan en [24]), que, en muchos casos, como en el ejemplo que vamos a ver ahora, coincide con la subdiferencial Frechet (en las funciones subdiferenciables regulares que incluyen las funciones continuas, convexas y las funciones máximo).

Observación 5.8. En [24] utilizan la siguiente definición de subdiferencial básica:

$$\partial\varphi(x) := D^* E_\varphi(x, \varphi(x))(1)$$

donde

$$E_{\varphi}(x) := \{\mu \in \mathbb{R}^n | \mu \geq \varphi(x)\},$$

$$D^*F(x,y)(y^*) := \{x^* | (x^*, -y^*) \in N((x,y); grafo(F))\}$$

(que es la coderivada) y

$$N(\overline{x}; \Omega) := Limsup_{x \to \overline{x}}[cono(x - \Pi(x; \Omega))]$$

con

$$\Pi(x; \Omega) := \{\omega \in cl\Omega | \|x - \omega\| = dist(x; \Omega)\}.$$

Las ecuaciones cuya existencia de solución garantiza el teorema 5.5, son por un lado menos generales que las de [24] ya que nosotros tomamos parámetros "x, y"separados y ellos toman funciones que dependen de dos variables. Pero visto de otra forma, nuestro resultado es menos restrictivo en la medida en que no exigimos existencia de solución, sino que la garantizamos, no exigimos que la función f sea C^1 ni que la función Q sea una subdiferencial.

Por otro lado, hay casos donde podemos aplicar ambos resultados como en la ecuación que aparece en [24, Sección 5] que corresponde a un problema de contacto con fricción no monótona y se describe de la siguiente forma:

$$0 \in Ay + p(x) + \partial\phi(\mathbf{B}y) \tag{β}$$

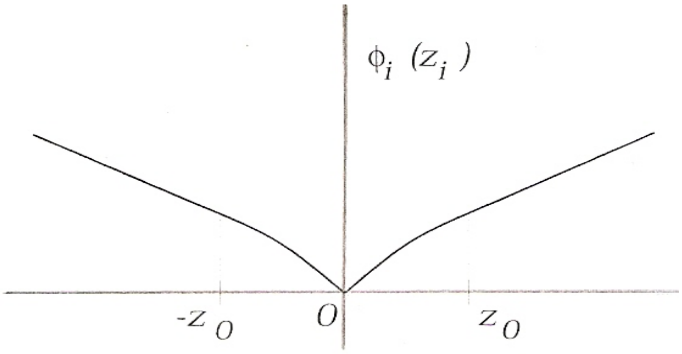
donde $x \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz de rigidez $m \times m$ definida positiva, $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un vector diferenciable relacionado con las fuerzas externas y $\mathbf{B}$ es una matriz $m \times m$ no singular definida por una fórmula de cuadratura. La función ϕ es de la forma

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(z_i) \quad z \in \mathbb{R}^m,$$

y las funciones φ_i que se utilizan en [24] son las siguientes

$$\varphi_i(z_i) = \begin{cases} (-k_1 + k_2 e_0)z_i + \frac{k_2}{2}(e_0)^2 & \text{si} \quad z_i < -e_0, \\ -k_1 z_i - \frac{k_2}{2}(z_i)^2 & \text{si} \quad z_i \in [-e_0, 0), \\ k_1 z_i - \frac{k_2}{2}(z_i)^2 & \text{si} \quad z_i \in [0, e_0), \\ (k_1 - k_2 e_0)z_i + \frac{k_2}{2}(e_0)^2 & \text{si} \quad z_i \geq e_0, \end{cases}$$

donde $e_0 > 0$, $k_1 > 0$, y $k_2 > 0$ son parámetros dados.



Por tanto si se cumple que

$$\sqrt{n}\|\mathbf{B}\|Max\{2k_1,k_2\} < \frac{1}{Max\{A^{-1}(h)|\|h\|=1\}} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

y la función $p(y)$ es Lipschitz, podemos aplicar el teorema 5.7 a la ecuación (β) ya que vamos a demostrar que $\partial\psi(\mathbf{B})$ tiene la propiedad de Aubin para la constante $\sqrt{n}\|\mathbf{B}\|Max\{2k_1,k_2\}$, la función Ay satisface la condición (WDC) para la constante $K=\frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

Vamos a justificar las afirmaciones anteriores:

Veamos primero que forma tiene cada una de las aplicaciones $\partial\varphi_i$, para analizar sus propiedades:

$$\partial\varphi_i(z_i) = \begin{cases} (-k_1+k_2e_0) & z_i < -e_0 \\ -k_1-k_2z_i & z_i \in [-e_0,0) \\ [-k_1,k_1] & \text{si } z_i = 0 \\ k_1-k_2z_i & z_i \in (0,e_0] \\ k_1-k_2e_0 & z_i > 0 \end{cases}$$

Luego cada una de las $\partial\varphi_i(y)$ es Lipschitz de constante k_2 para $y\neq 0$ y si incluimos el cero cada aplicación cumple la propiedad de Aubin para $Max\{2k_1,k_2\}$. Como $\psi(z)=\sum_{i=1}^n \varphi_i(z_i)$ en cada sumando podríamos sacar la misma constante $Max\{2k_1,k_2\}$ y por tanto la función $\partial\psi(z)$ tiene la propiedad de Aubin para $\sqrt{n}Max\{2k_1,k_2\}$.

