



Electromagnetismo extendido en presencia de perturbaciones métricas Extended electromagnetism in the presence of metric perturbations

Mario Cañadas Martín*

Máster en Física Fundamental, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, Spain

Director de Trabajo Fin de Máster: Antonio López Maroto[†]

Departamento de Física Teórica I, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, Spain

En este trabajo consideramos una teoría extendida del electromagnetismo en la cual se permite la propagación del estado escalar que habitualmente se elimina por medio de la condición de Lorenz, preservando al mismo tiempo la dinámica de los fotones transversos usuales. Este nuevo estado no puede generarse a través de corrientes cargadas, pero sí a través de las fluctuaciones cuánticas del vacío durante la era inflacionaria y dar lugar a una constante cosmológica efectiva en escalas súper-Hubble. Por tanto, la cosmología que produce el modelo es exactamente la misma que la de los modelos Λ CDM. Exploraremos la propagación de ondas electromagnéticas en esta teoría extendida en presencia de perturbaciones métricas, que serán de tipo escalar, vectorial o tensorial, y la posibilidad de conversión de ondas temporales y longitudinales en ondas electromagnéticas transversas usuales. Estudiaremos, asimismo, la posibilidad de que los campos magnéticos con grandes longitudes de coherencia observados en objetos astrofísicos y cosmológicos y que el electromagnetismo clásico no parece ser capaz de explicar se puedan generar en el seno de esta teoría modificada.

In this work we consider an extended electromagnetic theory in which the scalar state which is usually eliminated by means of the Lorenz condition is allowed to propagate, preserving at the same time the dynamics of the usual transverse photons. This new state can not be generated by charged currents, but it can indeed be generated from quantum fluctuations during inflation, and gives rise to an effective cosmological constant in super-Hubble scales. Therefore, the cosmology produced by the model is exactly the same as that of Λ CDM. We explore the propagation of electromagnetic waves in this extended theory in the presence of metric perturbations, which will be scalar, vector and tensor, and the possibility that the magnetic fields with large coherent lengths observed in astrophysical and cosmological objects that the classic electromagnetism can not explain could be generated in this modified theory.

PACS numbers: 98.80.-k, 07.55.Db, 95.36.+x

Keywords: Cosmología (cosmology). Energía oscura (dark energy). Perturbaciones métricas (metric perturbations). Campos magnéticos cósmicos (cosmic magnetic fields).

CONTENIDOS

		V. Métrica perturbada vectorialmente	6
I. Introducción	2	VI. Métrica perturbada tensorialmente	7
II. Fundamentos del modelo	2	A. Caso diagonal	7
III. Propagación en un universo FLRW	3	B. Caso no diagonal	8
IV. Métrica perturbada escalarmente	4	VII. Rotación del campo magnético	9
		VIII. Conclusiones	9
		Referencias	10

*cm.mario@gmail.com

†maroto@fis.ucm.es

I. INTRODUCCIÓN

La fase de expansión acelerada del universo constituye uno de los problemas más fascinantes de la cosmología moderna [1–3]. Nuestra idea más arraigada acerca de la gravedad –esto es, que los objetos se atraen los unos a los otros– simplemente no se aplica en escalas de distancias cosmológicas. En vez de disminuir, como predice la gravedad newtoniana, las velocidades relativas de galaxias lejanas están aumentando. La implicación que tiene esto es que la gravedad se comporta de forma muy distinta a como habíamos pensado o que un fluido misterioso –la energía oscura– con propiedades gravitacionales exóticas llena todo el Universo. De cualquier forma, esto implica que hay nueva física más allá de las cuatro fuerzas fundamentales descritas por el Modelo Estándar (ME) y la Relatividad General (RG), lo cual ha suscitado gran parte de la investigación actual en cosmología.

La solución más sencilla pasa simplemente por la adición de una constante cosmológica, Λ , a las ecuaciones de Einstein. El valor necesario para explicar la aceleración cósmica, en unidades donde $G = c = \hbar = 1$, es del orden de 10^{-120} , o $(10^{-3}\text{eV})^4$. Esto supone un problema de naturalidad, puesto que desde el punto de vista cuántico uno esperaría que la energía de vacío fuera o bien del orden de la unidad, o cero si existe alguna simetría que la proteja.

Las teorías de energía oscura [4] indagan en esta cuestión. Así por ejemplo, los efectos de una constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein pueden describirse de forma precisa por un fluido homogéneo de densidad $\rho_\Lambda = \Lambda c^4/8\pi G$ y presión $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. En general, estas teorías postulan que el Universo está lleno de energía oscura, un fluido exótico de presión negativa que proporciona los ingredientes necesarios para una expansión acelerada. Las teorías de gravedad modificada, por otro lado, proponen una modificación de la RG de Einstein y dan cuenta de la expansión acelerada sin la necesidad de introducir componentes exóticos.

Algo similar sucede con el electromagnetismo, la otra interacción de largo alcance que existe en la naturaleza. El electromagnetismo clásico proporciona una descripción adecuada de la propagación electromagnética y de las interacciones en un rango muy amplio de escalas, desde distancias muy pequeñas hasta las longitudes de coherencia de 1.3 A.U. de los campos electromagnéticos producidos por el viento solar. Sin embargo, el comportamiento de los campos electromagnéticos con longitudes de onda mayores que el radio del sistema solar es desconocido y, de hecho, la teoría clásica no parece ser capaz de explicar el origen de los campos magnéticos cósmicos encontrados en galaxias y clusters. Se han considerado dos posibles escenarios para la generación de estos campos: Por un lado está la hipótesis de los campos primordiales, esto es, la existencia de campos magnéticos residuales provenientes del Universo Primitivo que fueron amplificados a sus valores actuales por colapso y rotación diferencial; por otro lado, se encuentra el mecanismo dinamo,

en el cual campos mucho más débiles podrían haber sido amplificados por la rotación galáctica. Ambos mecanismos, por tanto, requieren la presencia de campos magnéticos preexistentes, y algunas de las propuestas para su generación incluyen mecanismos astrofísicos, producción durante inflación, en transiciones de fase y otros, aunque hasta la fecha ninguno de ellos proporciona una solución satisfactoria [5].

Las teorías de energía oscura y de gravedad modificada han conseguido suprimir la necesidad de una constante cosmológica [6], pero por lo general están plagadas de inestabilidades, tanto clásicas como cuánticas, así como por problemas de ajuste fino, esto es, la necesidad de ajustar muy precisamente los parámetros del modelo para estar de acuerdo con las observaciones.

