

Singularités quasi-ordinaires toriques et polyèdre de Newton du discriminant

P. D. González Pérez

Abstract. Nous étudions les polynômes $F \in \mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$ à coefficients dans l'anneau de germes de fonctions holomorphes au point spécial d'une variété torique affine. Nous généralisons à ce cas la paramétrisation classique des singularités quasi-ordinaires. Cela fait intervenir d'une part une généralisation de l'algorithme de Newton-Puiseux, et d'autre part une relation entre le polyèdre de Newton du discriminant de F par rapport à Y et celui de F au moyen du polytope-fibre de Billera et Sturmfels [3]. Cela nous permet enfin de calculer, sous des hypothèses de non dégénérescence, les sommets du polyèdre de Newton du discriminant à partir de celui de F , et les coefficients correspondants à partir des coefficients des exposants de F qui sont dans les arêtes de son polyèdre de Newton.

1 Introduction

Le sujet de la première partie de ce travail est la représentation des racines $Y(X)$ d'une équation polynôme $F(X_1, \dots, X_d; Y) = 0$ par des séries à exposants fractionnaires en les variables $X = (X_1, \dots, X_d)$. Il s'agit de généraliser le théorème de Newton-Puiseux. Nous poursuivrons dans une direction inaugurée par McDonald dans [9], et précisons ses résultats.

Notre approche est d'étudier d'abord le problème dans le cas d'un polynôme $F \in \mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$, où $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ est l'anneau des germes des fonctions holomorphes au point spécial d'une variété torique affine correspondant à un cône rationnel strictement convexe, $\tau \subset (\mathbb{R}^d)^*$, de dimension d . Nous résolvons le problème, lorsque le discriminant $\Delta_Y F$ de F par rapport à Y est de la forme $X^u \epsilon$ où ϵ est une unité dans $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ et u appartient au semigroupe $S_\tau := \tau^\vee \cap \mathbb{Z}^d$ des éléments de \mathbb{Z}^d qui appartiennent au cône dual $\tau^\vee := \{w \in \mathbb{R}^d / \langle w, u \rangle \geq 0, \forall u \in \tau\}$. Ceci est en fait une généralisation de l'étude classique des singularités quasi-ordinaires, qui correspondent au cas où τ est le quadrant positif.

La réduction du cas général à ce cas fait appel à des constructions combinatoires sur le polyèdre de Newton $\mathcal{N}(F) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ de F . La plus importante, déjà utilisée dans [9] est celle du polyèdre-fibre $\mathcal{Q}(F) \subset \mathbb{R}^d$ de $\mathcal{N}(F)$ par rapport à sa projection $\mathcal{N}(F) \rightarrow \mathbb{R}^d$ sur l'espace des exposants des monômes en X . Les points extrêmes de $\mathcal{Q}(F)$ correspondent à certains chemins dans les arêtes de $\mathcal{N}(F)$.

Le polyèdre-fibre est également relié au polyèdre de Newton de F du discriminant de F par rapport à Y . Si $F = a_0(X) + \dots + a_r(X)Y^r$, on a l'inclusion de polyèdres de Newton

$$\mathcal{N}(\Delta_Y F) + \mathcal{N}(a_0) + \mathcal{N}(a_r) \subseteq \mathcal{Q}(F)$$

(où la somme est la somme de Minkowski), avec l'égalité sous des hypothèses de non-dégénérescence des coefficients de F par rapport à $\mathcal{N}(F)$, (théorème 4).

Un cône $\tau \subset (\mathbb{R}^d)^*$ est compatible avec des polyèdres $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s \subset \mathbb{R}^d$ s'il est constitué des fonctions linéaires qui prennent toutes leur valeur minimale sur $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s$ en des points fixés $p_1 \in \mathcal{P}_1, \dots, p_s \in \mathcal{P}_s$. On décrit le résultat principal, le théorème 3, dans le cas où F est un polynôme réduit dans l'anneau $\mathbb{C}\{X\}[Y]$. Si $\tau \subset (\mathbb{R}_+^d)^\vee$ est un cône rationnel strictement convexe de dimension d compatible avec les polyèdres $\mathcal{N}(\Delta_Y F)$, $\mathcal{N}(a_r)$ et $\mathcal{Q}(F)$, alors l'homomorphisme $\mathbb{C}\{X\} \rightarrow \mathbb{C}\{S_\tau\}$ étendant l'inclusion des algèbres $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_+^d] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$ transforme F en un polynôme $F_\tau \in \mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$ dont toutes les racines sont de la forme $X^u \varepsilon(X)$ où $u \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d$, $\varepsilon(X)$ est une unité dans l'anneau $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$ et k est un entier positif. La construction des racines est donnée par un algorithme qui généralise celui du théorème de Newton-Puiseux (théorème 2), et qui pourrait se développer à l'aide d'un logiciel de calcul formel. On peut comparer l'algorithme obtenu avec celui de [2], développé pour le cas quasi-ordinaire.

Nous utilisons ces résultats pour donner une description des sommets du polyèdre de Newton du *résultant* $\text{Res}_Y(F, G)$ des polynômes $F, G \in \mathbb{C}\{S_\tau\}$ à partir des polyèdres-fibres $\mathcal{Q}(F)$, $\mathcal{Q}(G)$ et $\mathcal{Q}(FG)$; nous calculons enfin les coefficients des monômes correspondants aux sommets du polyèdre de Newton de $a_0 a_r \Delta_Y F$ et de $\text{Res}_Y(F, G)$ sous des hypothèses de non dégénérescence. Ces coefficients dépendent entre autres des résultants des paires de polynômes à une variable obtenus en regardant de F et de G que les termes dont les exposants appartiennent à des paires parallèles d'arêtes de $\mathcal{N}(F)$ et $\mathcal{N}(G)$. On montre un résultat analogue pour le discriminant. Nous trouvons aussi, avec une méthode très différente, des résultats de même nature que ceux de Gel'fand, Kapranov et Zelevinski dans [6].

2 Paramétrisation de singularités quasi-ordinaires toriques

2.1 L'algèbre des germes de fonctions holomorphes au point distingué d'une variété torique affine

Soit τ un cône convexe rationnel de dimension d dans $(\mathbb{R}^d)^*$. Cette condition garantit que le cône dual $\tau^\vee := \{w \in \mathbb{R}^d / \langle w, u \rangle \geq 0, \forall u \in \tau\}$ est un cône rationnel strictement convexe. Pour cette raison, chaque élément de S_τ peut s'exprimer comme somme d'éléments du semigroupe S_τ d'un nombre fini de manières. L'ensemble des séries formelles à exposants dans S_τ est un anneau, que nous notons par $\mathbb{C}[[S_\tau]]$. La propriété de finitude précédente permet de garantir que les coefficients de la série produit sont des fonctions polynomiales des coefficients des facteurs. Ces anneaux sont définis dans [9], pour construire des racines d'un polynôme $F \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$, à la Newton-Puiseux.

On va donner une interprétation géométrique de ces anneaux au moyen de la variété torique associée au cône τ dans le cas où τ est un cône rationnel strictement convexe de dimension d dans \mathbb{R}^d .

Soit $N \subset (\mathbb{R}^d)^*$ un réseau de dimension d , de réseau dual $M \subset \mathbb{R}^d$. Le cône τ définit le semi-groupe de type fini $S_\tau := \tau^\vee \cap M$. Soit $\mathbb{C}[S_\tau]$ l'algèbre du semi-groupe S_τ à coefficients dans \mathbb{C} . Associons à (τ, N) la variété torique affine $Z_\tau := \text{Spec } \mathbb{C}[S_\tau]$. Chaque point fermé de Z_τ est défini par un homomorphisme de semi-groupes $S_\tau \rightarrow \mathbb{C}$. La valeur de la fonction $X^u \in \mathbb{C}[S_\tau]$ au point x est $x(u)$. L'orbite de dimension 0 de la variété Z_τ est le point spécial z_τ défini par l'homomorphisme de semi-groupes $S_\tau \rightarrow \mathbb{C}$ qui applique $0 \mapsto 1$ et $u \mapsto 0$ si $u \neq 0$ (pour tout ceci, voir [4] ou [10]).

L'anneau des séries convergentes à exposants dans S_τ , que nous notons par $\mathbb{C}\{S_\tau\}$, est

l'ensemble des séries de $\mathbb{C}[[S_\tau]]$ qui sont absolument convergentes dans un voisinage du point spécial z_τ de la variété torique Z_τ . Si τ est un cône convexe rationnel de dimension d , on définit $\mathbb{C}\{S_\tau\} = \bigcap \mathbb{C}\{S_\sigma\}$ où σ parcourt les cônes rationnels strictement convexes de dimension d contenus dans τ .

Lemme 1 *L'algèbre locale des germes de fonctions holomorphes au point z_τ de Z_τ est isomorphe à $\mathbb{C}\{S_\tau\}$.*

Preuve Soient u_1, \dots, u_s des générateurs du semi-groupe S_τ . L'homomorphisme $\mathbb{C}[U_1, \dots, U_s] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$, défini par $U_i \mapsto X^{u_i} \in \mathbb{C}[S_\tau]$ est surjectif. Son noyau est un idéal premier I . Ce morphisme définit un plongement $Z_\tau \subset \mathbb{C}^s$ de la variété torique affine $Z_\tau := \text{Spec } \mathbb{C}[S_\tau]$ définie par le cône τ , et l'image du point distingué z_τ est l'origine de \mathbb{C}^s . Soit R l'algèbre des germes fonctions holomorphes dans un voisinage de z_τ dans Z_τ .

Remarquons que l'homomorphisme composé $\mathbb{C}[U_1, \dots, U_s] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau] \hookrightarrow \mathbb{C}[[S_\tau]]$ s'étend en un homomorphisme $\chi: \mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s\} \rightarrow \mathbb{C}[[S_\tau]]$ dont l'image est $\mathbb{C}\{S_\tau\}$. En effet, l'image du monôme U^λ , où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{N}^s$, est le monôme $X^{u(\lambda)}$, où $u(\lambda) = \sum \lambda_i u_i \in S_\tau$. Donc, l'image de ϕ est la série $\chi(\phi) = \sum_{u \in S_\tau} (\sum_{u(\lambda)=u} c_\lambda) X^u$, qui est bien définie parce que τ est strictement convexe. Supposons que ϕ est absolument convergente au point $x' = (x'_1, \dots, x'_s)$ correspondant au point $x \in Z_\tau$ par le plongement torique $Z_\tau \subset \mathbb{C}^s$. La valeur de la fonction $X^u \in \mathbb{C}[S_\tau]$ au point de Z_τ , ne dépend pas de l'immersion, donc si $u = u(\lambda)$, on a $x(u) = x'^\lambda$ et la série $\chi(\phi)$ est absolument convergente au point x . Ceci implique que la série $\chi(\phi) \in \mathbb{C}[[S_\tau]]$ est convergente. Avec un raisonnement analogue, on peut montrer que l'homomorphisme d'algèbres $\chi: \mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s\} \rightarrow \mathbb{C}\{S_\tau\}$ est surjectif.