Veamos que A cumple la condición (WDC). Dados x_0 y z_0 cualesquiera, tenemos que elegir h, con $\|h\|=1$ y $v\in DA(x_0|y_0)(h)$ tal que

$$\langle z_0-y_0,v\rangle \geq K\|z_0-y_0\|$$

para algún K. En este caso es fácil elegir el $y_0\in Ax_0$ ya que como es univalorada tenemos que $y_0=A(x_0)$. Por tanto $DA(x_0|y_0)(h)=A(h)$ y $v=A(h)$. Así que tenemos que elegir un h, (con $\|h\|=1$), tal que

$$\langle z_0-A(x_0),A(h)\rangle \geq K\|z_0-A(x_0)\|$$

Si tomamos $h' = \frac{A^{-1}(z_0 - A(x_0))}{\|z_0 - A(x_0)\|}$, tendríamos que

$$\langle \frac{z_0 - A(x_0)}{\|z_0 - A(x_0)\|}, A(h') \rangle = 1 \geq K$$

luego en este caso bastaría tomar $K \leq 1$. Pero necesitamos un h de norma 1. Luego tomamos $h = \frac{h'}{\|h'\|}$.

En este caso solo necesitamos asegurar que K cumple que

$$\frac{1}{\|h'\|} \geq K$$

luego bastaría tomar un K tal que

$$\frac{1}{max\{|A^{-1}(u)| \|u\| = 1\}} \geq K$$

y en particular podemos tomar K de la forma

$$K = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Luego la constante (WDC) de la función Ay es precisamente $\frac{1}{\|A^{-1}\|}$ y para aplicar el teorema 5.7 y asegurar soluciones para la ecuación (β) necesitamos que se cumpla la condición

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} > L$$

donde L es la constante de la propiedad de Aubin para $\partial\psi(\mathbf{B}y)$ es decir necesitamos que

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} > \sqrt{n}\|\mathbf{B}\| max\{2k_1, k_2\}.$$

Basándonos en las observaciones 5.6 somos capaces de demostrar el resultado que sigue, cuya demostración original se debe a Ekeland ([1] y [16]) para el caso donde tratamos con $M = H$ un espacio de Hilbert.

Teorema 5.9. *Sea M una variedad riemanniana completa y $F : M \rightrightarrows M$ una aplicación semicontinua superior con valores compactos. Fijamos un punto z_0. Supongamos que hay una constante C positiva tal que para cada $x \in M$ hay un $y \in F(x)$, con $d(z_0, y) = d(z_0, F(x))$, y un $h \in TM_x$, con $C\|h\| \leq d(z_0, y)$ tal que $exp_y^{-1}(z_0) \in DF(x|y)(h)$. Suponemos también que $d(z_0, F(x)) < i_{z_0}$. Entonces existe una solución x_0 de $z_0 \in F(x)$.*

Demostración. Si $h = 0$ para algún x, deducimos que $\langle \frac{-exp_y^{-1}(z_0)}{d(z_0,y)}, exp_y^{-1}(z_0)\rangle \geq 0$ usando el lema 5.2 (ya que hemos tomado como v del lema a $exp_y^{-1}(z_0)$).

En cualquier otro caso, podemos definir $v = \frac{exp_y^{-1}(z_0)}{\|h\|} \in DF(x|y)(\frac{h}{\|h\|})$ y por tanto

$$\langle \frac{exp_y^{-1}(z_0)}{d(z_0, y)}, v\rangle = \frac{d(z_0, y)^2}{\|h\| d(z_0, y)} = \frac{d(z_0, y)}{\|h\|} \geq C,$$

lo que nos indica que F cumple la condición (WDC) y podemos aplicar el teorema 5.5 con $H \equiv 0$, y usando en vez de 0_M, z_0 (como hemos visto en las observaciones 5.6).

$\square$

Vamos a usar también una condición un poco más fuerte que la WDC pero va a ser más fácil de verificar en la práctica (tiene un enunciado más sencillo).

Definición 5.10. *Decimos que una aplicación conjunto-valorada $G : M \rightrightarrows M$ satisface la condición fuerte de derivabilidad (derivative condition), (DC) para abreviar, para una constante positiva K_0 en $x_0 \in M$, si $d(x_0, G(x_0)) < i_M(x_0)$ y para todo $e \in TM_{y_0}$ con $\|e\| = 1$, $y_0 \in G(x_0)$, $d(x_0, G(x_0)) = d(x_0, y_0)$, existe $h \in TM_{x_0}$, $\|h\| = 1$, y $v \in DG(x_0|y_0)(h)$ tal que $\langle e, v\rangle \geq K_0$.*

Esta definición es simétrica, en el sentido de si damos esta otra definición: para todo $e \in TM_{y_0}$, $\|e\| = 1$, donde $y_0 \in G(x_0)$, tal que $d(x_0, G(x_0)) < i_M(x_0)$, existe $h \in TM_{x_0}$, $\|h\| = 1$, y $v \in DG(x_0|y_0)(h)$ tal que $\langle e, v\rangle \leq -K_0$, serían equivalentes. Esta otra la llamaremos $(-DC)$.

Por tanto si en vez de usar la condición (WDC) usamos la (DC) o la $(-DC)$ podemos deducir un resultado análogo para el teorema de existencia de ceros.

Corolario 5.11. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano, y $a \in M$. Sea $G : B(a, R) \subset M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada y $K_0 > 0$. Asumimos que G satisface (DC), o lo que es equivalente $(-DC)$, para K_0 en cada punto $x_0 \in B(a, R) \subset M$. Sea $H : M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin con módulo $L < K_0$. Asumimos también que al menos uno de los conjuntos $G(x)$, $H(x)$ es compacto y que $d(-H(x), G(x)) < i_M$ para cada x. Entonces la ecuación $0_M \in F(x) = G(x) + H(x)$ tiene una solución en $B(a, R)$ siempre que $F(a) \cap B(0, R(K_0 - L)) \neq \emptyset$.*

Ahora análogamente vamos a presentar un teorema que garantiza la existencia de puntos fijos, y cuya demostración y enunciado son similares a los del teorema 5.5.