Recientemente se ha propuesto un modelo [7] que explora la posibilidad de entender la energía oscura desde el punto de vista del campo electromagnético, sin la necesidad de introducir nueva física. En dicho modelo, el papel de la constante cosmológica lo juega la componente temporal del campo electromagnético, dentro de una teoría modificada de la interacción electromagnética; se introduce un término de fijación de gauge en la acción original en vez de imponer la condición de Lorenz, $\partial_\nu A^\nu = 0$, y es por esto que es necesario introducir también un nuevo modo escalar electromagnético en la teoría de forma que la interacción electromagnética contenga realmente tres grados de libertad físicos, que son los dos correspondientes a las polarizaciones transversas del fotón sin masa y un nuevo modo escalar sin masa que proviene de las componentes temporal y longitudinal del campo electromagnético. Este nuevo modo escalar se desacopla de las corrientes conservadas y solo puede excitarse por medio de campos gravitacionales. Por tanto, podría generarse durante una fase inflacionaria en el Universo Primitivo, y una vez que los modos se hacen súper-Hubble, dar lugar a una contribución a la acción que es análoga a la de una constante cosmológica.

El objetivo de este trabajo es estudiar los modos electromagnéticos en el marco de esta teoría extendida en presencia de perturbaciones métricas escalares, vectoriales y tensoriales, y explorar la posibilidad de la conversión de fotones escalares en fotones transversos ordinarios.

II. FUNDAMENTOS DEL MODELO

La acción de la que se parte para la interacción electromagnética en presencia de gravedad, incluyendo el término de fijación de gauge y el acoplo de corrientes, viene dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2} (\nabla_\mu A^\mu)^2 + A_\mu J^\mu \right], \quad (1)$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. El término de fijación de gauge es necesario para definir una teoría cuántica consistente

para el campo electromagnético, y juega un papel fundamental a grandes escalas [7]. Debido a la presencia de dicho término, esta acción no respeta la invariancia bajo transformaciones gauge arbitrarias, pero sí preserva una simetría gauge residual [7, 8] dada por $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta$, con $\square \theta = 0$.

Las ecuaciones de Maxwell que se derivan de esta acción pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} + \lambda \nabla^\mu (\nabla_\nu A^\nu) = J^\mu. \quad (2)$$

Para recuperar las ecuaciones de Maxwell habituales ha de imponerse la condición de Lorenz, $\nabla_\mu A^\mu = 0$. Si tomamos la cuatridivergencia de la ecuación anterior obtenemos:

$$\square (\nabla_\nu A^\nu) = 0, \quad (3)$$

para lo cual se ha usado la conservación de las corrientes, $\nabla_\mu J^\mu = 0$. La expresión anterior muestra que $\nabla_\nu A^\nu$ se comporta como un campo escalar sin masa que está desacoplado de las corrientes electromagnéticas conservadas, pero que está acoplado de forma no conforme a la gravedad de forma que puede ser excitado por campos gravitacionales. Además, debido al hecho de que un campo escalar sin masa se congela en escalas súper-Hubble en un universo FLRW, la cuatridivergencia del campo electromagnético será constante en escalas mayores que el radio de Hubble, dando lugar a un término de tipo constante cosmológica en la acción. Por otro lado, para escalas pequeñas se tiene que $\nabla_\nu A^\nu \sim a^{-1}$ [8], donde a es el factor de escala. Por tanto, mientras la cuatridivergencia del campo electromagnético sea súper-Hubble,

puede jugar el papel de la constante cosmológica y, una vez que entra en el horizonte, las ecuaciones de Maxwell usuales se modifican con una fuente externa adicional. Este nuevo modo escalar puede ser generado durante inflación a partir de fluctuaciones cuánticas del vacío [7], y el término λ puede verse como una corriente conservada actuando como una fuente del campo de Maxwell habitual [9–11] que produciría un fondo de ondas eléctricas longitudinales además de los fotones transversos usuales.

III. PROPAGACIÓN EN UN UNIVERSO FLRW

Presentemos en primer lugar un ejemplo sencillo [8] que nos permita ver cómo $\nabla_\mu A^\mu$ se comporta como un campo escalar que está desacoplado de las corrientes, pero acoplado de manera no conforme a la gravedad. Nos centramos en el caso de un campo electromagnético homogéneo en un universo de Robertson-Walker plano, cuya métrica en tiempo conforme, η , viene dada por:

$$ds^2 = a(\eta)^2 (d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j), \quad (4)$$

donde $a(\eta)$ es el ya mencionado factor de escala que representa la expansión del universo. Resolvemos el sistema de ecuaciones acopladas (2) en ausencia de corrientes para los correspondientes modos de Fourier del campo conforme $\mathcal{A} = (aA_0, \mathbf{A})$, que se definen como $\mathcal{A}_\mu(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3k \mathcal{A}_{\mu\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$. De esta forma, para un modo \mathbf{k} dado, el campo \mathcal{A}_μ se descompone en componentes temporal, longitudinal y transversa. Las ecuaciones que se obtienen son:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0\mathbf{k}}'' - \left(\frac{k^2}{\lambda} - 2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2 \right) \mathcal{A}_{0\mathbf{k}} - 2ik \left(\frac{1+\lambda}{2\lambda} \mathcal{A}'_{\parallel\mathbf{k}} - \mathcal{H} \mathcal{A}_{\parallel\mathbf{k}} \right) &= 0 \\ \mathcal{A}_{\parallel\mathbf{k}}'' - k^2 \lambda \mathcal{A}_{\parallel\mathbf{k}} - 2ik\lambda \left(\frac{1+\lambda}{2\lambda} \mathcal{A}'_{0\mathbf{k}} + \mathcal{H} \mathcal{A}_{0\mathbf{k}} \right) &= 0 \\ \mathcal{A}_{\perp\mathbf{k}}'' + k^2 \mathcal{A}_{\perp\mathbf{k}} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

siendo $' \equiv d/d\eta$, $\mathcal{H} = a'/a$ y $k = |\mathbf{k}|$. Se observa que los modos transversos se desacoplan del fondo, mientras que el temporal y el longitudinal están acoplados de forma no trivial entre sí y a la gravedad. Dado que el Universo es electromagnéticamente neutro a gran escala, ignoraremos los términos de corrientes.