Par ailleurs, on a montré aussi que $\chi(\phi)$ est une fonction holomorphe dans un voisinage de z_τ dans Z_τ , définissant un unique élément de R . Clairement, tous les éléments de R sont obtenus de cette forme. Si la fonction $\chi(\phi)$ est nulle dans un voisinage de z_τ dans Z_τ , la série ϕ est dans l'idéal engendré par I dans $\mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s\}$ donc $\chi(\phi) = 0$. ■

Comme conséquence de ce lemme, on déduit que l'anneau $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ est noethérien et intégralement clos parce que Z_τ est une variété normale (voir [7, Section 71]).

2.2 Extensions galoisiennes

Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier positif fixé. Considérons les réseaux $N' = kN \subset N$. Leurs réseaux duaux respectifs sont $M' = \frac{1}{k}M \supset M$. Un cône τ strictement convexe dans $(\mathbb{R}^d)^*$ est rationnel pour les deux réseaux en même temps. Nous notons Z_τ (resp. Z'_τ) la variété torique associée à (τ, N) (resp. à (τ, N')). Le semi-groupe associé à (τ, N') est $S'_\tau := \frac{1}{k}S_\tau \subset M'$. L'homomorphisme de semi-groupes $M \supset S_\tau \hookrightarrow S'_\tau \subset M'$ définit un morphisme torique $f_k: Z'_\tau \rightarrow Z_\tau$. L'image du point distingué de Z'_τ est le point distingué de Z_τ , donc on obtient un morphisme de germes irréductibles $(Z'_\tau, z'_\tau) \rightarrow (Z_\tau, z_\tau)$. En utilisant le lemme 1 on vérifie que l'homomorphisme des algèbres entières associées est $\mathbb{C}\{S_\tau\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{S'_\tau\}$.

L'homomorphisme des semi-groupes $M \hookrightarrow M'$ définit le morphisme $f_k: T' \rightarrow T$ obtenu en restreignant f_k aux tores respectifs de Z'_τ et Z_τ . On peut vérifier directement que

le noyau de ce morphisme $f_{k|T'}$, comme morphisme de groupes algébriques, est le sous-groupe fini H de T' , formé des éléments (w_1, \dots, w_d) tels que $w_i^k = 1$, pour $i = 1, \dots, d$. Ce morphisme est un revêtement galoisien à k^d feuilles de la variété T , parce que le groupe H agit transitivement sur les fibres. Donc on a une extension galoisienne des corps des fonctions rationnelles $\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \mathbb{C}(T')$. On va montrer qu'on a une situation analogue pour les corps des fonctions méromorphes aux points distingués des variétés toriques correspondantes.

Soit L (resp. L') le corps des fractions de $\mathbb{C}\{S_\tau\}$, (resp. de $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$). L'homomorphisme $\mathbb{C}\{S_\tau\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{S'_\tau\}$ définit une extension de corps $L \hookrightarrow L'$.

Lemme 2 *L'extension de corps $L \hookrightarrow L'$ est galoisienne. Soit G son groupe de Galois. L'action de H sur les monômes définit un épimorphisme de groupes $H \rightarrow G$ et l'ensemble des éléments G -invariants de l'anneau $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$ est $\mathbb{C}\{S_\tau\}$.*

Preuve Clairement, $L \hookrightarrow L'$ est une extension normale finie. À chaque $w \in H$ est associé l'homomorphisme d'algèbres $\mathbb{C}\{S'_\tau\} \rightarrow \mathbb{C}\{S'_\tau\}$ qui applique $X^{\frac{u}{k}} \mapsto w(u)X^{\frac{u}{k}}$. Cela définit un homomorphisme de groupes $H \rightarrow G$.

Remarquons que $X^{\frac{u}{k}} \mapsto w(u)X^{\frac{u}{k}}$ définit l'action de l'élément $w \in H$ sur un monôme de $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$. Le corollaire 1.16 de [10] garantit que le morphisme $Z'_\tau \rightarrow Z_\tau$ coïncide avec la projection du quotient de Z_τ par rapport à l'action du groupe H . C'est-à-dire que $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ est l'ensemble des éléments invariants de l'algèbre $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$ par l'action de H .

Si H' est l'image de H dans G on a montré que le sous-corps fixe de L' par H' coïncide avec L , donc $(L')^{G'} \subset L$, c'est-à-dire que $L \subset L'$ est une extension galoisienne et donc $H' = G$. ■

2.3 Paramétrisation de singularités quasi-ordinaires toriques

Supposons que $F \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d\}[Y]$ est un polynôme réduit tel que $0 \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité $r \geq 1$ du polynôme $F(0, Y)$ et que le discriminant de F soit de la forme $X^q \varepsilon$ où ε est une unité de $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d\}$. D'après le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un pseudo-polynôme à la Weierstrass H de degré r en Y , et une unité ϵ dans $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d, Y\}$ tels que $F = \epsilon H$. Par définition, la projection du germe $(X, 0) \subset \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}$ défini par le polynôme $H \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d\}[Y]$ sur $(\mathbb{C}^d, 0)$ est quasi-ordinaire. D'après [1, Theorem 3], il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que H ait ses r racines dans l'anneau $\mathbb{C}\{X_1^{1/k}, \dots, X_d^{1/k}\}$.

On va généraliser la construction de racines associées à une projection quasi-ordinaire, au cas où le germe $(\mathbb{C}^d, 0)$ est remplacé par un germe de variété torique affine (Z_τ, z_τ) au point distingué.

Théorème 1 *Pour tout polynôme $F \in \mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$ réduit tel que le discriminant de F soit de la forme $X^{u_0} \varepsilon$, où ε est une unité dans l'anneau $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ et que $0 \in \mathbb{C}$ soit une racine de multiplicité $r \geq 1$ du polynôme $F(z_\tau, Y)$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F ait r racines sans terme constant dans l'anneau $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$.*

Preuve Nous fixons un nombre fini de générateurs du semi-groupe S_τ . Cela permet de définir un plongement de la variété torique affine $Z_\tau \subset \mathbb{C}^s$. Il lui est associé un épimor-

phisme d'algèbres $\chi: \mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s\} \rightarrow \mathbb{C}\{S_\tau\}$ (voir le lemme 1). Considérons un polynôme $G \in \mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s\}[Y]$ tel que $G^x = F$. On a $G(0, Y) = F(z_\tau, Y)$. D'après le théorème de préparation de Weierstrass il existe un pseudo-polynôme à la Weierstrass H de degré r en Y , et une unité ε dans $\mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s, Y\}$ tels que $G = \varepsilon H$. Clairement, les germes définis au point $(z_\tau, 0)$ par F et par H^x coïncident. Donc, on peut supposer que F est un polynôme réduit de degré r tel que $F(z_\tau, Y) = Y^r$.

Soit L le corps de fractions de l'anneau intègre $\mathbb{C}\{S_\tau\}$. Les facteurs F_i de la factorisation de F en polynômes irréductibles dans $L[Y]$ sont dans $\mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$ parce que, d'après le lemme 1, l'anneau $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ est intégralement clos et le coefficient de Y^r est une unité (voir [11, théorème 5, section 3, chap. V]). De plus, le discriminant de F_i divise le discriminant de F donc $\Delta_Y F_i$ est de la forme $X^\mu \varepsilon$ où $\varepsilon \in \mathbb{C}\{S_\tau\}$ est une unité. On peut donc supposer que F est irréductible, engendrant un idéal premier (F) dans $\mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$. Considérons le germe de variété analytique irréductible $(\mathcal{X}, x) \subset (Z_\tau \times \mathbb{C}, x)$ au point x correspondant à l'algèbre intègre $R = \mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]/(F)$.

Soit $(\mathcal{X}, x) \rightarrow (Z_\tau, z_\tau)$ la projection des germes, et choisissons un représentant fini $\pi: \mathcal{X} \rightarrow Z_\tau$ tel que $\pi^{-1}(z_\tau) = \{x\}$. L'hypothèse sur le discriminant implique qu'il existe un voisinage W du point z_τ dans Z_τ tel que π est non ramifié sur $W^* := W \cap T$. Par continuité, comme $\pi^{-1}(z_\tau) = \{x\}$, on peut supposer que $\pi^{-1}(W)$ est un sous-ensemble relativement compact de \mathbb{C}^{s+1} .

Comme π est un morphisme fini, l'intersection de l'image inverse du lieu discriminant de π avec \mathcal{X} est une sous-variété analytique fermée propre de \mathcal{X} . Son complémentaire est un ouvert $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$, connexe parce que \mathcal{X} est analytiquement irréductible. Ceci montre que $\pi: \mathcal{X}^* \rightarrow W^*$ est un revêtement connexe à r feuillets.

On peut supposer que l'ouvert W^* du tore T est $W^* = (\mathbb{D}^*)^d$ où $\mathbb{D}^* = D(0, 1) \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^*$. Soit J le sous-groupe du groupe fondamental $\pi_1(W^*, w) \cong \mathbb{Z}^d$ associé au revêtement $\pi: \mathcal{X}^* \rightarrow W^*$. Puisque J est d'indice fini, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k\mathbb{Z}^d \subset J$. Le revêtement $f_k: W^* \rightarrow W^*$, défini par $x \mapsto (x_1^k, \dots, x_d^k)$, est associé au sous-groupe $k\mathbb{Z}^d$ du \mathbb{Z}^d . Donc, il existe un revêtement $p: W^* \rightarrow \mathcal{X}^*$ tel que $\pi \circ p = f_k$, (voir [5, chap. 13]).

Clairement, p est holomorphe, et borné dans le complémentaire dans W d'un ensemble analytique fermé, c'est-à-dire que p est une fonction faiblement holomorphe dans W . Comme $W \subset Z_\tau$ est une variété normale, toute fonction faiblement holomorphe est holomorphe, (voir [7, Section 71]). Donc, p s'étend en un morphisme $W \rightarrow \mathcal{X}$. La fonction holomorphe $\pi \circ p$ coïncide sur W^* avec le morphisme torique $f_k: Z'_\tau \rightarrow Z_\tau$ (où on considère $W^* \subset Z'_\tau$ et aussi $W^* \subset Z_\tau$). Donc, elle est égale à la restriction du morphisme f_k à W . Nous remarquons que $p(z'_\tau) = x$ parce que $f_k(z'_\tau) = z_\tau$ et $\pi^{-1}(z_\tau) = \{x\}$.

En utilisant le lemme 1, on voit que l'homomorphisme d'algèbres intègres associé au morphisme f_k aux points distingués est $\mathbb{C}\{S_\tau\} \rightarrow \mathbb{C}\{S'_\tau\}$. Considérons le monomorphisme d'algèbres $R \rightarrow \mathbb{C}\{S'_\tau\}$ correspondant au morphisme de germes $p: (W, z'_\tau) \rightarrow (\mathcal{X}, x)$. L'algèbre R est une sous- $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ -algèbre de $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$ parce que $\pi \circ p = f_k$. Nous avons donc un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \mathbb{C}\{S'_\tau\} \\ \uparrow & \nearrow & \\ \mathbb{C}\{S_\tau\} & & \end{array}$$

Soit L (resp. K, L') le corps des fractions de $\mathbb{C}\{S_\tau\}$, (resp. de $R, \mathbb{C}\{S'_\tau\}$). Par construction,

$L \subset K \subset L'$ et $K = L(\zeta)$ où ζ est l'image de $Y \in R$ dans $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$. D'après le lemme 2, l'extension de corps $L \hookrightarrow L'$ est galoisienne, et la série ζ a ses r conjugués dans l'anneau $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$. Ces conjugués sont les racines de F dans $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$ qui paramétrisent (X, x) . ■

Remarque 1 Si F est irréductible, on peut prendre $k = r$ dans le théorème 1.

