

Fenomenología cosmológica de cuerdas p-ádicas
Cosmological phenomenology of p-adic strings

(Dated: 12 de septiembre de 2011)

Autor:

Mario Sanfrutos Carreras ⁽¹⁾

Director:

J. A. R. Cembranos ^(2,a)

^(a)Departamento de Física Teórica I, Universidad Complutense de Madrid, E-28040 Madrid, Spain.



⁽¹⁾ E-mail: msancarr@gmail.com

⁽²⁾ E-mail: cembra@fis.ucm.es

Resumen:

En esta memoria se analiza el modelo de cuerdas p-ádicas a temperatura finita desde un punto de vista cosmológico. En particular, se estudia la evolución de sus propiedades termodinámicas en un universo en expansión. La dependencia de la temperatura del fluido p-ádico con el factor de escala del universo y su contenido de energía es fundamental para la comprensión del fluido p-ádico como el origen de la inflación en el universo más temprano o como energía oscura en la evolución cosmológica tardía. Se presta especial atención a la realización particular de esta posibilidad y a su efecto sobre la observación de supernovas.

Sum:

In this work the p-adic strings model at finite temperature is analyzed from a cosmological point of view. In particular, the evolution of its thermodynamical properties is studied in an expanding universe. The dependence of the p-adic fluid temperature with the cosmological scale factor and its energy content is fundamental to understand the p-adic fluid as the origin of inflation at the early universe or as dark energy during the late cosmological evolution. Special attention is paid to the particular realization of this possibility and its effect on supernovae observations.

Índice de contenidos:

1. Introducción
2. Desarrollo matemático
3. Propiedades termodinámicas
4. Comportamiento asintótico del factor de escala
5. Fluctuaciones térmicas y espectro de potencias
6. Determinación de parámetros cosmológicos
7. Conclusiones

Palabras clave: cuerdas p-ádicas, temperatura finita, ecuación de estado, parámetros cosmológicos, inflación, energía oscura, universo en expansión

Keywords: p-adic strings, finite temperature, state equation, cosmological parameters, inflation, dark energy, expanding universe

I. INTRODUCCIÓN

Este trabajo está relacionado con la teoría a temperatura finita de modelos de cuerdas p -ádicas, centrándose principalmente en la interpretación de las propiedades termodinámicas de la teoría como contribuciones de modos térmicos estándar con energías proporcionales a la temperatura y modos inversos con energías proporcionales al inverso de la temperatura [1], lo que nos conduce a una dualidad térmica en el orden dominante análoga a la bien conocida dualidad de las teorías de cuerdas [2–4]. El modelo de cuerdas p -ádicas recupera además los mismos límites asintóticos a altas y bajas temperaturas que otros cálculos obtenidos con modelos puramente de cuerdas [2, 5]. En este texto se detalla también el cálculo a segundo orden para el estudio de la termodinámica de los modelos p -ádicos dados por la acción propuesta en la bibliografía [6, 7]:

$$S = \frac{m_s^D}{g_p^2} \int d^D x \left(-\frac{1}{2} \phi p^{-\frac{\square}{2m_s^2}} \phi + \frac{1}{p+1} \phi^{p+1} \right), \quad (1)$$

donde aparece un término potencial estándar, $\frac{1}{p+1} \phi^{p+1}$, y uno cinético no local, $-\frac{1}{2} \phi p^{-\frac{\square}{2m_s^2}} \phi$. $\phi(x)$ representa el taquión de cuerda abierta, m_s es la escala de tensión de la cuerda y g_p es la constante de acoplamiento p -ádico definida en términos de la constante de acoplamiento de la cuerda abierta g_0 como $g_p^2 = \frac{g_0^2(p-1)}{p^2}$. Se ha elegido trabajar con $D = 4$ (tres dimensiones espaciales más el tiempo) y $p = 3$, pero la mayoría de las técnicas utilizadas se pueden generalizar para otros valores enteros positivos de p y un número arbitrario de dimensiones, D [8].

La acción S describe una teoría no local para el campo del taquión que se puede entender como un modelo simplificado de la teoría de cuerdas completa, proporcionando interesantes propiedades cosmológicas, como inflación sin *slow-roll* [9] o escenarios térmicos para la formación de estructuras a gran escala [10], así como obteniendo soluciones no singulares para cosmologías cíclicas o de rebote [11].