A partir de ahora el objetivo va a ser comprobar si es posible generar campos magnéticos cósmicos en el marco de esta teoría modificada del electromagnetismo siguiendo una aproximación puramente astrofísica; para ello vamos a considerar los efectos que va a conllevar una per-

turbación en la métrica, escalar, vectorial o tensorial, que puede ser producida por estructuras a gran escala. Vamos a ignorar la expansión del universo, esto es, a hacer $a(\eta) = 1$, ya que en la escala de distancias y de tiempos considerada no se producirá una expansión apreciable. También vamos a trabajar con $\lambda = -1$, sin imponer la condición de Lorenz, de forma que podamos trabajar con ondas planas sencillas, ya que de lo contrario tendríamos que considerar formas muy complicadas para las mismas.

IV. MÉTRICA PERTURBADA ESCALARMENTE

En esta sección vamos a considerar una métrica tipo Robertson-Walker perturbada escalarmente [12, 13], cuya forma más general viene dada por:

$$ds^2 = (1 + 2\phi) d\eta^2 + 2B_{,i} d\eta dx^i - (1 - 2\psi - 2E_{,ij}) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (6)$$

donde ϕ , ψ , E y B son funciones arbitrarias de η y \mathbf{x} . Sin embargo, vamos a trabajar en el gauge longitudinal (o newtoniano), el cual viene fijado por las condiciones

$$B = 0, \quad E = 0, \quad (7)$$

de forma que la métrica tiene el siguiente aspecto:

$$ds^2 = (1 + 2\phi) d\eta^2 - (1 - 2\psi) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (8)$$

En ausencia de fuentes de anisotropía, tenemos $\phi = \psi$. La variable ϕ en este gauge se reduce al potencial newtoniano en el límite no-relativista. Debe recalarse que el gauge newtoniano es un gauge restrictivo ya que solo puede utilizarse para el modo escalar de las perturbaciones métricas. Sin embargo, puede generalizarse fácilmente para incluir los modos vectoriales y tensoriales, como veremos más adelante.

Consideraremos ϕ de tal forma que tienda a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$. De esta manera, vamos a analizar qué sucede cuando un fotón, que inicialmente será temporal, longitudinal o transversal, atraviesa la perturbación, que supondremos centrada en $x = 0$ y de tipo gaussiano. Por simplicidad, además, las perturbaciones que consideremos dependerán únicamente de la coordenada x . La forma que hemos supuesto para la perturbación es la siguiente:

$$\phi(x) = \epsilon e^{-x^2/c^2}. \quad (9)$$

Es decir, como ya hemos dicho, tiene la forma de una gaussiana, siendo c la anchura de la misma con un valor arbitrario que fijaremos a la hora de realizar los cálculos posteriores. ϵ es un parámetro de expansión en torno al cual vamos a desarrollar en serie de Taylor las ecuaciones (2) en ausencia de corrientes, es decir, con $J_\mu = 0$. Las ecuaciones resultantes a primer orden son las siguientes:

$$\begin{aligned} \square_0 \mathcal{A}_0 + 2 \left[F_{i0} \partial_i \phi - 2 \mathcal{A}_0'' \phi \right] &= 0 \\ \square_0 \mathcal{A}_j + 2 \left[2 (\nabla^2 \mathcal{A}_j) \phi + F_{ji} \partial_i \phi - (\mathcal{A}'_0 + \nabla \mathbf{A}) \cdot \partial_j \phi \right] &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

siendo $\square_0 \equiv \partial^2/\partial\eta^2 - \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2 - \partial^2/\partial z^2$. Definimos el potencial vector de la siguiente forma:

$$\mathcal{A}_\mu = \varepsilon_\mu(x) e^{i(k_y y + k_z z - k\eta)}, \quad (11)$$

siendo ε_μ un vector de polarización sobre el cual daremos las condiciones iniciales oportunas para analizar cada caso. Teniendo en cuenta esto, las ecuaciones que se obtienen son:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varepsilon_0(x)}{dx^2} &= -A(x) \frac{d\varepsilon_0(x)}{dx} + B(x) \varepsilon_0(x) - C(x) \varepsilon_x(x) \\ \frac{d^2 \varepsilon_x(x)}{dx^2} &= D(x) \frac{d\varepsilon_x(x)}{dx} + E(x) \varepsilon_x(x) + F(x) \varepsilon_y(x) \\ &\quad + G(x) \varepsilon_z(x) - H(x) \varepsilon_0(x) \\ \frac{d^2 \varepsilon_y(x)}{dx^2} &= D(x) \frac{d\varepsilon_y(x)}{dx} + E(x) \varepsilon_y(x) - F(x) \varepsilon_x(x) \\ \frac{d^2 \varepsilon_z(x)}{dx^2} &= D(x) \frac{d\varepsilon_z(x)}{dx} + E(x) \varepsilon_z(x) - G(x) \varepsilon_x(x) \end{aligned} \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{4x\phi(x)}{c^2}, \quad B(x) = k_z^2 + k_y^2 - k^2 + 4k^2\phi(x), \\ C(x) &= \frac{4ik_x\phi(x)}{c^2}, \quad D(x) = \frac{4x\phi(x)}{c^2 + 4c^2\phi(x)}, \\ E(x) &= \frac{-k^2 + (1 + 4\phi(x))(k_y^2 + k_z^2)}{1 + 4\phi(x)}, \\ F(x) &= \frac{4ik_y x\phi(x)}{c^2 + 4c^2\phi(x)}, \quad G(x) = \frac{4ik_z x\phi(x)}{c^2 + 4c^2\phi(x)}, \\ H(x) &= \frac{4ik_x\phi(x)}{c^2 + 4c^2\phi(x)}. \end{aligned}$$

Como puede apreciarse, (12) forma un sistema de ecuaciones acopladas que se ha tratado de resolver de forma analítica, sin éxito. Por ello se ha recurrido al cálculo de una solución numérica por medio de Mathematica. Consideramos tres casos distintos, esto es, que el modo incidente, antes de atravesar la perturbación, sea puramente temporal, longitudinal o transversal (este caso es doble, ya que corresponde a las componentes y y z del vector de polarización), y para cada uno de ellos las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu(x \rightarrow -\infty) &= C_\mu e^{ik_x x} \\ \frac{d\varepsilon_\mu}{dx}(x \rightarrow -\infty) &= ik_x C_\mu e^{ik_x x}, \end{aligned} \quad (13)$$

con C_μ un vector constante. En la Fig. (1) se presentan los resultados obtenidos una vez fijados los valores de todas las constantes, es decir, haciendo $\epsilon = 0,1$ y $c = 1$ (se ha comprobado que dando otros valores a estas constantes se obtiene un resultado cualitativo análogo al que a continuación va a presentarse; prueba de ello vendrá dada en figuras posteriores), y en unidades arbitrarias. En

lo que sigue prescindiremos de las unidades, ya que con un simple reescalamiento podríamos pasar fácilmente de unas a otras.