En effet, puisque le polynôme F est irréductible, l'indice du sous-groupe J (dans la preuve du théorème 1), est égal à r . L'ordre du sous-groupe engendré par l'image d'un vecteur de la base canonique de \mathbb{Z}^d dans \mathbb{Z}^d/J est un diviseur de r . Donc, on a $r\mathbb{Z}^d \subset J$.

3 Racines à la Newton Puiseux

3.1 Valuation induite par un vecteur irrationnel

Soit R un anneau commutatif et Γ un groupe totalement ordonné. Une valuation ω de R dans Γ est une application $\omega: R \setminus \{0\} \rightarrow \Gamma$ tel que

- (i) $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$ pour $0 \neq a, b \in R$,
- (ii) $\omega(a - b) \geq \inf(\omega(a), \omega(b))$ pour $0 \neq a, b \in R$ et $a \neq b$, avec égalité si $\omega(a) \neq \omega(b)$.

On associe à chaque $\lambda \in \Gamma$ l'ensemble $\mathcal{J}_\lambda = \{a \in R / \omega(a) > \lambda\}$. L'ensemble \mathcal{J}_λ est un idéal de R et on a $\lambda > \beta \Rightarrow \mathcal{J}_\lambda \subset \mathcal{J}_\beta$. La topologie ω -adique sur R , est la topologie qui fait de R un groupe topologique dans laquelle l'ensemble des idéaux $\{\mathcal{J}_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ est un système fondamental de voisinages de $0 \in R$.

La valuation ω est *archimédienne* si Γ est isomorphe comme groupe totalement ordonné à un sous-groupe de \mathbb{R} . Soit (R, \mathfrak{M}) est un anneau local de corps de fractions L . La valuation ω de L est *centrée sur R* si $\omega(a) \geq 0$ pour $a \in R$ et $\omega(a) > 0$ pour $a \in \mathfrak{M}$.

Lemme 3 Soient (R, \mathfrak{M}) un anneau local noethérien de corps de fractions L , et ω une valuation archimédienne de L centrée sur R . Alors, la topologie \mathfrak{M} -adique coïncide avec la topologie ω -adique de R .

Preuve Puisque R est noethérien, le semi-groupe $\omega(R \setminus \{0\})$ est bien ordonné, et il existe un plus petit élément λ de l'ensemble $\omega(\mathfrak{M} \setminus \{0\})$. Si $\beta \in \omega(\mathfrak{M} \setminus \{0\})$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\lambda > \beta$ donc $\mathfrak{M}^n \subset \mathcal{J}_\beta \subset \mathfrak{M}$. ■

On appelle un vecteur $w \in \mathbb{R}^d$ *irrationnel* si ses coordonnées sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Associé à un vecteur irrationnel $w \in \mathbb{R}^d$ nous définissons un ordre total sur \mathbb{Q}^d par:

$$u <_w u' \Leftrightarrow \langle u, w \rangle < \langle u', w \rangle.$$

Remarque 2 Soit τ un cône rationnel strictement convexe de dimension d dans \mathbb{R}^d . Un vecteur irrationnel $w \in \tau^\vee$ définit une valuation archimédienne de l'anneau local complet $\mathbb{C}[[S_\tau]]$ par $w(\sum_{u \in S_\tau} c_u X^u) = \min_{c_u \neq 0} (\langle u, w \rangle)$. Cette valuation vérifie les hypothèses du lemme 3.

Si $(\phi_j) \subset \mathbb{C}[[S_\tau]]$ vérifie que la suite $(w(\phi_j)) \subset \mathbb{R}$ est strictement croissante alors ϕ_j tend vers $0 \in \mathbb{C}[[S_\tau]]$.

On appelle *l'exposant initial* d'une série $\phi \in \mathbb{C}[[S_\tau]]$ par rapport à w , l'exposant u de ϕ tel que $w(X^u) = w(\phi)$. L'exposant initial est le plus petit, pour l'ordre $<_w$, parmi les exposants de ϕ .

3.2 Chemins monotones dans le polyèdre de Newton

Un polyèdre \mathcal{N} dans \mathbb{R}^d est l'intersection d'une famille de demi-espaces d'équation $\langle \omega, u \rangle \geq \lambda_\omega$, pour $\omega \in \Xi \subset (\mathbb{R}^d)^*$. On dira que le polyèdre \mathcal{N} est *rationnel* si ses sommets sont dans le réseau \mathbb{Z}^d et si ses faces ont des équations à coefficients dans \mathbb{Q} . Le cône τ associé au sommet u d'un polyèdre rationnel \mathcal{N} dans \mathbb{R}^d est l'ensemble des fonctions linéaires qui atteignent leur valeur minimale sur \mathcal{N} au sommet u . Le cône τ est rationnel de dimension d , et τ est strictement convexe si et seulement si le polyèdre \mathcal{N} est de dimension d . Dans ce cas, l'ensemble des cônes associés au polyèdre \mathcal{N} forme un éventail Σ dans $(\mathbb{R}^d)^*$ avec un nombre éventuellement infini de cônes; le support $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ de l'éventail associé à \mathcal{N} n'est pas nécessairement fermé. Si $\tau \subset |\Sigma|$ est un cône rationnel strictement convexe de dimension d , l'ensemble des cônes $\tau \cap \sigma$, pour $\sigma \in \Sigma$ est une subdivision de τ . En particulier, c'est l'éventail associé à la somme de Minkowski $\tau^\vee + \mathcal{N}$. Cette subdivision est finie parce que si S^{d-1} est la sphère unité $\{\tau \cap \sigma \cap S^{d-1}\}$ est un complexe polyédral de support l'ensemble compact $\tau \cap \sigma \cap S^{d-1}$.

Considérons $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ avec des coordonnées fixées (u, v) . On dira qu'une arête bornée e d'un polyèdre $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ est *admissible* si elle n'est pas parallèle à l'hyperplan $v = 0$. Une arête admissible est de la forme $[p_{v_1}, p_{v_2}]$ où $p_{v_i} = (u_{v_i}, v_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ avec $v_1 < v_2$. Nous appellerons le vecteur $q_e := \frac{u_{v_1} - u_{v_2}}{v_2 - v_1}$ l'*inclinaison*, et le nombre $l_e = v_2 - v_1 \in \mathbb{N}$ la *longueur* de l'arête. Considérons la projection $\pi_e: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \{0\}$ parallèlement à l'arête e , définie par $\pi_e(u, v) = u + vq_e$. Le cône $\sigma(e) \subset (\mathbb{R}^d)^*$, associé au sommet $\pi_e(e)$ du polyèdre $\pi_e(\mathcal{N})$ et de dimension d et on a:

Lemme 4 Pour $w \in (\mathbb{R}^d)^*$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $w \in \sigma(e)$.
2. La fonction linéaire w atteint sa valeur minimale sur chaque section $v = \lambda$ de \mathcal{N} au point $(u(\lambda), \lambda)$ de l'arête e . ■

On dit qu'un chemin γ dans les arêtes de $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ est *monotone* si on peut le paramétriser par $\gamma(\lambda) = (u(\lambda), \lambda)$. Supposons que le chemin γ a pour sommets $\{p_0, p_{i_1}, \dots, p_{i_t}, p_n\}$ avec $p_j = (u_j, j)$ pour $j \in \{i_0, i_1, \dots, i_t, i_{t+1}\}$ avec $0 = i_0 < \dots < i_{t+1} = n$. Nous notons q_r l'inclinaison du segment $e_r = [p_{i_r}, p_{i_{r+1}}]$, pour $r = 0, \dots, t$. Le chemin monotone γ est *cohérent* si il existe $w \in (\mathbb{R}^d)^*$ tel que $\gamma(\lambda)$ est l'unique point de la section $v = \lambda$ du polyèdre \mathcal{N} en lequel w atteint sa valeur minimale sur cette section, pour $\lambda \in [0, n]$.

Lemme 5 Avec les notations précédentes, si $w \in (\mathbb{R}^d)^*$ est un vecteur irrationnel définissant le chemin monotone cohérent γ dans les arêtes du polyèdre rationnel \mathcal{N} , alors les inclinaisons des arêtes de γ vérifient:

$$q_t <_w q_{t-1} <_w \dots <_w q_0.$$

Preuve Notons π_s la projection parallèlement au segment e_s . Le vecteur $\pi_{s-1}(e_{s-1}) - \pi_s(e_s)$ a le même sens que le vecteur $\pi_s(p_{i_{s-1}}) - \pi_s(e_s)$. Par le lemme précédent w appartient à $\sigma(e_s)$, donc on a $\langle w, \pi_{s-1}(e_{s-1}) - \pi_s(e_s) \rangle = i_s \langle w, q_{s-1} - q_s \rangle \geq 0$, pour $s = 1, \dots, t$. ■

Soit $\rho \subset (\mathbb{R}^d)^*$ un cône strictement convexe de dimension d . Nous notons $\mathbb{C}((S_\rho))$ (resp. $\mathbb{C}\{\{S_\rho\}\}$) l'anneau de fractions de l'anneau $\mathbb{C}[[S_\rho]]$ (resp. $\mathbb{C}\{S_\rho\}$) pour l'ensemble multiplicativement fermé correspondant aux monômes X^u pour $u \in S_\rho$.

Définition 1 Le ρ -polyèdre de Newton d'une série $\phi \in \mathbb{C}((S_\rho))$ non nulle est la somme de Minkowski de l'enveloppe convexe de ses exposants et du cône ρ^\vee . Le ρ -polyèdre de Newton d'un polynôme $F \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$, est la somme de Minkowski de l'enveloppe convexe de ses exposants et du cône $\rho^\vee \times \{0\}$.

Le ρ -polyèdre de Newton de ϕ , que nous notons $\mathcal{N}_\rho(\phi)$, est un polyèdre de dimension d ayant un nombre fini de sommets. L'éventail associé est la subdivision du cône ρ induite par l'éventail associé à l'enveloppe convexe des exposants de ϕ .

Nous notons $\mathcal{N}_\rho(F)$ le polyèdre de Newton d'un polynôme $F \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$. Remarquons que le ρ -polyèdre de Newton de F ne dépend que des exposants de F , il dépend aussi de l'anneau dans lequel on considère que se trouvent les coefficients de F . Pour tout cône $\tau \subset (\mathbb{R}^d)^*$ rationnel strictement convexe de dimension d , l'inclusion d'algèbres $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d] \rightarrow \mathbb{C}\{\{S_\tau\}\}$, permet de considérer un polynôme $F \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$ comme élément de $\mathbb{C}\{\{S_\tau\}\}[Y]$. L'enveloppe convexe des exposants de F est un polyèdre compact, $\mathcal{P}(F)$, mais le polyèdre $\mathcal{N}_\rho(F)$ n'est pas compact.

On définit la relation suivante parmi les vecteur irrationnels du cône ρ : $w \sim w'$, si et seulement si, ils définissent le même chemin polygonal dans les arêtes du polyèdre $\mathcal{N}_\rho(F)$. Par le lemme 4, cette relation définit un éventail qui subdivise le cône ρ . Cet éventail est défini par un polyèdre que nous allons décrire maintenant.