Teorema 5.12. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano, y $a \in M$. Sea $G : B(a,R) \subset M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada, y $K_0 > 1$. Asumimos que G satisface la condición (WDC) para K_0. Sea $H : M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin con módulo $L < K_0 - 1$. Asumimos también que para cada $x \in B(a,R)$ al menos uno de los conjuntos $G(x)$ y $H(x)$ es compacto, y que $d(x - H(x), G(x)) < i_M$. Entonces la aplicación $F(x) = G(x) + H(x)$ tiene un punto fijo en $B(a,R)$ siempre que $F(a) \cap B(a, R(K_0 - L - 1)) \neq \emptyset$.*

Demostración. Una solución de $x \in F(x) = G(x) + H(x)$ es un cero de la función $f(x) = d(x, F(x))$, y por ser grupo abeliano, eso es igual a $f(x) = d(G(x), x - H(x))$ (por ser la distancia invariante por traslaciones). Podemos suponer lo contrario para llegar a contradicción, y afirmar que no hay solución. Luego, en este caso, para todo $x_0 \in B(a,R)$ y $\zeta \in \partial_P f(x_0)$ tenemos que $f(x_0) > 0$. Sea $z_0 \in x_0 - H(x_0)$ e $y_0 \in G(x_0)$ tal que $f(x_0) = d(G(x_0), x_0 - H(x_0)) = d(y_0, z_0)$. Por la desigualdad proximal tenemos que

$$d(G(x), x - H(x)) = f(x) \geq f(x_0) + \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x) \rangle - \sigma d(x, x_0)^2,$$

por tanto

$$d(G(x), x - H(x)) - \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x) \rangle \geq d(z_0, y_0) - \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x_0) \rangle - \sigma d(x, x_0)^2.$$

Si ahora definimos $\psi(x) = d(z_0, x - H(x)) + d(z_0, G(x)) - \langle \zeta, exp_{x_0}^{-1}(x) \rangle + \sigma d(x, x_0)^2$, podemos afirmar que ψ tiene un mínimo local en x_0, y por tanto

$$0 \in \partial_P \psi(x_0) = -\zeta + \partial(h + \varphi)(x_0)$$

ya que definimos $h(x) = d(z_0, x - H(x))$, $\varphi(x) = d(z_0, G(x))$,

y la función $x \to \langle -\zeta, exp_{x_0}^{-1} \rangle + \sigma d(x, x_0)^2$ es C^2 con derivada $-\zeta$. Entonces usando la regla Fuzzy de la Suma (ya que h es $(L+1)$-Lipschitz, podemos aplicar el Teorema 3.25), para cada $\varepsilon > 0$, existen x_1, x_2 y $\zeta_1 \in \partial_P \varphi(x_1)$, $\zeta_2 \in \partial_P h(x_2)$ tal que

1. $d(x_i, x_0) < \varepsilon$, $d(h(x_2), h(x_0)) < \varepsilon$ y $d(\varphi(x_1), \varphi(x0)) < \varepsilon$
2. $\|\zeta - (L_{x_1 x_0}(\zeta_1) + L_{x_2 x_0}(\zeta_2)\|_{x_0} < \varepsilon$.

Por lo tanto

$$\|L_{x_1 x_0}(\zeta_1) + L_{x_2 x_0}(\zeta_2)\|_{x_0} \leq \varepsilon + \|\zeta\|_{x_0}.$$

Dados x_1 y z_0, existe $h_1 \in T_{x_1}M$, $\|h_1\| = 1$ y $v_1 \in DG(x_1|y_1)(h_1)$ tal que

$$\langle exp_{y_1}^{-1}(z_0), v_1 \rangle \geq K_0 d(z_0, y_1)$$

porque G posee la condición (WDC).

Por otro lado, podemos aplicar el lema 5.2 ya que tenemos que $d(x-H(x), G(x)) < i_M$, luego podemos deducir que

$$\|\zeta_1\|_{x_1} \geq \langle \frac{exp_{y_1}^{-1}(z_0)}{d(y_1, z_0)}, \frac{v_1}{\|h_1\|} \rangle = \langle \frac{exp_{y_1}^{-1}(z_0)}{d(y_1, z_0)}, v_1 \rangle \geq K_0,$$

y por tanto

$$\|\zeta\| \geq \|L_{x_1x_0}(\zeta_1)\|_{x_0} - \|L_{x_2x_0}(\zeta_2)\|_{x_0} - \varepsilon \geq K_0 - \|L_{x_2x_0}(\zeta_2)\| - \varepsilon \geq K_0 - L - 1 - \varepsilon$$

ya que $\|\zeta_1\|_{x_1} = \|L_{x_1x_0}(\zeta_1)\|_{x_0}$ y $\|L_{x_2x_0}(\zeta_2)\|_{x_0} = \|\zeta_2\|_{x_2} \leq L + 1$.

Por último si usamos el principio de Decrecimiento (ver Teorema 3.26), obtenemos la siguiente contradicción:

$$0 \leq inf\{f(x) : x \in B(a, R)\} \leq f(a) - R(K_0 - L - 1) < 0,$$

ya que $f(a) = d(a, F(a)) < R(K_0 - L - 1)$.