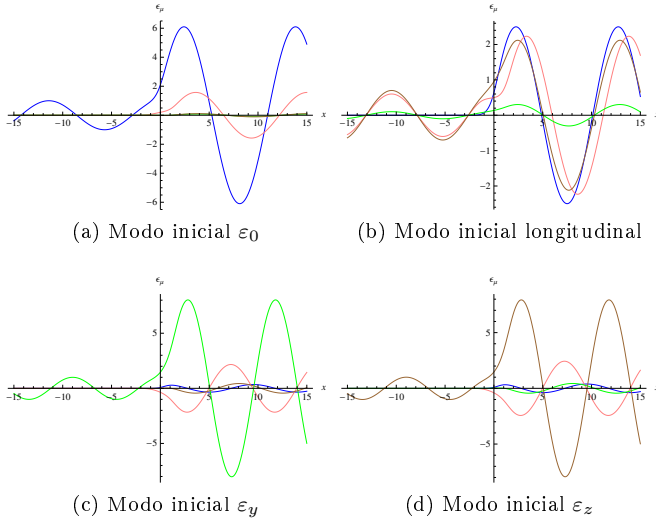


Figura 1: Evolución de los distintos modos (para un \mathbf{k} dado) en el caso de una métrica perturbada escalarmente partiendo de (a) un modo ε_0 puramente temporal (b) un modo longitudinal (c) y (d) los modos transversos. El código de colores es el siguiente: en azul, el modo temporal; en rosa, el longitudinal; en verde y en marrón, los correspondientes a los modos transversos y y z , respectivamente.

Algo que puede apreciarse inmediatamente es que, al contrario de lo que sucedía en el caso de la métrica sin perturbar, y tal y como cabía esperar viendo el sistema de ecuaciones acopladas (12), ningún modo está desacoplado de los demás, y van generándose progresivamente conforme el modo que hemos utilizado como condición inicial avanza en el espacio. Se observa también que, al atravesar la perturbación, cambia la forma de los modos, correspondiendo por tanto a dos ondas diferentes según nos encontremos antes o después de la perturbación. El problema que hemos tratado aquí es, de hecho, análogo al de la barrera de potencial de Mecánica Cuántica; vamos a considerar que cada onda incidente lleva asociada, asimismo, una parte reflejada, y que al atravesar la perturbación lo hará por medio de un coeficiente de transmisión.

De forma general se tiene que cada modo incidente se comportará de la siguiente manera al atravesar la perturbación:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(x) &= C_0 e^{ik_x x} + R_0 e^{-ik_x x} \longrightarrow T_0 e^{ik_x x} \\ \varepsilon_x(x) &= C_x e^{ik_x x} + R_x e^{-ik_x x} \longrightarrow T_x e^{ik_x x} \\ \varepsilon_y(x) &= C_y e^{ik_x x} + R_y e^{-ik_x x} \longrightarrow T_y e^{ik_x x} \\ \varepsilon_z(x) &= C_z e^{ik_x x} + R_z e^{-ik_x x} \longrightarrow T_z e^{ik_x x}\end{aligned}\quad (14)$$

Podemos ilustrar esta analogía para los cuatro casos distintos considerados:

■ Modo incidente puramente temporal

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(x) &= C_0 e^{ik_x x} + R_0 e^{-ik_x x} \longrightarrow T_0 e^{ik_x x} \\ \varepsilon_x(x) &= R_x e^{-ik_x x} \longrightarrow T_x e^{ik_x x} \\ \varepsilon_y(x) &= R_y e^{-ik_x x} \longrightarrow T_y e^{ik_x x} \\ \varepsilon_z(x) &= R_z e^{-ik_x x} \longrightarrow T_z e^{ik_x x}\end{aligned}\quad (15)$$

■ Modo incidente longitudinal ($\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z) \propto \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$)

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(x) &= R_0 e^{-ik_x x} \longrightarrow T_0 e^{ik_x x} \\ \varepsilon_x(x) &= C_x e^{ik_x x} + R_x e^{-ik_x x} \longrightarrow T_x e^{ik_x x} \\ \varepsilon_y(x) &= C_y e^{ik_x x} + R_y e^{-ik_x x} \longrightarrow T_y e^{ik_x x} \\ \varepsilon_z(x) &= C_z e^{ik_x x} + R_z e^{-ik_x x} \longrightarrow T_z e^{ik_x x}\end{aligned}\quad (16)$$

■ Modo incidente transversos (y)

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(x) &= R_0 e^{-ik_x x} \longrightarrow T_0 e^{ik_x x} \\ \varepsilon_x(x) &= R_x e^{-ik_x x} \longrightarrow T_x e^{ik_x x} \\ \varepsilon_y(x) &= C_y e^{ik_x x} + R_y e^{-ik_x x} \longrightarrow T_y e^{ik_x x} \\ \varepsilon_z(x) &= R_z e^{-ik_x x} \longrightarrow T_z e^{ik_x x}\end{aligned}\quad (17)$$

■ Modo incidente transversos (z)

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(x) &= R_0 e^{-ik_x x} \longrightarrow T_0 e^{ik_x x} \\ \varepsilon_x(x) &= R_x e^{-ik_x x} \longrightarrow T_x e^{ik_x x} \\ \varepsilon_y(x) &= R_y e^{-ik_x x} \longrightarrow T_y e^{ik_x x} \\ \varepsilon_z(x) &= C_z e^{ik_x x} + R_z e^{-ik_x x} \longrightarrow T_z e^{ik_x x}\end{aligned}\quad (18)$$

Continuando con la analogía de Mecánica Cuántica, R_μ son los coeficientes de reflexión, mientras que T_μ son los coeficientes de transmisión. Tanto R_μ como T_μ son funciones de las componentes del vector de onda, es decir, $R_\mu = R_\mu(k_x, k_y, k_z)$ y $T_\mu = T_\mu(k_x, k_y, k_z)$. Una vez obtenidos estos coeficientes el potencial vector puede definirse de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}_\mu = T_\mu(k_x, k_y, k_z) e^{i(\mathbf{k}x - k\eta)}. \quad (19)$$

A partir de aquí la idea es ver si, en ausencia de campo magnético inicial, al atravesar la perturbación, puede generarse uno, y cuál es la forma del mismo. Para ello se ha calculado el campo magnético a través de la conocida expresión:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (20)$$

De esta forma, se ha obtenido que para condiciones iniciales temporales o longitudinales, el campo magnético en la región final tiene el siguiente aspecto,

$$\mathbf{B} \propto \mathbf{k} \times \nabla \phi, \quad (21)$$

mientras que para los modos transversos -que sí tienen \mathbf{B} inicial- se tiene:

$$\mathbf{B} \propto \mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp. \quad (22)$$

En la Fig. (2), además, aparece representado el efecto que tendría sobre el campo magnético la elección de uno u otro valor para c y ϵ y que, como ya hemos dicho, afectaría de forma cuantitativa, pero no cualitativa, al resultado obtenido.