3.3 Le polyèdre-fibre de la projection du polyèdre de Newton

Soient $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^N$ un polytope et $\pi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ une application affine surjective, l'image de \mathcal{P} est un polytope Ω . L'intégrale de Minkowski de l'application $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \Omega$ est l'ensemble des intégrales $\int_\Omega \gamma \in \mathbb{R}^N$ lorsque γ parcourt l'ensemble des sections Borel-mesurables $\gamma: \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ de π . D'après [3], l'intégrale de Minkowski est un polytope convexe de dimension égale à $\dim \mathcal{P} - \dim \Omega$.

Si F est un polynôme dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$, son polytope de Newton $\mathcal{P}(F) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ est l'enveloppe convexe de ses exposants. Considérons un polynôme de la forme $F = \sum_{k=0}^n a_k Y^k$, où les a_k sont des polynômes dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$ avec $a_0 a_n \neq 0$. Soit $\mathcal{P}(F)$ le polytope de Newton de F ; nous allons décrire l'intégrale de Minkowski de la projection $\pi: \mathcal{P}(F) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow [0, n] \subset \mathbb{R}$. Ceci est un cas particulier du théorème 7.3 de [3]. Une section de π est une application monotone de la forme $t \mapsto (\gamma(t), t) \in \mathcal{P}(F)$, pour $t \in [0, n]$, et il lui est associé le point $\int_{[0, n]} \gamma$ dans l'intégrale de Minkowski de π . Il est montré en [3] que les sommets de l'intégrale de Minkowski correspondent à des intégrales des chemins monotones cohérents dans les arêtes de $\mathcal{P}(F)$.

Ces chemins sont décrits par une collection $\{p_0, p_{i_1}, \dots, p_{i_s}, p_n\}$ de sommets de $\mathcal{P}(F)$, avec $p_j = (u_j, j)$, où u_j est un sommet de $\mathcal{P}(a_j)$ pour $j \in \{0, i_1, \dots, i_s, n\}$, avec $0 < i_1 <$

$\dots < i_s < n$. Si $v < v'$ on peut paramétriser le segment $[(u, v), (u', v')] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, par $\gamma(\lambda) = u + \frac{\lambda-v}{v'-v}(u' - u)$, avec $\lambda \in [v, v']$, donc $\int_{[v, v']} \gamma = \frac{v'-v}{2}(u + u')$.

L'intégrale du chemin γ correspondant à la collection de sommets $\{p_0, p_{i_1}, \dots, p_{i_s}, p_n\}$ est:

$$\begin{aligned}
 \int_{[0, n]} \gamma &= \int_{[0, i_1]} \gamma + \dots + \int_{[i_s, n]} \gamma \\
 (1) \quad &= \frac{1}{2} \left(i_1(u_0 + u_{i_1}) + \sum_{k=2}^s (i_k - i_{k-1})(u_{i_k} + u_{i_{k-1}}) + (n - i_s)(u_{i_s} + u_n) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(i_1 u_0 + i_2 u_{i_1} + \sum_{k=2}^{s-1} (i_{k+1} - i_{k-1}) u_{i_k} + (n - i_{s-1}) u_{i_s} + (n - i_s) u_n \right).
 \end{aligned}$$

Ces considérations motivent la définition suivante:

Définition 2 Soient un cône strictement convexe $\rho \subset \mathbb{R}^d$ de dimension d et $F \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$ un polynôme de degré n de terme constant non nul. Soit \mathcal{Q} l'enveloppe convexe des intégrales $\int \gamma_w$ des chemins monotones γ dans le polyèdre $\mathcal{N}_\rho(F)$ définis par des vecteurs irrationnels $w \in \rho$. Le ρ -polyèdre-fibre de F est la somme de Minkowski $\mathcal{Q}_\rho(F) := 2(\mathcal{Q} + \rho^\vee)$.

Le ρ -polyèdre-fibre $\mathcal{Q}_\rho(F)$ est un polyèdre rationnel. Il dépend du ρ -polyèdre de Newton de F . L'éventail Σ associé au polyèdre-fibre $\mathcal{Q}_\rho(F)$ est une subdivision rationnelle finie du cône ρ . Si w, w' sont des vecteurs dans l'intérieur d'un cône de dimension d de Σ , ils définissent le même chemin polygonal dans les arêtes du polyèdre $\mathcal{N}_\rho(F)$.

Dans le cas où F est un polynôme dans l'anneau $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$ on appelle *polytope-fibre* de F le polytope $\mathcal{Q}(F) := 2\mathcal{Q}$ où \mathcal{Q} est l'intégrale de Minkowski de la la projection du polytope de Newton $\pi: \mathcal{P}(F) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow [0, n] \subset \mathbb{R}$.

3.4 Théorème de Newton-Puiseux

On va généraliser un résultat de [9].

Théorème 2 Soient ρ un cône rationnel strictement convexe de dimension d et $F \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$ un polynôme non constant. Pour tout vecteur irrationnel $w \in \rho$ il existe un cône rationnel strictement convexe σ_w de dimension d , et $k \in \mathbb{N}$ tels que $w \in \sigma_w \subset \rho$ et que F se décompose dans l'anneau $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_{\sigma_w}))[Y]$.

Preuve Elle est essentiellement la même que celle de [9]. Un vecteur irrationnel $w \in \rho \subset (\mathbb{R}^d)^*$ définit un chemin monotone cohérent γ dans les arêtes du polyèdre rationnel $\mathcal{N}_\rho(F)$. Fixons une arête $e = [(u, v), (u', v')] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ du chemin γ , avec $v < v'$. L'inclinaison de e est un vecteur $q \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}^d$ où l est la longueur $v' - v$. La restriction de F à l'arête e est le polynôme $F|_e = \sum_{I \in e} \alpha_I X_1^{i_1} \dots X_d^{i_d} Y^{i_{d+1}}$. On associe à l'arête e le polynôme $f_e \in \mathbb{C}[t]$ par $F|_e(1, \dots, 1, t) = t^v f_e$ où $f_e(0) \neq 0$. Le polynôme f_e est de degré l et toutes ses racines sont non nulles.

Soit c une racine de f_e , définissons le polynôme $F_2 = F(Y + cX^q) \in \mathbb{C}((\frac{1}{l}S_\rho))[Y]$. Clairement, F_2 est un polynôme de degré r et on a :

$$F_2 = \sum_I \alpha_I \sum_{j=0}^{i_{d+1}} \binom{i_{d+1}}{j} c^j X_1^{i_1+jq_1} \dots X_d^{i_d+jq_d} Y^{i_{d+1}-j}.$$

On en déduit que :

1. Les exposants de F_2 sont de la forme $I + j(q, -1)$ où $I = (i_1, \dots, i_{d+1})$ est un exposant de F et $j \in \{0, \dots, i_{d+1}\}$, donc $\pi_e(\mathcal{N}_\rho(F_2))$ est contenu dans $\pi_e(\mathcal{N}_\rho(F))$.
2. Le coefficient du terme constant de F_2 d'exposant dans la droite E défini par l'arête e est, $\sum_{I \in e} \alpha_I c^{i_{d+1}} = f_e(c)$, nul par construction.
3. Le coefficient du terme de F_2 d'exposant $p_{v'}$ coïncide avec celui de F .
4. Si Y ne divise pas F_2 , le polyèdre de F_2 a toujours des points dans l'hyperplan $v = 0$.
5. L'exposant de F_2 dans la droite E correspondant au terme de plus petit degré en Y est un sommet du ρ -polyèdre de Newton de F_2 . Cet exposant est de la forme (u, m) où m est la multiplicité de c comme racine de f_e . En effet, la plus petite ordonnée des exposants de F_2 dans la droite E est le nombre m de fois qu'il faut dériver pour que $\frac{\partial^m}{\partial Y^m}(F_2|_E)$ ait un terme constant non nul. Comme $F_2|_E = F|_e(Y + cX^q)$ le coefficient du terme constant de Y de $\frac{\partial^k}{\partial Y^k}(F_2|_E)$ est égal à $\sum_{I \in e} \alpha_I i_{d+1} \dots (i_{d+1} - k + 1) c^{i_{d+1}-k} = \frac{d^k f_e}{dt^k}(c)$.

Le sommet (u, m) du polyèdre $\mathcal{N}_\rho(F_2)$ défini par 5. est un sommet du chemin monotone défini par w dans les arêtes de $\mathcal{N}_\rho(F_2)$. Si Y ne divise pas F_2 on va considérer la partie finale du chemin entre le sommet (u, m) et l'hyperplan $v = 0$.

Parmi les segments de cette partie finale du chemin polygonal on choisit une arête e_2 d'inclinaison q_2 et de longueur l_2 . On choisit une racine c_2 du polynôme associé f_{e_2} de multiplicité m_2 et on définit $F_3 := F_2(Y + c_2 X^{q_2})$. On continue par récurrence. Le polynôme F_n est un élément de l'anneau $\mathbb{C}((\frac{1}{l_1 \dots l_{n-1}} S_\rho))[Y]$.

On obtient une suite décroissante de nombres entiers positifs : $l \geq m \geq l_2 \geq m_2 > \dots > 0$, qui est donc stationnaire; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $l_n = m_n = m_{n_0} = m$. Ceci implique que $f_{e_n} = \theta(t - c_n)^m$, et aussi que la partie finale du chemin défini par w dans les arêtes de $\mathcal{N}_\rho(F_n)$ est le segment e_n . De plus les sommets de e_n et e_{n+1} qui ne sont pas dans l'hyperplan $v = 0$ coïncident, pour $n > n_0$.

Pour $n > n_0$, on a le segment $e_n = [(u_n, 0), (u_0, m)]$ d'inclinaison $q_n = \frac{1}{m}(u_n - u_0)$. L'intersection de la droite définie par e_n avec l'hyperplan $v = 0$ est le point $p_n := u_0 + m q_n$. Par définition du ρ -polyèdre de Newton, le cône $\sigma(e_{n_0})$ associé au sommet p_{n_0} du polyèdre $\pi_{e_{n_0}}(\mathcal{N}_\rho(F_{n_0}))$ est contenu dans ρ . Le lemme 4 implique que $w \in \sigma(e_{n_0})$.

On vérifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que les inclinaisons construites sont dans un réseau $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^d$. On sait que $u_0 = \frac{\beta_0}{k}$, $u_{n_0} = \frac{\beta_{n_0}}{k}$ où $\beta_0, \beta_{n_0} \in \mathbb{Z}^d$ et $k = l_1 l_2 \dots l_{n_0-1}$ est un entier. L'inclinaison de e_{n_0} est $q_{n_0} = \frac{\beta_{n_0} - \beta_0}{km} = \frac{\beta}{k\lambda}$ où $\beta \in \mathbb{Z}^d$ et $\lambda \in \mathbb{N}$ est premier avec une coordonnée de β . Si $(\frac{\beta'}{k}, h)$ est un exposant de $F|_e^{n_0}$ on a $q_{n_0} = \frac{\beta_{n_0} - \beta'}{kh} = \frac{\beta}{k\lambda}$. Comme $\lambda(\beta_{n_0} - \beta') = h\beta$, on déduit que λ divise h donc $f_{e_{n_0}}$ est un polynôme en t^λ . Par ailleurs $f_{e_n} = \theta(t - c_n)^m$ et comme la caractéristique de \mathbb{C} est zéro, on a $\lambda = 1$. Par récurrence on obtient que $q_n \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d$, pour $n \geq n_0$ et donc pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que les inclinaisons q_j sont dans un cône affine strictement convexe.