□

Este teorema, además de que da un resultado importante, mejora aquellos del teorema 38 de [3], ya que este es para aplicaciones conjunto-valoradas y las hipótesis son menos restrictivas. El Teorema 38 de [3] nos garantiza una solución de

$$x \in g(x) + h(x)$$

bajo las siguientes hipótesis

1. $g : M \to M$ es una función uni-valorada diferenciable, $C-$Lipschitz en $B(x_0, R)$
2. $h : M \to M$ es una función (uni-valorada) $L-$Lipschitz,
3. $g(x) + h(x) \notin sing(x) \cup sing(g(x))$ para todo $x \in B(x_0, R)$,
4. $\langle L_{x,h(x)+g(x)}(h), L_{g(x),h(x)+g(x)}(dg(x)(h)) \rangle_{h(x)+g(x)} \leq K < 1$ para todo $x \in B(x_0, R)$ y $h \in TM_x$ con $\|h\|_x = 1$ y que
5. $L < 1 - K$ y $d(x_0, x_0 + h(x_0)) < R(1 - K - L)$.

Luego este teorema pide que ambas funciones sean Lipschitz, y en el teorema 5.12 solo necesitamos que H tenga la propiedad de Aubin y no necesitamos que sea diferenciable. Además la condición (4) es más fuerte que la condición (WDC).

Ahora podemos tener en cuenta, que cuando tratamos con funciones (univaloradas), la expresión de la derivada gráfica se puede dar explícitamente.

Suponemos que g es continua. Usaremos en vez de $Dg(x_0|g(x_0))(h)$, la expresión $Dg(x_0)(h)$, que en este caso es el conjunto de los límites de la forma $lim\frac{exp^{-1}_{g(x_0)}(g(exp_{x_0}(t_nh_n)))}{t_n}$, para sucesiónes $h_n \to h$ y $t_n \downarrow 0$.

Vamos a demostrar esa expresión. Sabemos, que por definición,

$$v \in Dg(x)(h) \Leftrightarrow \exists h_n \to h, \quad h_n \in T_{x_0}M, \quad \exists v_n \to v, \quad v_n \in T_{g(x_0)}M$$

$$\text{y } \exists t_n \downarrow 0 \text{ tal que } , \lim_n (h_n, v_n) = (h, v) \text{ y } exp_{g(x_0)}(t_nv_n) \in g(exp_{x_0}(t_nh_n)),$$

luego en este caso, tenemos que

$$exp_{g(x_0)}(t_nv_n) \equiv g(exp_{x_0}(t_nh_n))$$

por ser g univalorada. Por tanto, por esto último, tenemos que

$$t_nv_n = exp^{-1}_{g(x_0)}(g(exp_{x_0}(t_nh_n))) \Leftrightarrow v_n = \frac{exp^{-1}_{g(x_0)}(g(exp_{x_0}(t_nh_n)))}{t_n},$$

y así podemos deducir, que para todo $v \in Dg(x_0|g(x_0))(h) \equiv Dg(x_0)(h)$ existen sucesiones t_n, h_n tales que

$$v = \lim_n v_n = \lim_n \frac{exp^{-1}_{g(x_0)}(g(exp_{x_0}(t_nh_n)))}{t_n}.$$

Además, teniendo en cuenta todo esto, podemos afirmar que la condición (DC) en x_0 (para g univalorada), para K_0 constante positiva, es equivalente a la siguiente:

para todo $e \in T_{g(x_0)}M$, $\|e\| = 1$, asumiendo que $d(x_0, g(x_0)) < i_M(x_0)$, existen sucesiones $h_n \to h$ y $t_n \downarrow 0$, $\|h\| = 1$, tales que

$$\langle e, exp^{-1}_{g(x_0)}(g(exp_{x_0}(t_nh_n)))\rangle \geq t_nK_0. \tag{sDC}$$

De la misma forma podemos deducir una condición análoga a la $(-DC)$ en x_0 (para funciones univaloradas), para K_0 constante positiva, esto es que:

para todo $e \in TM_{g(x_0)}$, $\|e\| = 1$, asumiendo que $d(x_0, g(x_0)) < i_M(x_0)$, existen sucesiones $h_n \to h$ y $t_n \downarrow 0$, $\|h\| = 1$, tales que

$$\langle e, exp^{-1}_{g(x_0)}(g(exp_{x_0}(t_nh_n)))\rangle \leq -t_nK_0. \tag{$-sDC$}$$

Por lo tanto, para funciones univaloradas g, los teoremas 5.5 y 5.12 se pueden enunciar usando la condición (sDC) o la $(-sDC)$ en vez de la (WDC). En este caso no tenemos que asumir que $G(x)$ o $H(x)$ sean conjuntos compactos ya que para $g(x)$ lo tenemos (por ser un conjunto unipuntual). Y el resto de las condiciones seguirían igual.