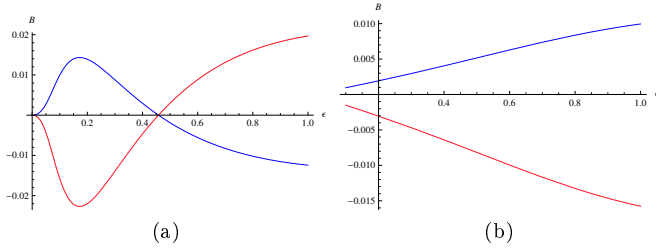


Figura 2: Variación de las componentes de \mathbf{B} para un modo inicial temporal en presencia de una perturbación escalar en función de (a) ϵ y (b) c . En azul se representa B_y y, en rojo, B_z .

V. MÉTRICA PERTURBADA VECTORIALMENTE

Vamos a repetir el mismo procedimiento que en el caso anterior para una métrica perturbada vectorialmente, cuya forma más general es la siguiente:

$$ds^2 = d\eta^2 + 2S_i d\eta dx^i - \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (23)$$

siendo S_i un vector transverso con divergencia nula. De nuevo vamos a ignorar la expansión del universo por las razones ya expuestas, y vamos a dotar a S_i de la siguiente estructura:

$$S_i(x) = (0, S(x), 0), \quad (24)$$

donde $S(x) = \epsilon e^{-x^2/c^2}$. Se aprecia que la perturbación tiene la misma forma que en el caso escalar, si bien actúa de distinta manera: antes, la métrica era diagonal, pero ahora tenemos términos no diagonales que harán que cambie el acoplo entre los modos.

Como se observa, hemos vuelto a introducir un parámetro ϵ de expansión, de forma que desarrollamos las ecuaciones (2) a primer orden, obteniéndose el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varepsilon_0(x)}{dx^2} &= -A(x) \frac{d^2 \varepsilon_y(x)}{dx^2} + B(x) \frac{d\varepsilon_y(x)}{dx} - C(x) \varepsilon_0(x) \\ &\quad - D(x) \varepsilon_x(x) - E(x) \varepsilon_y \\ \frac{d^2 \varepsilon_x(x)}{dx^2} &= -D(x) \varepsilon_0(x) - C(x) \varepsilon_x(x) + F(x) \varepsilon_y \\ \frac{d^2 \varepsilon_y(x)}{dx^2} &= A(x) \frac{d^2 \varepsilon_0(x)}{dx^2} - B(x) \frac{d\varepsilon_0(x)}{dx} + E(x) \varepsilon_0(x) \\ &\quad - F(x) \varepsilon_x(x) - C(x) \varepsilon_y \\ \frac{d^2 \varepsilon_z(x)}{dx^2} &= -C(x) \varepsilon_z \end{aligned} \quad (25)$$

donde

$$\begin{aligned} A(x) &= S(x), \quad B(x) = \frac{2xS(x)}{c^2}, \\ C(x) &= k^2 - k_y^2 - k_z^2 - 2kk_y S(x), \quad D(x) = \frac{2ik_y x S(x)}{c^2}, \\ E(x) &= S(x) (k^2 - k_y^2 - k_z^2), \quad F(x) = \frac{2ik_x S(x)}{c^2}. \end{aligned}$$

De nuevo tenemos un sistema de ecuaciones acopladas, más complicado si cabe que el del caso anterior. Consideramos las mismas condiciones iniciales (13) que en el caso escalar para cada uno de los vectores de polarización ε_μ , y fijamos de nuevo los valores de todas las constantes, haciendo $\epsilon = 0,1$ y $c = 1$, en unidades arbitrarias, para proceder a realizar el cálculo numérico. Los resultados obtenidos se presentan en la Fig. (3).

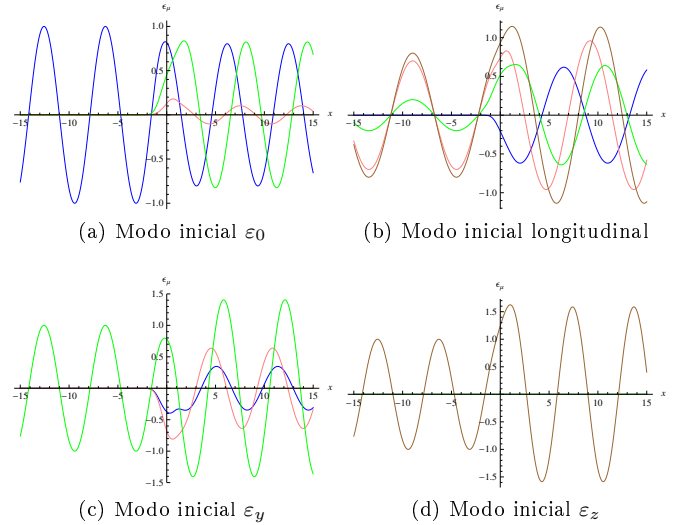


Figura 3: Evolución de los diferentes modos (para un \mathbf{k} dado) en el caso de una métrica perturbada vectorialmente partiendo de (a) un modo ε_0 puramente temporal (b) un modo longitudinal (c) y (d) los modos transversos. El código de colores es el mismo que el de la Fig. (1).

Lo primero que llama la atención es que ε_z aparece desacoplado del resto de modos, es decir, solo se genera

si imponemos sobre él una condición inicial no nula; en cualquier otro caso, solo tenemos modos ε_0 , ε_x y ε_y . Esto, que en principio podría parecer extraño, se comprende fácilmente si se observa con detenimiento la forma de la métrica perturbada y del vector S_i : este último es un vector que únicamente tiene componente y y que solo depende de x , interactuando con la parte temporal de la métrica; parece plausible, por tanto, que la parte z no se vea afectada y se desacople de las demás. Una comprobación que se ha realizado ha sido cambiar la estructura de S_i por la siguiente:

$$S_i(x) = (0, 0, S(x)). \quad (26)$$

En este caso, como vemos, el vector únicamente tiene componente z dependiente de x , y lo que se obtiene tras realizar los cálculos es que ε_y se desacopla del resto de modos, corroborando lo que uno esperaría que sucediese.