Le ρ -polyèdre de Newton de F_{n_0} est contenu dans le cône affine:

$$W(e_{n_0}) := \{\lambda(u - u')/u \in \mathcal{N}_\rho(F_{n_0}), u' \in e_{n_0}, \lambda \geq 0\},$$

associé à l'arête e_{n_0} . Comme $u_{n_0+1} \in W(e_{n_0})$, par construction on a l'inclusion $\mathcal{N}_\rho(F_{n_0+1}) \subset W(e_{n_0})$. Par récurrence, en utilisant que le sommet (u_0, m) de e_n est sur la droite qui contient le segment e_{n_0} , on montre que $u_n \in W(e_{n_0})$ et que $\mathcal{N}_\rho(F_n) \subset W(e_{n_0})$, pour $n > n_0$. Ceci implique pour tout $w' \in \sigma(e_{n_0})$ que $\langle w', q_n - q_{n_0} \rangle = \frac{1}{m} \langle w', p_n - p_{n_0} \rangle$ est ≥ 0 . Donc les exposants construits sont dans le cône rationnel affine $q_{n_0} + \sigma(e_{n_0})^\vee$ pour $n \geq n_0$.

Notons σ pour $\sigma(e_{n_0})$. Il existe $u_0 \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d$ tel que les inclinaisons q_n appartiennent à $u_0 + \frac{1}{k}S_\sigma$. Définissons les sommes partielles, $\phi_n = \sum_{j=1}^n c_j X^{q_j}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $\phi_n \in \mathbb{C}(\frac{1}{k}S_\sigma)$ et $X^{-u_0} \phi_n \in \mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_\sigma]]$. Par construction, et par le lemme 5, on sait que $q_j <_w q_{j+1}$ pour $j \in \mathbb{N}$. Par la remarque 2, ceci implique que la série formelle $\phi := \sum c_j X^{q_j}$ est égale à $X^{u_0} \lim_{n \rightarrow \infty} X^{-u_0} \phi_n$ où la limite est dans l'anneau complet $\mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_\sigma]]$.

Comme $w \in \sigma \subset \rho$, on peut considérer F comme élément de $\mathbb{C}(\frac{1}{k}S_\sigma)[Y]$. La série formelle ϕ est une racine de F . En effet, si $n \geq n_0$ la série $F(\phi_{n-1}) = F_n(0)$ a tous ses exposants dans le cône rationnel affine $p_{n_0} + \sigma(e_{n_0})^\vee$. L'égalité suivante $F(\phi) = X^{p_{n_0}} \lim_{n \rightarrow \infty} F(\phi_{n-1}) X^{-p_{n_0}}$ est clair. Si $n \geq n_0$ l'exposant initial de $F(\phi_{n-1}) X^{-p_{n_0}}$ par rapport à w est $p_{n+1} - p_n = m(q_{n+1} - q_{n_0})$ et on a $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) X^{-p_{n_0}} = 0$.

On vérifie que la multiplicité de ϕ comme racine de F est $\geq m$. La multiplicité de c_n comme racine de f_{e_n} est $\geq m$, donc c_n est une racine de $\frac{d^s f_{e_n}}{dt^s}$ pour $1 \leq s \leq m-1$. Le polynôme $\frac{d^s f_{e_n}}{dt^s}$ est le polynôme de l'arête e_n^s du polyèdre $\mathcal{N}_\rho(\frac{\partial^s F}{\partial Y^s})$ qui est sur le segment $-(0, \dots, 0, s) + e_n$. L'arête e_n^s est déterminée par le vecteur irrationnel w . Comme $\frac{\partial^s F_n}{\partial Y^s} = \frac{\partial^s F}{\partial Y^s}(Y + \phi_{n-1})$ on obtient que ϕ est une racine de $\frac{\partial^s F}{\partial Y^s}$ pour $1 \leq s \leq m-1$.

On a montré que, associés à chaque arête e du chemin monotone γ , il existe $k \in \mathbb{N}$ et un cône rationnel σ_e strictement convexe de dimension d tel que $w \in \sigma_e \subset \rho$, tels que F ait au moins l_e racines à la Newton-Puiseux dans $\mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_{\sigma_e}]]$. On peut choisir $k \in \mathbb{N}$ valable pour toutes les arêtes de γ . Comme le vecteur w est irrationnel, le cône rationnel $\tau = \bigcap_{e \in \gamma} \sigma_e$ est de dimension d . L'existence d'un homomorphisme d'algèbres $\mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_{\sigma_e}]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_\tau]]$, pour chaque arête e de γ , garantit que F se décompose dans $\mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_\tau]]$, parce que les exposants initiaux par rapport à $<_w$ des séries correspondantes à segments différents de γ sont différents. ■

Remarque 3 Soient $F \in \mathbb{C}[[S_\rho]]$ un polynôme de degré ≥ 1 et $w \in \rho$ un vecteur irrationnel, définissant un chemin polygonal γ dans les arêtes de $\mathcal{N}_\rho(F)$. La démonstration du théorème 2 montre que, associées à chaque arête e de γ , il existe l_e racines de F telles que leur exposant initial par rapport à w est l'inclinaison q_e .

3.5 Rapport avec les paramétrisations des singularités quasi-ordinaires

Théorème 3 Soit $F = \sum_{j=0}^n a_j Y^j$ un polynôme réduit de degré $n \geq 1$ avec $a_j \in \mathbb{C}\{\{S_\rho\}\}$.

1. Pour tout cône τ de dimension d de l'éventail associé au polyèdre $\mathcal{N}_\rho(a_n \Delta_Y F)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F se décompose dans l'anneau $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$.

2. Si $a_0 \neq 0$, pour tout cône τ de dimension d de l'éventail associé au polyèdre $\mathcal{N}_\rho(a_n \Delta_Y F) + \mathcal{Q}_\rho(F)$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F se décompose dans l'anneau $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$, et de plus les racines de F sont des unités.

Preuve Soit τ un cône de dimension d de l'éventail associé au polyèdre $\mathcal{N}_\rho(a_n \Delta_Y F)$. Par définition de ρ -polyèdre de Newton, le cône τ est contenu dans ρ , et on a l'homomorphisme d'algèbres $\mathbb{C}\{S_\rho\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{S_\tau\}$ qui permet de considérer F comme élément de $\mathbb{C}\{\{S_\tau\}\}[Y]$.

Tout vecteur irrationnel $w \in \tau$ atteint sa valeur minimale sur les exposants de a_n au même point u_n . On montre par récurrence sur n qu'il existe $q_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que le polyèdre $\mathcal{N}_\tau(F)$ est contenu dans le cône affine:

$$W := \{(u_n, n) + \lambda(q_0, -1) + (u', 0)/\lambda \in [0, n], u' \in \tau^\vee\}.$$

Si $n = 1$, il suffit de prendre $q \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\mathcal{N}_\tau(a_0)$ soit contenu dans le cône affine $u_n + q + \tau^\vee$. Si $n > 1$, par récurrence on a construit q pour le polynôme $(F - a_0)Y^{-1}$. Il suffit de prendre $q_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que le polyèdre $u_n + nq + \tau^\vee + \mathcal{N}_\tau(a_0)$ soit contenu dans le cône affine $u_n + nq_0 + \tau^\vee$.

Nous notons p_0 le point $u_n + nq_0$, e_0 le segment $[(u_n, n), (p_0, 0)]$ et $\pi_{e_0}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \{0\}$ la projection parallèlement à l'arête e_0 . On a $\pi_{e_0}(u, v) = u + vq_0$.

On définit le changement:

$$G = X^{-p_0} F(X^{q_0} Y).$$

On en déduit:

1. Si $F = \sum_{j=0}^n a_j Y^j$ avec $a_i \in \mathbb{C}\{\{S_\tau\}\}$ on obtient que $G = \sum_{j=0}^n a_j X^{jq_0 - p_0} Y^j$, et donc l'exposant de G qui correspond à l'exposant (u, j) de F est $(\pi_{e_0}(u) - p_0, j)$. Par construction, comme $\mathcal{N}_\tau(F) \subset W$, le vecteur $\pi_{e_0}(u) - p_0$ appartient au cône τ^\vee . Ceci implique que G est un polynôme dans l'anneau $\mathbb{C}\{S_\tau\}$. De plus, l'exposant de G qui correspond à l'exposant (u_n, n) de F est $(0, n)$, donc $G(z_\tau, Y) \in \mathbb{C}[Y]$ est un polynôme de degré n .
2. La quasi-homogénéité et l'homogénéité du discriminant générique impliquent que le discriminant de G par rapport à Y est de la forme $\Delta_Y G = X^{u_0} \varepsilon$ où ε est une unité dans l'anneau $\mathbb{C}\{S_\tau\}$.

En appliquant le théorème 1, on voit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que G se décompose dans l'anneau $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$. Les racines correspondantes de F sont dans $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$.

Soit τ est un cône de dimension d de la subdivision finie de ρ induite par le polyèdre $\mathcal{N}_\rho(a_n \Delta_Y F) + \mathcal{Q}_\rho(F)$; vérifions que les racines construites sont des unités dans $\mathbb{C}\{\{S_\tau\}\}$.

Soit $w \in \tau$ un vecteur irrationnel. D'après le théorème 2, il existe un cône rationnel strictement convexe σ qui contient w , et $k \in \mathbb{N}$ tels que le polynôme F se décompose sur l'anneau $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_\sigma))$.

Puisque le vecteur $w \in \tau \cap \sigma$ est irrationnel, le cône rationnel $\tau \cap \sigma$ est nécessairement un cône de dimension d , et son cône dual $\tau^\vee + \sigma^\vee$ est strictement convexe. L'anneau intègre $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_{\tau \cap \sigma}))$ contient $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_\sigma))$ et $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_\tau))$ comme sous-anneaux.

D'abord, les racines de F obtenues par le théorème 1 sont dans l'anneau $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$, et donc elles doivent coïncider avec les racines obtenues à la Newton-Puiseux. Nous affirmons que ces racines sont des éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$. Par hypothèse, chaque élément irrationnel $w \in \tau$ définit le même chemin γ dans les arêtes de

$\mathcal{N}_\tau(F)$. Donc l'exposant initial u par rapport à w d'une racine ϕ ne dépend pas de $w \in \tau$ (par la remarque 3). On obtient que $\phi = X^u \varepsilon$ où ε est une unité de $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$, c'est-à-dire que ϕ est une unité dans $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$. ■

On obtient aussi la version polynomiale du théorème précédent:

Corollaire 1 Soit un polynôme $F = \sum a_j Y^j \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$ réduit de degré $n \geq 1$.

1. Si le polytope $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a_n \Delta_Y F)$ est de dimension d , pour tout cône τ de dimension d de l'éventail associé à \mathcal{P} il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F se décompose dans l'anneau $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$.
2. Si $a_0 \neq 0$ et si τ est un cône associé à un sommet du polytope $\mathcal{P}(\Delta_Y F) + \mathcal{Q}(F)$, toutes les racines de F sont des unités dans $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$.