Es decir obtenemos los siguientes corolarios, cuya demostración es inmediata (a partir de los teoremas 5.5 y 5.12):

Corolario 5.13. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano y $a \in M$. Sea $g : B(a,R) \subset M \to M$ una función continua, y $K_0 > 0$. Asumamos que satisface la condición (sDC) o la $(-sDC)$ para todo $x_0 \in B(a,R)$. Sea $H : M \to M$ una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin con modulo L, y $L < K_0$. Supongamos también que $d(-H(x), g(x)) < i_M$ para todo $x \in M$. Entonces la ecuación $0_M \in F(x) = g(x)+H(x)$ tiene una solución en $B(a,R)$ siempre que $F(a) \cap B(0, R(K_0-L)) \neq \emptyset$.*

Corolario 5.14. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano y $a \in M$. Sea $g : B(a,R) \subset M \to M$ una función continua, y $K_0 > 1$. Asumamos que satisface la condición (sDC) o la $(-sDC)$ para todo $x_0 \in B(a,R)$. Sea $H : M \to M$ una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin con modulo L, y $L+1 < K_0$. Supongamos también que $d(x - H(x), g(x)) < i_M$ para todo $x \in M$. Entonces la ecuación $x \in F(x) = g(x) + H(x)$ tiene una solución en $B(a,R)$ siempre que $F(a) \cap B(0, R(K_0 - L - 1)) \neq \emptyset$.*

Observación 5.15. La derivada gráfica de cualquier función univalorada $g : M \to M$, siempre contiene las derivadas direccionales laterales

$$g'(x_0, h) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{exp^{-1}_{g(x_0)}(g(exp_{x_0}(th)))}{t}$$

cuando existan. Este sería el caso de funciones diferenciables Gateaux por ejemplo, ya que una función $f : B(x,R) \to M$ es diferenciable Gateaux en $a \in B(x,R) \subset M$ si existe $T : TM_a \to TM_{f(a)}$ lineal tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{exp^{-1}_{f(a)}(f(exp_a(tv)))}{t} = T(v) \quad \forall v \in TM_a$$

Luego podemos usar las derivadas direccionales laterales para simplificar las condiciones del Teorema 5.5. Así la condición (WDC), se puede sustituir por lo siguiente, que para todo $x_0 \in B(a,R)$ o

$$\inf_{e \in T_{g(x_0)}M, \|e\|=1} \left(\sup_{h \in T_{x_0}M, \|h\|=1} \langle e, g'(x_0,h) \rangle \right) \geq K_0$$

o que

$$\sup_{e \in T_{g(x_0)}M, \|e\|=1} \left(\inf_{h \in T_{x_0}M, \|h\|=1} \langle e, g'(x_0,h) \rangle \right) \leq -K_0,$$

y el resto de las hipótesis del teorema se mantendrían.

Es decir obtendríamos el siguiente corolario:

Corolario 5.16. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano, y $a \in M$. Sea $g : B(a,R) \to M$ una función continua con derivadas direccionales laterales en cada punto. Supongamos que para una constante $K_0 > 0$, tenemos que para cada $x_0 \in B(a,R)$*

$$\inf_{e \in T_{g(x_0)}M, \|e\|=1} (\sup_{h \in T_{x_0}M, \|h\|=1} \langle e, g'(x_0,h) \rangle) \geq K_0$$

o que

$$\sup_{e \in T_{g(x_0)}M, \|e\|=1} (\inf_{h \in T_{x_0}M, \|h\|=1} \langle e, g'(x_0,h) \rangle) \leq -K_0.$$

Sea $H : M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin con módulo $L < K_0$. Supongamos además que $d(-H(x), g(x)) < i_M$ para todo $x \in M$. Entonces existe un x tal que $0_M \in F(x) = g(x) + H(x)$ siempre que $F(a) \cap B(a, R(K_0 - L)) \neq \emptyset$.

Demostración. Si tomamos $\varepsilon > 0$ bastante pequeño para que $F(a) \cap B(a, R(K_0 - L - \varepsilon)) \neq \emptyset$, tenemos que para cada $e \in T_{g(x_0)}M$, $\|e\| = 1$ existe $h \in T_{x_0}M$ tal que $\langle e, g'(x_0,h) \rangle \geq K_0 - \varepsilon$ (o $\langle e, g'(x_0,h) \rangle < -K_0 + \varepsilon$ dependiendo de si tenemos la condición (1) o la (2)), y ahora aplicamos el Corolario 5.13 ya que la función g verifica la condición (sDC) (o la $(-sDC)$ dependiendo del caso). Y el resto de la prueba sería igual. □

Por tanto usando las expresiones anteriores, y haciendo lo análogo para el resultado de puntos fijos, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.17. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano, y $a \in M$. Sea $g : B(a,R) \to M$ una función continua con derivadas direccionales laterales en cada punto. Asumimos que para una constante positiva $K_0 > 1$, tenemos que para cada $x_0 \in B(a,R)$*

$$\inf_{e \in T_{g(x_0)}M, \|e\|=1} (\sup_{h \in T_{x_0}M, \|h\|=1} \langle e, g'(x_0,h) \rangle) \geq K_0 \tag{1}$$

o que

$$\sup_{e \in T_{g(x_0)}M, \|e\|=1} (\inf_{h \in T_{x_0}M, \|h\|=1} \langle e, g'(x_0,h) \rangle) \leq -K_0. \tag{2}$$

Sea $H : M \rightrightarrows M$ una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin con módulo $L < K_0 - 1$. Si asumimos que $d(x - H(x), g(x)) < i_M$ para todo $x \in M$, entonces $F = g + H$ tiene un punto fijo, siempre que $F(a) \cap B(a, R(K_0 - L - 1)) \neq \emptyset$.

Demostración. Si tomamos $\varepsilon > 0$ bastante pequeño para que $F(a) \cap B(a, R(K_0 - L - 1 - \varepsilon)) \neq \emptyset$, tenemos que para cada $e \in T_{g(x_0)}M$, $\|e\| = 1$ existe $h \in T_{x_0}M$ tal que $\langle e, g'(x_0, h)\rangle \geq K_0 - \varepsilon$ (o $\langle e, g'(x_0, h)\rangle < -K_0 + \varepsilon$ dependiendo de si tenemos la condición (1) o la (2)), y ahora aplicamos el Corolario 5.14 ya que la función g verifica la condición (sDC) (o la $(-sDC)$ dependiendo del caso). □

Con este corolario podemos deducir un resultado que nos permite asegurar que una función dada es sobreyectiva.