Nuevamente hemos procedido a calcular los coeficientes de reflexión y de transmisión como en el caso escalar para definir el potencial vector como en (19) y, posteriormente, hemos calculado su rotacional. El resultado es que para los modos que están acoplados se obtiene un campo magnético que tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{B} \propto \mathbf{k} \times (\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) + (\mathbf{k} \cdot \nabla)\mathbf{S}), \quad (27)$$

mientras que para el modo z que está desacoplado:

$$\mathbf{B} \propto \mathbf{k} \times \mathbf{A}_z. \quad (28)$$

En la Fig. (4) se representa el efecto que tendría sobre el campo la elección de uno u otro valor para c y ε .

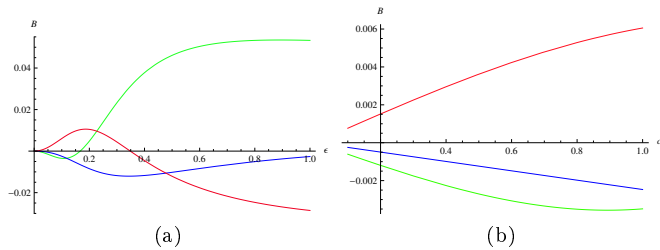


Figura 4: Variación de las componentes de \mathbf{B} para un modo inicial temporal en presencia de una perturbación vectorial en función de (a) ε y (b) c . En verde se representa B_x , en azul B_y y, en rojo, B_z .

VI. MÉTRICA PERTURBADA TENSORIALMENTE

Analicemos en último lugar qué sucede si tenemos una métrica perturbada tensorialmente, cuya forma viene dada por la siguiente expresión:

$$ds^2 = d\eta^2 - (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j. \quad (29)$$

h_{ij} es un tensor de rango 2 simétrico, sin traza y transverso, es decir:

$$h^i_i = 0, \quad h_{ij,j} = 0. \quad (30)$$

Tenemos dos posibles matrices, una de ellas diagonal, que satisfacen estas condiciones, y que pasamos a estudiar a continuación.

A. Caso diagonal

En este caso consideramos la siguiente forma para la perturbación:

$$h_{ij}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(x) & 0 \\ 0 & 0 & -h(x) \end{bmatrix}, \quad (31)$$

donde $h(x) = \epsilon e^{-x^2/c^2}$. De nuevo volvemos a tener una métrica diagonal, pero solo los elementos y y z se ven afectados. Además, dado que la perturbación solo tiene componente x , parece razonable pensar que el modo temporal pueda estar desacoplado del resto.

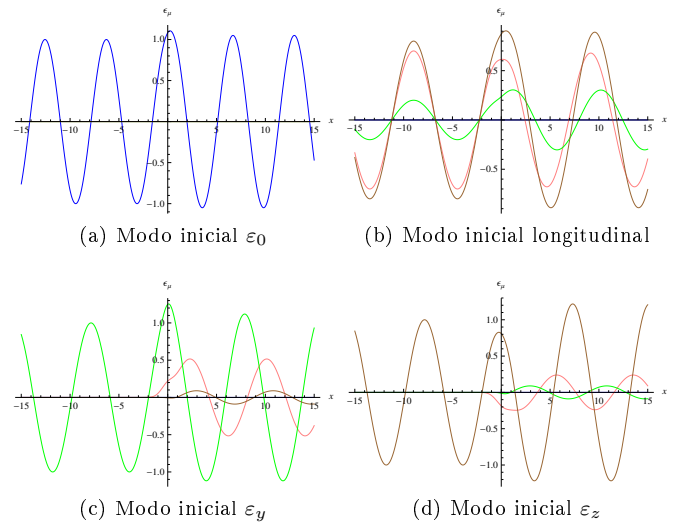


Figura 5: Evolución de los diferentes modos (para un \mathbf{k} dado) en el caso de una métrica perturbada tensorialmente (diagonal) partiendo de (a) un modo ε_0 puramente temporal (b) un modo longitudinal (c) y (d) los modos transversos. El código de colores es el mismo que el de la Fig. (1).

Introducimos, como hicimos anteriormente, un parámetro ϵ de expansión en torno a la perturbación y desarrollamos las ecuaciones (2) a primer orden, teniendo en

cuenta la forma de la perturbación y del potencial vector ya mencionados anteriormente, obteniéndose el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\varepsilon_0(x)}{dx^2} &= A(x)\varepsilon_0(x) \\
\frac{d^2\varepsilon_x(x)}{dx^2} &= A(x)\varepsilon_x(x) - B(x)\varepsilon_y(x) + C(x)\varepsilon_z \\
\frac{d^2\varepsilon_y(x)}{dx^2} &= -D(x)\frac{d\varepsilon_y(x)}{dx} + E(x)\varepsilon_y(x) + F(x)\varepsilon_x(x) \\
\frac{d^2\varepsilon_z(x)}{dx^2} &= G(x)\frac{d\varepsilon_z(x)}{dx} + H(x)\varepsilon_z(x) - I(x)\varepsilon_x(x) \quad (32)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
A(x) &= k_y^2 + k_z^2 - k^2 + h(x)(k_z^2 - k_y^2), \\
B(x) &= \frac{2ik_y h(x)}{c^2}, \quad C(x) = \frac{2ik_z h(x)}{c^2}, \\
D(x) &= \frac{2xh(x)}{c^2(1-h(x))}, \\
E(x) &= \frac{k_y^2 + k_z^2 - k^2 + h(x)(k^2 - 2k_y^2)}{1-h(x)}, \\
F(x) &= \frac{2ik_y x h(x)}{c^2 - c^2 h(x)}, \quad G(x) = \frac{2xh(x)}{c^2 + c^2 h(x)}, \\
H(x) &= \frac{k_y^2 + k_z^2 - k^2 + h(x)(2k_z^2 - k^2)}{1+h(x)}, \\
I(x) &= \frac{2ik_z x h(x)}{c^2(1+h(x))}.
\end{aligned}$$

Consideramos las condiciones iniciales (13) al igual que en los casos anteriores y fijamos de nuevo los valores de todas las constantes, haciendo $\epsilon = 0,1$ y $c = 1$ en unidades arbitrarias, para proceder a realizar el cálculo numérico. En este caso no se podría tomar $\epsilon = 1$ porque, como puede apreciarse en las expresiones anteriores, crearía una divergencia infinita en $x = 0$. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. (5). En este caso es el modo temporal el que se encuentra desacoplado de los demás, tal y como habíamos previsto; esto no es de extrañar, pues como vemos la perturbación va dirigida según el plano YZ y solo depende de x , y este hecho hace que un modo incidente puramente temporal no genere campo magnético.