Preuve Si le polytope $\mathcal{P}(a_n \Delta_Y F)$ est de dimension d , le cône τ associé à un sommet de $\mathcal{P}(a_n \Delta_Y F)$ est de dimension d . On applique le théorème 3 à F vu comme élément de $\mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$.

Si le polytope $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\Delta_Y F) + \mathcal{Q}(F)$ est de dimension $< d$, le cône τ associé à un sommet de \mathcal{P} est rationnel de dimension d mais il n'est pas strictement convexe. Le cône τ^\vee est strictement convexe et τ définit l'algèbre $\mathbb{C}[[S_\tau]]$. Si $\sigma \subset \tau$ est un cône strictement convexe de dimension d , on considère F comme élément de $\mathbb{C}\{S_\sigma\}[Y]$ et on obtient que il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F se décompose dans l'anneau $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\sigma\}$.

On peut recouvrir le cône τ par un nombre fini de cônes rationnels strictement convexes de dimension d , $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq s}$, tels que $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ soit d'intérieur non vide, pour $i = 1, \dots, s-1$. Ceci implique que les racines de F obtenues par le théorème 1 correspondant à σ_i et à σ_{i+1} vont coïncider, et le terme initial d'une racine par rapport à la valuation induite par un vecteur irrationnel w ne dépend pas de $w \in \sigma_i \cup \sigma_{i+1}$. Donc toutes les racines de F sont des séries à exposants dans un translaté du cône $\bigcap_{i=1}^s \sigma_i^\vee = \tau^\vee$. ■

Remarque 4 Soit $F \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$ un polynôme de degré n tel que 0 soit une racine simple de $F(0, Y)$, le théorème des fonctions implicites garantit qu'il existe une unique série $\phi \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d\}$ telle que $F(\phi) = 0$. Si on a $a_n \Delta_Y F = X^u \varepsilon$ où $\varepsilon(0) \neq 0$ le théorème 3 montre que les exposants de ϕ sont dans un translaté entier du cône dual associé au sommet u de $\mathcal{P}(a_n \Delta_Y F)$ lorsque ce polytope est de dimension d . (Voir l'exemple 1).

4 Application aux polyèdres de Newton du discriminant et du résultant

4.1 Les conditions discriminantales pour le polyèdre de Newton

Suivant [9], on dit que un polynôme $F \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$ vérifie la *condition discriminantale* si pour toute arête admissible e de son ρ -polyèdre de Newton, le polynôme f_e n'a que des racines simples.

Théorème 4 Soit $F = \sum_{k=0}^n a_k Y^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}((S_\rho))$ tels que $a_0 a_n \neq 0$. On a l'inclusion de polyèdres

$$\mathcal{N}_\rho(a_0) + \mathcal{N}_\rho(a_n) + \mathcal{N}_\rho(\Delta_Y F) \subseteq \mathcal{Q}_\rho(F)$$

où $\Delta_Y F$ est le discriminant de F par rapport à Y . On a l'égalité si F vérifie la condition discriminantale.

Preuve On va trouver les conditions génériques que doivent vérifier les coefficients des termes qui apparaissent dans F , pour garantir l'égalité dans le théorème.

Soit $w \in \rho$ un vecteur irrationnel, et soit γ le chemin monotone défini par w dans les arêtes du ρ -polyèdre de Newton. Le chemin γ a des sommets $\{p_0, p_{i_1}, \dots, p_{i_t}, p_n\}$ dans $\mathcal{N}_\rho(F)$, avec $p_j = (u_j, j)$ pour $j \in \{0 = i_0, i_1, \dots, i_t, i_{t+1} = n\}$ avec $i_0 < \dots < i_{t+1}$. Nous notons $q_r := \frac{-u_r + u_{i_{r-1}}}{i_r - i_{r-1}} \in \mathbb{Q}^d$ et $l_r := i_r - i_{r-1}$ l'inclinaison et la longueur du segment $e_r = [p_{i_{r-1}}, p_{i_r}]$ du chemin γ , pour $r = 1, \dots, t+1$.

D'après le théorème 2, il existe un cône rationnel strictement convexe σ_w , et $k \in \mathbb{N}$ tels que F se décompose dans l'anneau $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_{\sigma_w}))[[Y]]$. À chaque segment $e_r = [p_{i_{r-1}}, p_{i_r}]$ du chemin γ sont associées $i_r - i_{r-1}$ racines de F de la forme:

$$\phi_j = c_j X^{q_r} + \dots,$$

où q_r est l'inclinaison du segment e_r , et c_j parcourt les racines de f_{e_r} comptées avec leur multiplicité. De plus q_r est l'exposant initial par rapport à w des termes qui apparaissent dans ϕ_j . On indexe les racines ϕ_j correspondant à e_r , par $j \in \mathcal{A}_r := \{i_{r-1} + 1, \dots, i_r\}$.

En appliquant le lemme 5, on voit que parmi les termes qui peuvent apparaître dans $\phi_k - \phi_j$, celui d'exposant de le plus petit par rapport à $\langle w$ est égal à:

$$\begin{cases} (c_k - c_j)X^{q_r} & \text{si } k, j \in \mathcal{A}_r \\ c_j X^{q_m} & \text{si } k \in \mathcal{A}_r, j \in \mathcal{A}_m \text{ et } r < m. \end{cases}$$

Comme,

$$\Delta_Y F = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_n^{2(n-1)} \prod_{k < j} (\phi_k - \phi_j)^2,$$

le terme d'exposant le plus petit par rapport à $\langle w$ qui peut apparaître dans $a_0 a_n \Delta_Y F$ est égal à ABC où:

$$A = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \alpha_{p_0} \alpha_{p_n}^{2n-1} X^{u_0 + (2n-1)u_n}$$

$$B = \prod_{r=1}^{t+1} \prod_{i_{r-1} < k_r < j_r \leq i_r} (c_{k_r} - c_{j_r})^2 X^{2q_r}$$

$$C = \prod_{r=1}^t \prod_{k_r \in \mathcal{A}_r} \prod_{m=r+1}^{t+1} \prod_{j_m \in \mathcal{A}_m} c_{j_m}^2 X^{2q_m}.$$

L'exposant correspondant à B est:

$$\begin{aligned} & 2 \left(\binom{i_1}{2} q_1 + \binom{i_2 - i_1}{2} q_2 + \dots + \binom{i_{t+1} - i_t}{2} q_{t+1} \right) \\ & = (i_1 - 1)(u_0 - u_{i_1}) + (i_2 - i_1 - 1)(u_{i_1} - u_{i_2}) + \dots + (i_{t+1} - i_t - 1)(u_{i_t} - u_{i_{t+1}}) \end{aligned}$$

$$= (i_1 - 1)u_0 + (i_2 - 2i_1)u_{i_1} + (i_3 - 2i_2 + i_1)u_{i_2} \\ + \cdots + (n - 2i_t + i_{t-1})u_{i_t} + (-n + i_{t-1})u_n.$$

L'exposant correspondant à C est:

$$2 \left(\sum_{r=1}^t (i_r - i_{r-1}) \sum_{m=r+1}^{t+1} q_m (i_m - i_{m-1}) \right) \\ = 2 \left(\sum_{r=1}^t (i_r - i_{r-1}) (-u_n + u_{i_r}) \right) \\ = 2 (i_1 u_{i_1} + (i_2 - i_1) u_{i_2} + \cdots + (i_t - i_{t-1}) u_{i_t} - i_t u_n).$$

L'exposant u correspondant à ABC coïncide avec $2 \int \gamma$, (voir la formule (1), Section 3.3). Clairement, le coefficient correspondant à ABC est non nul si et seulement si les segments du chemin γ vérifient la condition discriminantale. Ceci termine la preuve, parce que le vecteur irrationnel w est arbitraire. ■

Corollaire 2 Avec les notations précédentes, le coefficient du terme de la série $a_0 a_n \Delta_Y F$ d'exposant égal à $2 \int \gamma$ est:

$$c(\gamma) := (-1)^k \alpha_{p_0} \alpha_{p_1}^2 \cdots \alpha_{p_t}^2 \alpha_{p_{t+1}} \Delta f_{e_1} \cdots \Delta f_{e_{t+1}},$$

où $f_{e_r} = \alpha_{p_{r-1}} + \cdots + \alpha_{p_r} t^{l_r}$ est le polynôme de l'arête $e_r = [p_{i_{r-1}}, p_{i_r}]$ du chemin γ , son discriminant est Δf_{e_r} et $k = \frac{1}{2} (n(n-1) + \sum_{r=1}^{t+1} l_r(l_r-1))$.

Preuve En utilisant que $\Delta f_{e_r} = (-1)^{\frac{1}{2} l_r(l_r-1)} \alpha_{p_{i_r}}^{2(l_r-1)} \prod_{i_{r-1} < k_r < j_r \leq i_r} (c_{k_r} - c_{j_r})^2$ on obtient que le coefficient de B est

$$\prod_{r=1}^{t+1} (-1)^{\frac{1}{2} l_r(l_r-1)} \alpha_{p_{i_r}}^{-2(l_r-1)} \Delta f_{e_r}.$$

Comme le produit des racines de f_{e_m} est égal à $(-1)^{l_m} \frac{\alpha_{p_{i_{m-1}}}}{\alpha_{p_{i_m}}}$, on déduit que le coefficient de C est

$$\prod_{r=1}^t \prod_{k_r \in \mathcal{A}_r} \prod_{m=r+1}^{t+1} \left(\frac{\alpha_{p_{i_{m-1}}}}{\alpha_{p_{i_m}}} \right)^2 = \prod_{r=1}^t \prod_{k_r \in \mathcal{A}_r} \left(\frac{\alpha_{p_{i_r}}}{\alpha_{p_{i_{r+1}}}} \right)^2 = \prod_{r=1}^t \left(\frac{\alpha_{p_{i_r}}}{\alpha_{p_{i_{r+1}}}} \right)^{2l_r}.$$

Donc le coefficient de ABC est:

$$(-1)^k \Delta f_{e_1} \cdots \Delta f_{e_{t+1}} \alpha_{p_0} \alpha_{p_{t+1}}^{2n-1-2(n-l_{t+1})-2(l_{t+1}-1)} \prod_{r=1}^t \alpha_{p_{i_r}}^{2l_r-2(l_r-1)} = c(\gamma). \quad \blacksquare$$

On déduit des théorèmes 3 et 4:

Corollaire 3 Soit le polynôme $F = \sum_{k=0}^n a_k Y^k$, où a_k sont des séries dans $\mathbb{C}((S_\rho))$ telles que $a_0 a_n \neq 0$. Si F vérifie la condition discriminantale, pour tout cône τ de dimension d de l'éventail associé au polyèdre $\mathcal{Q}_\rho(F)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F se décompose dans l'anneau $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_\tau))$, et de plus les racines de F sont des unités. ■

Remarque 5 Le corollaire 4.1 de [9] énonce une “version polynomiale” incorrecte du corollaire précédent. Il est dit que des racines de F correspondants aux cônes associés aux sommets différents du polytope-fibre sont différents. Supposons que le polytope $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\Delta_Y F) + \mathcal{P}(a_n)$ soit de dimension d , et que l'éventail Σ associé au polytope-fibre soit une sous-division stricte de l'éventail Σ' associé à \mathcal{P} . Par le corollaire 1, les racines de F correspondants aux cônes de Σ qui subdivisent un cône $\tau \in \Sigma'$ de dimension d vont coïncider dans l'anneau $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$. Elles ne seront pas toutes des unités dans cet anneau. (Voir l'exemple 1).