Corolario 5.18. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano y con un radio de inyectividad i_M infinito. Sea $g : M \to M$ una función continua con derivadas direccionales laterales en cada punto. Asumimos que para una constante positiva K_0, tenemos que para cada $x_0 \in M$*

$$\inf_{e \in T_{g(x_0)}M, \|e\|=1} \Big(\sup_{h \in T_{x_0}M, \|h\|=1} \langle e, g'(x_0, h)\rangle \Big) \geq K_0,$$

o que

$$\sup_{e \in T_{g(x_0)}M, \|e\|=1} \Big(\inf_{h \in T_{x_0}M, \|h\|=1} \langle e, g'(x_0, h)\rangle \Big) \leq -K_0.$$

Sea H una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin con módulo L y $L < K_0$. Entonces $g + H$, al igual que g es sobreyectiva.

Demostración. Dado un $y_0 \in M$, aplicando el corolario 5.16 a la función $g(x) - y_0$ y a la H dada, con $R = \infty$, obtenemos la existencia de un $x_0 \in M$ tal que $0_M \in g(x_0) - y_0 + H(x_0)$. Luego por tanto $y_0 \in g(x_0) + H(x_0)$, luego $g + H$ es sobreyectiva. Si consideramos el mismo enunciado para $H \equiv 0$ obtenemos que para un y_0 dado, podemos encontrar un $x_0 \in M$ tal que $y_0 \in g(x_0)$ que por ser g univalorada tenemos por tanto que $y_0 = g(x_0)$ (luego g es sobreyectiva). □

También podemos considerar el caso en que H sea constante, y por tanto es 0-Lipschitz (y tiene la propiedad de Aubin, claro está), lo que nos da un resultado interesante en sistemas dinámicos discretos, como mostramos a continuación.

Corolario 5.19. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano, $a \in M$ y $K_0 > 0$. Sea $g : B(a, R) \subset M \to M$ una función contínua. Supongamos que tiene derivadas direccionales laterales en todo punto, $g'(x_0, h)$, y además que para cada $x_0 \in B(a, R)$*

$$\inf_{e \in T_{g(x_0)}M, \|e\|=1} \Big(\sup_{h \in T_{x_0}M, \|h\|=1} \langle e, g'(x_0, h)\rangle \Big) \geq K_0$$

o que

$$\sup_{e \in T_{g(x_0)}M, \|e\|=1} \Big(\inf_{h \in T_{x_0}M, \|h\|=1} \langle e, g'(x_0, h)\rangle \Big) \leq -K_0.$$

Sea S un subconjunto cerrado de M, tal que $d(x, S)$ se alcanza para cada $x \in M$. Asumimos que $d(g(x), 0_M) < i_M(0_M)$. Entonces $g(B(a, R)) \cap S \neq \emptyset$ siempre que $d(g(a), S) \leq RK_0$.

Demostración. El resultado se sigue del corolario 5.16, aplicándolo a las funciones $-g$ y $H(x) = S$ (aplicación constante). $\square$

En [26] se prueba un teorema del Punto Fijo de Banach para aplicaciones conjunto-valoradas. Con nuestros resultados anteriores, podemos deducir un resultado similar para variedades riemannianas.

Teorema 5.20. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano. Asumamos que $H : M \rightrightarrows M$ es una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin para $L < 1$ (es decir es pseudo-contractiva), y que $d(-H(x), -x) < i_M$. Entonces H tiene un punto fijo. Además, $B(a, R)$ contiene un punto fijo siempre y cuando $H(a) \cap B(a, R(1 - L)) \neq \emptyset$.*

Demostración. Solo tenemos que aplicar el corolario 5.16 a $g(x) = -x$, H, y $A = 1$, ya que satisfacen las condiciones del corolario (g tiene derivadas direccionales laterales y cumple las desigualdades del corolario para $K_0 = 1$ y H tiene la propiedad de Aubin con $L < K_0$). Además $F(x) = -x + H(x)$ satisface también la condición $F(a) \cap B(0_M, R(1 - L)) \neq \emptyset$ ya que $H(a) \cap B(a, R(1 - L)) \neq \emptyset$, y podemos deducir que hay un $x_0 \in B(a, R)$ tal que $0 \in F(x_0)$, o equivalentemente que $x_0 \in H(x_0)$. $\square$

También podemos asegurar la existencia de soluciones para familias de ecuaciones, que cumplan unas determinadas condiciones. Así tendríamos el siguiete teorema:

Teorema 5.21. *Sea M una variedad riemanniana completa con una estructura de grupo de Lie abeliano. Sea $g : B(a, R) \subset M \to M$ una función continua, $K_0 > 0$, P un espacio topológico compacto de parámetros y $h : B(a, R) \times P \to M$. Definimos $f(x, \alpha) = g(x) + h(x, \alpha)$. Supongamos que*

1. *$d(-h(x, \alpha), g(x)) < i_M$ para todo $\alpha \in P$ para todo $x \in B(a, R)$.*
2. *g satisface la condición (sDC) o la $(-sDC)$ en cada $x \in B(a, R)$.*
3. *$h_x : P \to M$ es continua para cada $x \in B(a, R)$.*
4. *Para cada $x_1, x_2 \in B(a, R)$ y $\alpha_1 \in P$, existe un $\alpha_2 \in P$, tal que $d(h(x_1, \alpha_1), h(x_2, \alpha_2)) \leq Ld(x_1, x_2)$, con $L < K_0$.*

5. *Existe un* $\alpha_0 \in P$ *tal que* $d(0_M, f(a, \alpha_0)) \leq R(K_0 - L)$.