Así pues, se ha obtenido que para condiciones iniciales longitudinales, el campo magnético tiene el siguiente aspecto,

$$\mathbf{B} \propto \mathbf{k} \times \nabla h(x), \quad (33)$$

mientras que para los modos transversos se tiene:

$$\mathbf{B} \propto \mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp. \quad (34)$$

B. Caso no diagonal

Por último, veamos qué sucede si la perturbación tiene la siguiente forma:

$$\tilde{h} \equiv h_{ij}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(x) \\ 0 & h(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

donde, de nuevo, $h(x) = \epsilon e^{-x^2/c^2}$. También, al igual que en el caso anterior, parece intuitivo pensar que el modo temporal va a estar desacoplado de los demás.

Introducimos, como hicimos anteriormente, un parámetro ϵ de expansión en torno a la perturbación y desarrollamos las ecuaciones (2) a primer orden, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\varepsilon_0(x)}{dx^2} &= A(x)\varepsilon_0(x) \\
\frac{d^2\varepsilon_x(x)}{dx^2} &= A(x)\varepsilon_x(x) - B(x)\varepsilon_y(x) + C(x)\varepsilon_z \\
\frac{d^2\varepsilon_y(x)}{dx^2} &= D(x)\frac{d\varepsilon_z(x)}{dx} - E(x)\frac{d\varepsilon_z(x)}{dx} + B(x)\varepsilon_x(x) \\
&\quad + A(x)\varepsilon_y(x) + F(x)\varepsilon_z(x) \\
\frac{d^2\varepsilon_z(x)}{dx^2} &= D(x)\frac{d\varepsilon_y(x)}{dx} - E(x)\frac{d\varepsilon_y(x)}{dx} + C(x)\varepsilon_x(x) \\
&\quad + F(x)\varepsilon_y(x) + A(x)\varepsilon_z(x) \quad (36)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
A(x) &= k_y^2 + k_z^2 - k^2 - 2k_y k_z h(x), \\
B(x) &= \frac{2ik_z h(x)}{c^2}, \quad C(x) = \frac{2ik_y h(x)}{c^2}, \\
D(x) &= h(x), \quad E(x) = \frac{2xh(x)}{c^2}, \\
F(x) &= (k^2 - k_y^2 - k_z^2) h(x).
\end{aligned}$$

Si procedemos de forma análoga a como hemos trabajado hasta ahora, haciendo $\epsilon = 0,1$ y $c = 1$ ($\epsilon = 1$ volvería a generar una divergencia infinita en $x = 0$), podemos ver los resultados en la Fig. (6).

Se confirma que el modo temporal se encuentra desacoplado de los demás, y no se genera campo magnético; por otro lado, para los modos transversos se tiene que el campo va dirigido de la siguiente forma:

$$\mathbf{B} \propto \mathbf{k} \times \left[\left(\mathbb{I}_{3 \times 3} + \tilde{h} \right) \mathbf{A}_\perp \right], \quad (37)$$

donde $\mathbb{I}_{3 \times 3}$ es la matriz identidad de orden 3.

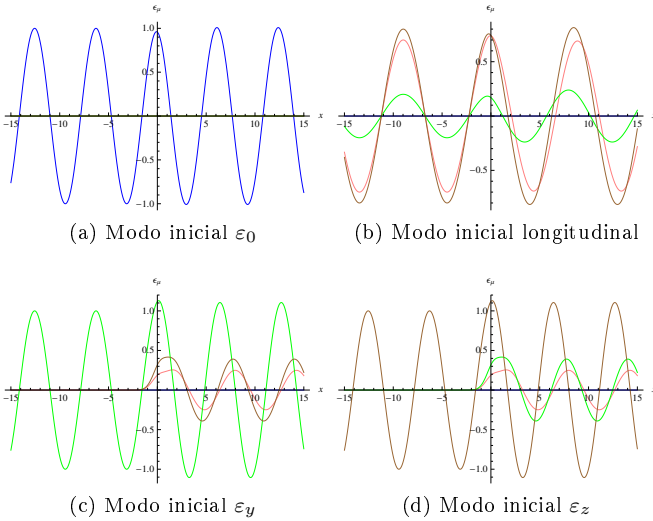


Figura 6: Evolución de los diferentes modos (para un \mathbf{k} dado) en el caso de una métrica perturbada tensorialmente (no diagonal) partiendo de (a) un modo ε_0 puramente temporal (b) un modo longitudinal (c) y (d) los modos transversos. El código de colores es el mismo que el de la Fig. (1).

VII. ROTACIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO

En esta sección, por último, vamos a analizar la posible rotación del campo magnético generado con respecto al campo magnético inicial; este último solo aparece cuando tenemos un modo inicial ε_y o ε_z , por lo que analizaremos dos casos dentro de cada tipo de perturbación y, asimismo, cada caso lo estudiaremos fijando c (valor 1) o ϵ (valor 0,1) y representando en función del otro parámetro. El procedimiento seguido para calcular el ángulo de rotación ha consistido en calcular el producto escalar entre el campo magnético inicial y el campo magnético final; dichos campos llevan asociadas una parte real y otra imaginaria, por lo que se ha procedido a representar el ángulo, θ_B (en radianes), realizando el producto escalar entre las partes imaginarias, aunque el resultado habría sido análogo de haber utilizado las partes reales.

En el caso de la perturbación escalar, la variación de ϵ no rota el campo magnético, si bien a partir de un cierto valor introduce un desfase de π en el mismo; por otro lado, la variación de c tampoco rota el campo, ya que los valores de θ_B son muy pequeños, del orden de 10^{-8} , y pueden considerarse despreciables.

En cuanto a la perturbación vectorial (Fig. (7)), vemos que, para un modo incidente ε_y , la variación de ϵ produce una pequeña variación del ángulo de rotación que crece de forma lineal para valores grandes del mismo; algo similar sucede si variamos c , aunque aquí ya vemos directamente que θ_B sería muy pequeño. Para un modo incidente ε_z , que recordemos estaba desacoplado de los demás, la rotación del campo es despreciable, pues $\theta_B \sim 10^{-8}$.