Corollaire 4 Soit le polynôme $F = \sum_{i=1}^n a_i Y^i$ où a_i sont des polynômes dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$ tels que $a_0 a_n \neq 0$. On a l'inclusion de polytopes

$$\mathcal{P}(a_0) + \mathcal{P}(a_n) + \mathcal{P}(\Delta_Y F) \subseteq \mathcal{Q}(F)$$

et on a l'égalité si et seulement si le polynôme F vérifie la condition discriminantale.

Preuve Soit ρ un cône de dimension d strictement convexe. On va considérer le polynôme F comme un élément de l'anneau $\mathbb{C}[[S_\rho]][Y]$. En appliquant le théorème 4 pour chaque $w \in \rho$, on voit que $\mathcal{Q}(F) + \rho^\vee \supseteq \mathcal{P}(a_0) + \mathcal{P}(a_n) + \mathcal{P}(\Delta_Y F) + \rho^\vee$, et que l'on a l'égalité si et seulement si toutes les arêtes admissibles du polyèdre $\mathcal{P}(F) + \rho^\vee \times \{0\}$ vérifient la condition discriminantale. Ceci termine la preuve parce que ρ est arbitraire. ■

Remarque 6 En utilisant le corollaire 4 et le théorème 7.3 de [3], on peut déduire de ce qui précède les théorèmes 2.2 et 2.3, Chap. 12, de [6]. Ces résultats donnent le polytope de Newton du discriminant générique (c'est-à-dire le discriminant du polynôme $F = X_n Y^n + \dots + X_1 Y + X_0 \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \dots, X_n][Y]$ par rapport à Y) et les coefficients des termes correspondant aux sommets du polytope.

En effet, le polytope $\mathcal{P}(F)$ est un simplexe de dimension n , de sommets $(u_j, j) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$, où $\{u_j\}_{j=0}^n$ sont les vecteurs de la base canonique dans \mathbb{R}^{n+1} . Comme le polynôme F vérifie la condition discriminantale on a $\mathcal{Q}(F) = \mathcal{P}(X_0 X_n \Delta_Y F)$. Chaque sous-ensemble $\{i_1, \dots, i_s\}$ de $\{1, \dots, n-1\}$ correspond de manière unique à un chemin monotone $\gamma_{\{i_1, \dots, i_s\}}$ dans les arêtes de $\mathcal{P}(F)$. Comme $\mathcal{P}(F)$ est un simplexe, il existe un vecteur irrationnel $w \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$ définissant le chemin $\gamma_{\{i_1, \dots, i_s\}}$. Le sommet de l'intégrale de Minikowski $\int \gamma_{\{i_1, \dots, i_s\}}$ est décrit par la formule (1). En appliquant le corollaire 2, on obtient aussi le coefficient correspondants aux sommets du polytope de Newton du discriminant générique.

4.2 Application au polyèdre de Newton du résultant

On dira que deux polynômes $F, G \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$ vérifient la *condition résultante* si pour toute paire d'arêtes e de $\mathcal{N}_\rho(F)$ et e' de $\mathcal{N}_\rho(G)$ ayant la même inclinaison, les polynômes des arêtes respectives $f_e, g_{e'} \in \mathbb{C}[t]$ n'ont pas de racines en commun.

Soit w un vecteur irrationnel dans un cône τ de dimension d de l'éventail associé au polyèdre $\mathcal{Q}_\rho(F) + \mathcal{Q}_\rho(G)$. Le vecteur w détermine des chemins monotones uniques γ_F et γ_G dans les arêtes des ρ -polyèdres de Newton de F et de G . Le chemin γ_F a des arêtes e_i d'inclinaisons q_i , pour $i = 1, \dots, m$ et par le lemme 5 on a $q_m <_w \dots <_w q_1$. Le chemin γ_G a des arêtes e'_j d'inclinaisons q'_j , pour $j = 1, \dots, m'$ tels que $q'_{m'} <_w \dots <_w q'_1$.

Par contre, l'ordre défini par w dans $q_1, \dots, q_m, q'_1, \dots, q'_{m'}$ peut varier lorsque w parcourt τ . Nous considérons la subdivision finie rationnelle la moins fine de τ possédant la propriété suivante: des vecteurs irrationnels qui sont dans le même cône de la subdivision définissent le même ordre sur l'ensemble des inclinaisons $q_1, \dots, q_m, q'_1, \dots, q'_{m'}$. On définit de cette manière une subdivision Σ de l'éventail associé à $\mathcal{Q}_\rho(F) + \mathcal{Q}_\rho(G)$.

Proposition 1 *L'éventail associé à l'intégrale de Minkowski $\mathcal{Q}_\rho(FG)$ est égal à Σ .*

Preuve Soit γ_{FG} le chemin monotone dans le polyèdre $\mathcal{N}_\rho(FG) = \mathcal{N}_\rho(F) + \mathcal{N}_\rho(G)$ défini par un vecteur irrationnel $w \in \tau \in \Sigma$. Chaque point $\gamma(t)$ est la somme de deux points situés dans les chemins γ_F et γ_G définis par w dans les polyèdres respectifs. Clairement on a $\gamma_{FG}(n + n') = \gamma_F(n) + \gamma_G(n')$. Si $q_m \geq_w q'_{m'}$, le segment $l_{m+m'} := \gamma_G(n') + e_m$ est contenu dans γ_{FG} . Ce segment n'est pas une arête de γ_{FG} si et seulement si, on a $q_m = q'_{m'}$. Par récurrence, on subdivise γ_{FG} en $m+m'$ segments, $l_1, \dots, l_{m+m'}$, tels qu'il existe une bijection $\{l_1, \dots, l_{m+m'}\} \rightarrow \{e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_{m'}\}$ qui préserve l'inclinaison et la longueur. De plus, γ_{FG} est complètement déterminé par γ_F, γ_G et l'ordre des inclinaisons. Ceci implique que Σ est un éventail plus fin que l'éventail associé à $\mathcal{Q}_\rho(FG)$.

Réciproquement, si w, w' sont des vecteurs irrationnels dans un cône de l'éventail associé au polyèdre $\mathcal{Q}_\rho(FG)$, ils définissent un unique chemin monotone γ et par le lemme 5 les inclinaisons de ses arêtes ont le même ordre par rapport à $<_w$ et $<_{w'}$, donc w, w' sont dans le même cône de Σ . ■

Proposition 2 *Soient $F, G \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$ des polynômes de degrés $n, n' \geq 1$ ayant des termes constants non nuls. Si F, G vérifient la condition résultante, alors:*

1. *L'éventail Σ associé au polyèdre-fibre $\mathcal{Q}_\rho(FG)$ est une subdivision de l'éventail du ρ -polyèdre de Newton du résultant de F et G .*
2. *Soit $\tau \in \Sigma$ un cône de dimension d , définissant les chemins monotones γ_F, γ_G et γ_{FG} dans les polyèdres de Newton $\mathcal{N}_\rho(F), \mathcal{N}_\rho(G)$ et $\mathcal{N}_\rho(FG)$. Le sommet du ρ -polyèdre de Newton du résultant de F et G associé à τ est $\int \gamma_{FG} - \int \gamma_F - \int \gamma_G$.*

Preuve Soit $w \in \tau \in \Sigma$ un vecteur irrationnel, on montre d'abord que l'exposant le plus petit par rapport à $<_w$ qui peut apparaître dans $\text{Res}(F, G)$ est le même pour tout $w \in \tau$.

Le chemin γ_F a des arêtes $e_r = [p_{r-1}, p_r]$ de pente q_r est de longueur l_r pour $r = 1, \dots, m$. Le polynôme associé à l'arête e_r est $f_r = \alpha_{p_{r-1}} + \dots + \alpha_{p_r} t^{l_r}$. Nous notons $\{c_r^1, \dots, c_r^{l_r}\}$ ses racines comptées avec multiplicité.

Le chemin γ_G a des arêtes $e'_s = [p'_{s-1}, p'_s]$ de pente q'_s est de longueur l'_s pour $s = 1, \dots, m'$. Le polynôme associé à l'arête e'_s est $g_s = \beta_{p'_{s-1}} + \dots + \beta_{p'_s} t^{l'_s}$. Nous notons $\{d'_s, \dots, d'_{l'_s}\}$ ses racines comptées avec multiplicité.

Par le théorème 2, le terme initial par rapport à $<_w$, d'une racine ϕ_r^i de F correspondant au segment e_r est $c_r^i X^{q_r}$, et celui d'un racine ψ_s^j de G correspondant au segment e'_s est $d'_s X^{q'_s}$.

Si a_n et $b_{n'}$ sont les coefficients des termes de degré n et n' de F et G respectivement, on a $\text{Res}(F, G) = a_n^{n'} b_{n'}^n \prod (\phi_r^i - \psi_s^j)$. Le coefficient du terme d'exposant le plus petit par rapport à $<_w$ qui peut apparaître dans $\text{Res}(F, G)$ est le produit $ABCD$ où le facteur A correspond à $a_n^{n'} b_{n'}^n$:

$$A = \alpha_{p_m}^{n'} \beta_{p'_m}^n,$$

$$B = \prod_{q_r=q'_s}^{r,s} \prod_{i=1, \dots, l_r} \prod_{j=1, \dots, l'_s} (c_r^i - d'_s^j),$$

$$C = \prod_{q_r > w q'_s}^{r,s} \prod_{j=1, \dots, l'_s} \prod_{i=1, \dots, l_r} c_r^i,$$

$$D = \prod_{q_r < w q'_s}^{r,s} \prod_{j=1, \dots, l'_s} \prod_{i=1, \dots, l_r} -d'_s^j.$$

Comme F et G vérifient la condition résultante, on a $ABCD \neq 0$, et le terme obtenu ne varie pas lorsque w parcourt τ .