Entonces el problema $f(x, \alpha) = 0$, $x \in B(a, R)$, $\alpha \in P$ *tiene solución.*

Demostración. Consideramos la aplicación conjunto-valorada $C : B(a, R) \subset M \rightrightarrows M$ definida por $C(x) = \{f(x, \alpha)\}_{\alpha \in P} = g(x) + \{h(x, \alpha)\}_{\alpha \in P} = g(x) + H(x)$. Entonces $H(x)$ es compacta por la condición 3, H es $L - Lipschitz$ por 4, y $C(a) \cap B(0, R(K_0 - L)) \neq \emptyset$ por 5. Por lo tanto por el corolario 5.13, existe un $x_0 \in B(a, R)$ tal que $0 \in C(x_0)$, o equivalentemente $f(x_0, \alpha) = 0$ para algún $\alpha \in P$.

□

Observación 5.22. La condición (3) se satisface fácilmente si consideramos un conjunto finito de parámetros. Por otro lado, la condición (4) es más débil que pedir que todos los h_α sean Lipschitz. De hecho, no es necesario considerar funciones continuas, como en el siguiente ejemplo: $P = \{1, 2\}$, $E \subset \mathbb{R}$, $h_1 = \chi_E$, $h_2 = \chi_{E^C}$.

Podemos deducir otro resultado, considerando pequeñas perturbaciones de funciones con ceros o con puntos fijos. Para hacerlo más sencillo, trabajaremos solo en el caso $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.23. *Sea* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una función contínua, con derivadas direccionales laterales continuas,* $g'(., h)$. *Sea* $a \in \mathcal{Y}$ *tal que* $g(a) = 0$. *Supongamos que se tiene una de estas condiciones*

1. $inf_{e \in S_{\mathbb{R}^n}}(sup_{h \in S_{\mathbb{R}^n}} \langle e, g'(a, h) \rangle) > 0$
2. $sup_{e \in S_{\mathbb{R}^n}}(inf_{h \in S_{\mathbb{R}^n}} \langle e, g'(a, h) \rangle) < 0$.

Sea $H : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin con módulo* $L < K_0$. *Entonces* $F = g + \alpha H$ *tiene un cero, siempre que* α *es bastante pequeña.*

Demostración. Asumimos que $inf_{e \in S_{\mathbb{R}^n}}(sup_{h \in S_{\mathbb{R}^n}} \langle e, g'(a, h) \rangle) > 0$. Para cada $e \in S_{\mathbb{R}^n}$, sean $h_e \in S_{\mathbb{R}^n}$ y $C_e > 0$ tales que $\langle e, g'(a, h_e) \rangle = C_e$. Sea U_e un entorno de e, y $r_e > 0$ tal que $\langle \widetilde{e}, g'(x, h_e) \rangle > \frac{C_e}{2}$ siempre que $\widetilde{e} \in U_e$ y $x \in B(a, r_e)$. Podemos cubrir $S_{\mathbb{R}^n}$ con un número finito de estos entornos $U_{e_1}, \ldots, U_{e_n}$, por compacidad. Si $R = min(r_{e_1}, \ldots, r_{e_n})$, tenemos que para cada $x_0 \in B(a, R)$ y cada $e \in S_{\mathbb{R}^n}$ hay un $h \in S_{\mathbb{R}^n}$ ($h = h_{e_1}, \ldots$ o $h = h_{e_n}$) tal que $\langle e, g'(x_0, h) \rangle > K_0$ para $K_0 = min(\frac{C_{e_1}}{2}, \ldots, \frac{C_{en}}{2})$. Por último, si α es bastante pequeño tal que la constante de Lipschitz de αH es más pequeña que K_0 y $\alpha \|H(a)\| < R(K_0 - L)$, podemos aplicar el corolario 5.16 y concluir que $g + \alpha H$ tiene un cero en $B(a, R)$. □

Observación 5.24. Para obtener el resultado anterior en variedades riemannianas, tendríamos que suponer que $g'(.,h)$ y $g'(a,.)$ son continuas, ya que nos moveríamos en diferentes espacios tangentes dependiendo del punto.

De la misma forma que en el último corolario, podemos obtener un resultado análogo para puntos fijos.

Teorema 5.25. *Sea $g : B(a,R) \to \mathbb{R}^n$ una función continua, con derivadas direccionales laterales continuas, $g'(.,h)$. Sea a un punto fijo para g. Supongamos que o $inf_{e\in S_{\mathbb{R}^n}}(sup_{h\in S_{\mathbb{R}^n}}\langle e, g'(a,h) - h\rangle) > 0$ o $sup_{e\in S_{\mathbb{R}^n}}(inf_{h\in S_{\mathbb{R}^n}}\langle e, g'(a,h) - h\rangle) < 0$. Sea $H : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una aplicación conjunto-valorada Lipschitz. Entonces $F = g + \alpha H$ tiene un punto fijo siempre que α sea suficientemente pequeño.*

Podemos hacer una reformulación más sencilla de los teoremas principales de este capítulo, si trabajamos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Teorema 5.26. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sea $a \in \mathcal{H}$. Sea $G : B(a,R) \rightrightarrows \mathcal{H}$ una aplicación conjunto-valorada que satisface (WDC) para $K_0 > 0$. Sea $H : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ una aplicación conjunto-valorada y que tenga la propiedad de Aubin con módulo $L < K_0$. Asumimos también que para cada $x \in B(a,R)$, al menos uno de los conjuntos $G(x)$, $H(x)$ es compacto. Entonces la ecuación $0 \in F(x) = G(x) + H(x)$ tiene una solución en $B(a,R)$ siempre que $F(a) \cap B(0, R(K_0 - L)) \neq \emptyset$.*