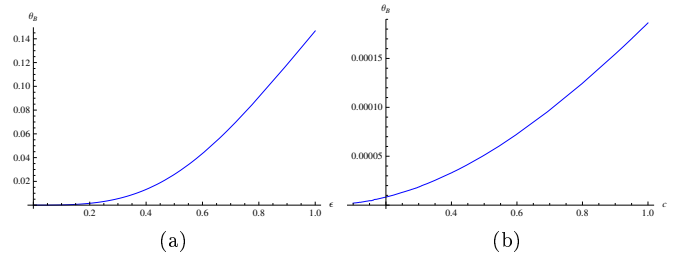


Figura 7: Evolución del ángulo de rotación del campo magnético para un modo inicial ε_y fijando (a) c y (b) ϵ en el caso de una perturbación vectorial.

Si analizamos la perturbación tensorial diagonal, tenemos que no se produce ningún tipo de rotación para ninguno de los dos modos incidentes considerados, ya que tanto la variación de ϵ como de c producen valores de $\theta_B \sim 10^{-8}$, totalmente despreciables, como ya hemos mencionado anteriormente.

En último lugar tenemos la perturbación tensorial no diagonal (Fig. (8)). En este caso, se observa el mismo comportamiento partiendo de un modo ε_y que de un ε_z . Tanto si variamos ϵ como si lo hacemos con c , se observan unas curvas de crecimiento suaves para θ_B .

Cabe destacar que debería obtenerse un comportamiento similar del campo eléctrico si se hallara el ángulo con el que ha sido girado.

La importancia de la rotación del campo magnético viene dada porque el fondo cósmico de microondas (CMB) se encuentra polarizado, y la presencia de perturbaciones en la métrica podría generar algún tipo de rotación de su plano de polarización, lo cual permitiría obtener información sobre la distribución de materia a gran escala [14].

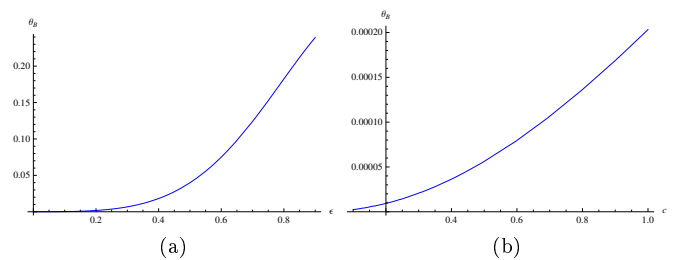


Figura 8: Evolución del ángulo de rotación del campo magnético para un modo inicial ε_y fijando (a) c y (b) ϵ en el caso de una perturbación tensorial no diagonal. Para ε_z se obtiene un resultado idéntico al de ε_y .

VIII. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado cómo una extensión mínima del electromagnetismo, en la cual no necesitamos imponer la condición de Lorenz, y que no requiere

la introducción de nuevos campos o parámetros, podría proporcionar una explicación simple para el valor de la constante cosmológica y, al mismo tiempo, un mecanismo para la generación de campos magnéticos en escalas cosmológicas.

Hemos analizado la conversión de fotones temporales y longitudinales en fotones transversos usuales al atravesar perturbaciones métricas de tipo escalar, vectorial y tensorial, que pueden ser producidas en escenarios astrofísicos a gran escala como galaxias o clusters de galaxias;

para ello hemos estudiado la propagación de los modos electromagnéticos y la posible generación de campo magnético después de atravesar la perturbación. Asimismo, hemos analizado la forma que adquiere el campo magnético generado, y la posibilidad de que haya sido rotado con respecto al campo preexistente (en los modos transversos) al atravesar la perturbación, lo cual adquiere importancia en el estudio del plano de polarización del CMB. En la Tabla I se ofrece un resumen con todos los resultados obtenidos.

		TIPO DE PERTURBACIÓN							
		<i>Escalar</i>		<i>Vectorial</i>		<i>Tensorial diagonal</i>		<i>Tensorial no diagonal</i>	
		Genera B	Rota B	Genera B	Rota B	Genera B	Rota B	Genera B	Rota B
MODO INCIDENTE	<i>Temporal</i>	Sí	-	Sí	-	No	-	No	-
	<i>Longitudinal</i>	Sí	-	Sí	-	Sí	-	Sí	-
	<i>Transverso (Y)</i>	-	No	-	Sí	-	No	-	Sí
	<i>Transverso (Z)</i>	-	No	-	No	-	No	-	Sí

Tabla I: Resumen de resultados

Como perspectivas futuras, cabría realizar un estudio más profundo en el cual resolviéramos el mismo sistema de ecuaciones acopladas (2) pero sin suponer que las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales consideradas sean pequeñas. También podría trabajarse con una perturbación que no dependa únicamente de la coordenada x , repitiendo el cálculo para analizar las posibles similitudes o discrepancias con los resultados obtenidos

y, al mismo tiempo, podría estudiarse qué sucede con $\lambda \neq -1$, lo cual nos obligaría a considerar formas más complejas para las ondas. Por último, podría analizarse la rotación del campo eléctrico, que como ya mencionamos anteriormente debería exhibir un comportamiento similar al mostrado por el campo magnético, y que también resultaría de interés de cara al estudio de la rotación del plano de polarización del CMB.

-
- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley (1972).
 - [2] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley (1990).
 - [3] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge (2000).
 - [4] R. R. Caldwell and M. Kamionkowski, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59** (2009) 397. arXiv:0903.0866 [astro-ph]
 - [5] R. M. Kulsrud, and E. G. Zweibel, *Rep. Prog. Phys.* **71**, 046901 (2008). arXiv:0707.2783 [astro-ph]
 - [6] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15** (2006), 1753. arXiv:0603057 [hep-th]
 - [7] J. Beltrán Jiménez and A. L. Maroto, *JCAP* **0903** (2009) 016; *Int. J. Mod. Phys. D* **18** (2009) 2243. arXiv:0811.0566 [astro-ph]
 - [8] J. Beltrán Jiménez and A. L. Maroto, *Phys. Lett. B* **686** (2010) 175. arXiv:0903.4672 [astro-ph.CO]
 - [9] J. Beltrán Jiménez and A. L. Maroto, *Phys. Rev. D* **83**, 023514 (2011). arXiv:1010.3960 [astro-ph.CO]
 - [10] J. Beltrán Jiménez and A. L. Maroto, arXiv:1101.1763 [astro-ph.CO]
 - [11] J. Beltrán Jiménez and A. L. Maroto, arXiv:1101.2072 [astro-ph.CO]
 - [12] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberger, *Phys. Rept.* **215**, (1992), 203-333.
 - [13] J. B. Jiménez, T. S. Koivisto, A. L. Maroto and D. F. Mota, *JCAP* **0910** (2009) 029. arXiv:0907.3648 [physics.gen-ph]
 - [14] V.A. Kostelevy and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 011601 (2007). arXiv:0702379 [astro-ph].