Nous notons $u_{\Delta(F)}$, $u_{D(G)}$ et $u_{\Delta(FG)}$ l'exposant le plus petit par rapport à $<_w$ qui peut apparaître parmi les exposants du discriminant de F , G et FG respectivement. Par le théorème 4 on a:

$$2 \int \gamma_F = \gamma_F(0) + \gamma_F(n) + u_{\Delta(F)}$$

$$2 \int \gamma_G = \gamma_G(0) + \gamma_G(n') + u_{\Delta(G)}$$

$$2 \int \gamma_{FG} = \gamma_{FG}(0) + \gamma_{FG}(n + n') + u_{\Delta(FG)}.$$

On considère l'expression $(\text{Res}(F, G))^2 \Delta_Y(F) \Delta_Y(G) = \Delta_Y(FG)$ en fonction des racines de F et de G et on déduit que si u_0 est l'exposant initial par rapport à $<_w$ de $\text{Res}(F, G)$:

$$2u_0 = u_{\Delta(FG)} - u_{\Delta(F)} - u_{\Delta(G)} = 2 \int \gamma_{FG} - 2 \int \gamma_F - 2 \int \gamma_G,$$

parce que l'on a $\gamma_{FG}(0) = \gamma_F(0) + \gamma_G(0)$ et $\gamma_{FG}(n + n') = \gamma_F(n) + \gamma_G(n')$. ■

Corollaire 5 Dans les hypothèses de la proposition 2, chaque cône $\tau \in \Sigma$ de dimension d définit un sommet du ρ -polyèdre de Newton du résultant de F et G de coefficient:

$$\alpha_{p_m}^{n'} \beta_{p'_m}^n \left(\prod_{q_r=q'_s}^{r,s} \alpha_{p_r}^{-l'_s} \beta_{p'_s}^{-l_r} \text{Res}(f_r, g_s) \right) \left(\prod_{q_r > w q'_s}^{r,s} (-1)^{l_r l'_s} \left(\frac{\alpha_{p_{r-1}}}{\alpha_{p_r}} \right)^{l'_s} \right) \left(\prod_{q_r < w q'_s}^{r,s} \left(\frac{\beta_{p'_{s-1}}}{\beta_{p'_s}} \right)^{l_r} \right).$$

Preuve Comme $\text{Res}(f_r, g_s) = \alpha_{p_r}^{l'_s} \beta_{p'_s}^{l_r} \prod_{i,j} (c_r^i - d_s^j)$ on a :

$$B = \prod_{q_r=q'_s}^{r,s} \alpha_{p_r}^{-l'_s} \beta_{p'_s}^{-l_r} \text{Res}(f_r, g_s).$$

En utilisant que $\prod_{i=1,\dots,l_r} c_r^i = (-1)^{l_r} \frac{\alpha_{p_r-1}}{\alpha_{p_r}}$, et que $\prod_{j=1,\dots,l'_s} -d_s^j = \frac{\beta_{p'_s-1}}{\beta_{p'_s}}$ on déduit :

$$C = \prod_{q_r >_w q'_s}^{r,s} (-1)^{l'_s} \left(\frac{\alpha_{p_r-1}}{\alpha_{p_r}} \right)^{l'_s}, \quad D = \prod_{q_r <_w q'_s}^{r,s} \left(\frac{\beta_{p'_s-1}}{\beta_{p'_s}} \right)^{l_r}. \quad \blacksquare$$

Exemple 1 Considérons le polynôme $F = U^4V^2Y^5 + U^3V^2Y^2 - Y + U^2V + V^2$. Le discriminant du polynôme F par rapport à Y est

$$\begin{aligned} \Delta_Y F &= 108U^{25}V^{15} + 3125U^{24}V^{12} + 108U^{23}V^{16} + 12500U^{22}V^{13} \\ &\quad - 2250U^{22}V^{12} + 18750U^{20}V^{14} - 4500U^{20}V^{13} - 27U^{20}V^{12} \\ &\quad + 12500U^{18}V^{15} - 2250U^{18}V^{14} + 1600U^{17}V^9 + 3125U^{16}V^{16} \\ &\quad + 1600U^{15}V^{10} - 256U^{12}V^6 \\ &= U^{12}V^6 \varepsilon \end{aligned}$$

où ε est une unité de l'anneau $\mathbb{C}\{S_\Delta\}$, où $\Delta = \text{pos}\{(-2, 5), (2, -1)\}$. Nous allons montrer de deux manières qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F se décompose dans l'anneau $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\Delta\}\}$.

1. D'abord, on définit $G := U^6V^8F(U^{-2}V^{-2}) = Y^5 + U^5V^6Y^2 - U^4V^6Y + U^8V^9 + U^6V^{10}$ et on vérifie que $G \in \mathbb{C}\{S_\Delta\}[Y]$ et que $G(z_\Delta, Y) = Y^5$. Comme le discriminant de F est une unité dans $\mathbb{C}\{S_\Delta\}$ par le théorème 1, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que G se décompose dans $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\Delta\}\}$ et donc F se décompose dans $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\Delta\}\}$.

2. Le polynôme F vérifie la condition discriminantale donc on a $\mathcal{N}_\Delta(U^4V^2(U^2V + V^2)\Delta_Y F) = \mathcal{Q}_\Delta(F)$. Le Δ -polyèdre-fibre $\mathcal{Q}_\Delta(F)$ a deux sommets correspondant aux chemins monotones cohérents $(\gamma_i)_{i=1,2}$. Le premier, γ_1 , correspondant aux termes $U^4V^2Y^5, Y, V^2$ et définissant le sommet $2 \int \gamma_1 = (8, 10)$ du polyèdre $\mathcal{Q}_\Delta(F)$. Le deuxième γ_2 , correspondant à $U^4V^2Y^5, Y, U^2V$ et définissant le sommet $2 \int \gamma_2 = (8, 9)$. L'éventail associé est la subdivision de Δ par les cônes $\sigma_1 = \text{pos}\{(2, -1), (1, 2)\}$, et $\sigma_2 = \text{pos}\{(-2, 5), (1, 2)\}$. Fixons un vecteur irrationnel $w \in \Delta$. Si $w \in \sigma_1$, (resp. $w \in \sigma_2$), il détermine le chemin γ_1 , (resp. γ_2).

Les 4 racines de F correspondant au segment $e = [(4, 2, 5), (0, 0, 1)]$ de γ_1 (resp. de γ_2) par le théorème 2 ont un terme d'exposant $(-1, -\frac{1}{2})$. On définit $F_2 = F(Y + \lambda U^{-1}V^{-1/2})$

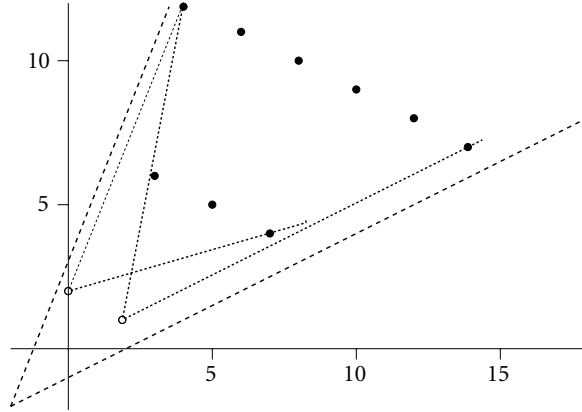


Figure 1: Les sommets noirs sont les exposants de $F_3^{(1)}(U, V, 0)$

où $\lambda^4 = 1$.

$$\begin{aligned} F_2 := & Y^5 U^4 V^2 + 5\lambda Y^4 U^3 V^{3/2} + 10\lambda^2 Y^3 U^2 V + Y^2 U^3 V^2 \\ & + 10\lambda^3 Y^2 U V^{1/2} + 2\lambda Y U^2 V^{3/2} + 5Y - Y \\ & + U^2 V + \lambda^2 U V + \lambda U^{-1} V^{-1/2} - \lambda U^{-1} V^{-1/2} + V^2. \end{aligned}$$

Par la preuve du théorème 2 les exposants des racines correspondant à e sont dans le cône affine de sommet $\pi_e(e) = (-1, \frac{-1}{2})$ qui contient les exposants de $\pi_e(\mathcal{N}_\Delta(F_2))$ c'est-à-dire le cône $(-1, \frac{-1}{2}) + \text{pos}\{(2, 3), (2, 1)\}$. Comme le cône $\text{pos}\{(2, 3), (2, 1)\}$ est contenu dans Δ^\vee , ces racines sont des éléments de $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{2}S_\Delta\}\}$.

Par ailleurs, $F(0, Y) = -Y$, et en appliquant le théorème des fonctions implicites, il existe un unique $\phi \in \mathbb{C}\{U, V\}$ tel que $F(\phi) = 0$. Clairement, ϕ doit coïncider avec la série correspondant au segment $[(0, 0, 1), (0, 2, 0)]$ déterminé par $w \in \sigma_1$ (resp. au segment $[(0, 0, 1), (0, 1, 2)]$ déterminé par $w \in \sigma_2$).

Pour $w \in \sigma_1$, on définit $F_2^{(1)} := F(Y + V^2)$ et on remarque que le terme initial par la valuation w de $F_2^{(1)}(0) = U^4 V^{12} + U^3 V^6 + U^2 V$ est $U^2 V$. On définit $F_3^{(1)} := F_2^{(1)}(Y + U^2 V) = F(Y + V^2 + U^2 V)$. On sait que les exposants de la série $\phi - V^2$ sont dans le cône affine de sommet $(2, 1)$ qui contient les exposants de

$$\begin{aligned} F_3^{(1)}(0) = & U^3 V^6 + 2U^5 V^5 + U^7 V^4 + U^4 V^{12} + 5U^6 V^{11} \\ & + 10U^8 V^{10} + 10U^{10} V^9 + 5U^{12} V^8 + U^{14} V^7. \end{aligned}$$

C'est-à-dire le cône $(2, 1) + \text{pos}\{(1, 5), (2, 1)\}$.

(Pour $w \in \sigma_2$, on définit $F_2^{(2)} = F(Y + U^2 V)$, on vérifie que $F_3^{(2)} = F_2^{(2)}(Y + V^2) = F(Y + V^2 + U^2 V) = F_3^{(1)}$, et que les exposants de la série construit $\phi - U^2 V$ sont dans le cône affine $(0, 2) + \text{pos}\{(2, 5), (7, 2)\}$.)

On obtient que les exposants de ϕ sont dans le cône affine $(-2, -2) + \text{pos}\{(2, 5), (1, 2)\}$. Comme le cône $\Delta^\vee = \text{pos}\{(2, 5), (1, 2)\}$ la série ϕ est dans l'anneau $\mathbb{C}\{\{S_\Delta\}\}$. (Voir la figure 1.)

Pendant la préparation de ce travail, l'auteur a bénéficié du soutien de la DGUI du gouvernement des Iles Canaries, et de l'hospitalité du DMI de l'ENS de Paris.

Références

- [1] S. S. Abhyankar, *On the ramification of algebraic functions*. Amer. J. Math. **77**(1955), 575–592.
- [2] M. E. Alonso, I. Luengo et M. Raimondo, *An Algorithm on Quasi-Ordinary Polynomials*. LNCS (Proc. AAECC-6) **357**, Springer-Verlag, 1989, 59–73.
- [3] L. J. Billera et B. Sturmfels, *Fiber Polytopes*. Ann. Math. **135**(1992), 527–549.
- [4] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*. Ann. of Math. Stud. **131**, Princeton University Press, 1993.
- [5] ———, *Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1995.
- [6] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov et A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multi-Dimensional Determinants*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [7] L. Kaup et B. Kaup, *Holomorphic Functions of Several Complex Variables*. de Gruyter Stud. Math. **3**, 1983.
- [8] J. Lipman, *Topological invariants of quasi-ordinary singularities*. Mem. Amer. Math. Soc. (388) **74**(1988), 1–107.
- [9] J. McDonald, *Fiber Polytopes and fractional power series*. J. Pure Appl. Algebra. **104**(1995), 213–233.
- [10] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. Ann. of Math. Stud. **131**, Springer-Verlag, 1988.
- [11] O. Zariski et P. Samuel, *Commutative Algebra, I*. Springer-Verlag, 1975.

Université de Paris VII-Denis Diderot
 Institut de Mathématiques
 2, place Jussieu
 75251 Paris cedex 05
 France
 email: gonzalez@math.jussieu.fr