Teorema 5.27. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sea $a \in y$. Sea $G : B(a,R) \subset \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ una aplicación conjunto-valorada, y $K_0 > 1$. Asumimos que G satisface la condición (WDC) para K_0. Sea $H : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ una aplicación conjunto-valorada con la propiedad de Aubin con módulo $L < K_0 - 1$. Asumimos también que para cada $x \in B(a,R)$ al menos uno de los conjuntos $G(x)$ y $H(x)$ es compacto. Entonces la aplicación $F(x) = G(x) + H(x)$ tiene un punto fijo en $B(a,R)$ siempre que $F(a) \cap B(a, R(K_0 - L - 1)) \neq \emptyset$.*

Bibliografía

[1] J.P. Aubin, *Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions*, Part A, editado por L.Nachbin, Advances in Mathematics: Supplementary Studies, 7A, Academic Press New York (1981), 160-232.

[2] T. Aubin, *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampre Equations*, Springer-Verlag 1982.

[3] D. Azagra y J. Ferrera, *Applications of proximal calculus to fixed point theory on Riemannian Manifolds*, Nonlinear Anal. (2005).

[4] D. Azagra, J. Ferrera, F. López-Mesas, *Approximate Rolle's theorems for the proximal subgradient and the generalized gradient*, J. Math. Anal. Appl. 283 (2003), p. 180-191.

[5] D. Azagra, J. Ferrera, F. López-Mesas, *Nonsmooth analysis and Hamilton-Jacobi equations on Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. 220 (2005) no. 2, 304-361 .

[6] D. Azagra y J. Ferrera, *Proximal Calculus on Riemannian Manifolds*, Mediterranean J. Math. 2 (2005), 437-450.

[7] D. Azagra, J. Ferrera y B. Sanz, *Viscosity Solutions to Second Order Partial Differential Equations on Riemannian Manifolds, I* , J. Differential Equations 245 (2008), 307-336.

[8] D. Azagra, J. Ferrera y B. Sanz, *Fixed Points and Zeros of Set-valued mappings on Riemannian manifolds: A subdiferential Approach*, Set-Valued Analysis, en prensa.

[9] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski *Nonsmooth Analysis and Control Theory,* Springer, Graduate Texts in Mathematics 178.

[10] M. G. Crandall, H. Ishii y P.L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order to fully nonlinear partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., 27 (1992), 1-67.

[11] R. Deville and E. El Haddad, *The viscosity subdifferential of the sum of two functions in Banach spaces. I. First order case*, J. Convex Anal. 3 (1996), no. 2, 295-308.

[12] R. Deville y El Haddad, *The subdifferential of the sum of two functions in Banach spaces II. Second order case*, Bull. Austral. Math. Soc. 51 (1995), 235-248.

[13] R. Deville y E. Matheron, *Infinite games, Banach space geometry and the eikonal equation*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 95 (2007), no. 1, 49-68.

[14] M. P. Do Carmo *Riemannian Geometry*, Birkhaser (1992).

[15] I.Ekeland, *The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension*, J. Differential Geom. 13 (1978), no. 2, 287–301.

[16] I. Ekeland *On the Variational Principle*, J. Math. Anal. Appl. 47(1974), 324-353.

[17] M. Gursky y J. Viaclovsky, *Prescribing symmetric functions of the eigenvalues of the Ricci tensor*, (aparecerá en Annals of Mathematics).

[18] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Walter de Gruyter Studies in Mathematics 1, Berlin-New York, 1982. (1965), 954-957.

[19] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Springer-Verlag (Graduate Texts in Mathematics 191), New York 1999.

[20] Y. S. Ledyaev y Q. J. Zhu, *Nonsmooth analysis on smooth manifolds*, to appear in Transactions of the AMS.

[21] F. López-Mesas *Análisis no regular en variedades riemannianas y aplicaciones a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi*, Tesis Doctoral , 2004.

[22] C. Mantegazza y A. C. Mennuci, *Hamilton-Jacobi equations and distance functions on Riemannian manifolds*, Appl. Math. Optim. 47 (2003), no. 1, 1-25.

[23] J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. of Math. Studies, Princeton University Press, Princeton 1963.

[24] B.S. Mordukhovich y J.V. Outrata, *On second-order subdifferentials and their applications*, Siam J. Optim. 12, n 1(2001), 139-169.

[25] B.S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation I*, Springer.

[26] S.B. Nadler Jr., *Multivalued Contraction Mappings,* Pacific J. Math., 30 (1969), 475-488.

[27] R.T. Rockafellar y R. J-B. Wets *Variational Analysis*, Springer.

[28] T. Sakai, *Riemannian Geometry*, Translations of Mathematical Monographs, vol 149, Amer. Math. Soc. 1992.

[29] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. IV. Second edition. Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.

[30] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. V. Second edition. Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.

[31] C.Udriste, *Convex Functions and Optimization methods on Riemannian Manifolds*, Mathematics and its Applications, 297.

[32] J. Viaclovsky, *Conformal geometry and fully nonlinear equations. Inspired by S.S.Chern*, Nankai Tracts Math.,11 (2006), 435-460. World Sci. Publ., Hackensack, NJ.

Universidad Complutense de Madrid Facultad de Ciencias Matemáticas Departamento de Análisis Matemático Avenida Complutense s/n 28040 Madrid, España.