El estudio de la teoría a temperatura finita puede realizarse mediante el método estándar, que consiste en la compactificación del tiempo imaginario, tal y como se muestra en la acción reescalada:

$$S_T = \int_0^\beta d\tau \int d^3 x \left(-\frac{1}{2} \phi e^{-\frac{\partial_\tau^2 + \nabla^2}{M^2}} \phi - \lambda \phi^4 \right), \quad (2)$$

donde $\beta = 1/T$. La teoría libre no aporta ninguna contribución a la función de partición, $\ln Z_1 = 0$, lo cual es consistente dado que las cuerdas p -ádicas no tienen excitaciones perturbativas, [1], véase la Fig. (1).

Para encontrar una contribución es preciso recurrir al siguiente orden, que contribuye con un factor combinatorio 3 y un factor $-\lambda$ asociado al vértice, Fig. (2).

La función de partición a segundo orden viene dada por

$$\ln Z_2 = 3(-\lambda)\beta V \left[T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-\frac{p^2 + \omega_n}{M^2}} \right]^2. \quad (3)$$

Debido a la naturaleza exponencial del propagador [1] en la Ec. (3), los diagramas de *loops* convergen, así que la Ec. (3) se convierte en:

$$\ln Z_2 = \frac{-\lambda 3V M^6 T}{2^6 \pi^3} \varsigma^2 \left(\frac{2\pi T}{M} \right), \quad (4)$$

donde la función $\varsigma \left(\frac{2\pi T}{M} \right)$ se puede escribir en términos de la función *theta* de Jacobi:

$$\begin{aligned} \varsigma \left(\frac{2\pi T}{M} \right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \frac{4\pi^2 T^2}{M^2}} = \\ &= \frac{M}{2\sqrt{\pi T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 \frac{M^2}{4T^2}} = \frac{M}{2\sqrt{\pi T}} \varsigma \left(\frac{M}{2T} \right) = \\ &= \frac{M}{2\sqrt{\pi T}} \vartheta \left(0; e^{-\left(\frac{M}{2T}\right)^2} \right) = \vartheta \left(0; e^{-\left(\frac{2\pi T}{M}\right)^2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

donde se muestra explícitamente la contribución del n -ésimo modo térmico.

Los modos más altos se ven fuertemente suprimidos a temperaturas altas. A temperaturas bajas la función de partición se puede interpretar como la contribución de un conjunto de modos que no son proporcionales a T sino a $\frac{1}{T}$.

Puesto que $\varsigma \left(\frac{2\pi T}{M} \right)$ se puede expresar como una serie de funciones exponenciales, se pueden hacer excelentes aproximaciones para los límites de altas y bajas temperaturas:

$$\begin{cases} \ln Z_2 \xrightarrow{T \ll M} -\frac{\Lambda V}{T} \\ \ln Z_2 \xrightarrow{T \gg M} -\frac{4\pi \Lambda T V}{M^2} \end{cases} \quad (6)$$

con $\Lambda = 3\lambda T_2^8$ una constante cosmológica. Este resultado coincide con el comportamiento asintótico sugerido en la bibliografía [2, 5].

A lo largo de este trabajo se estudiarán los límites asintóticos de la presión, densidad de energía y densidad de entropía del fluido p -ádico, y se determinará su ecuación de estado. Desde un punto de vista cosmológico, se estudiará la temperatura de dicho fluido en función del

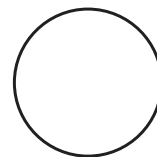


Figura 1: El diagrama de un *loop* no contribuye a la función de partición.

factor de escala, y se probará que su efecto sobre el universo es análogo al que tendría una constante cosmológica. Por último se ajustará el valor de varios parámetros cosmológicos (la densidad de materia, Ω_M , frente al contenido total de energía del universo, y la escala de tensión de la cuerda, M) a partir de datos de distancias a supernovas de tipo Ia extraídos de dos catálogos, *gold* y *union*.

II. DESARROLLO MATEMÁTICO

Sea la ecuación de estado $p = p(\rho)$, donde en el modelo p -ádico la presión, p , y la densidad de energía, ρ , son funciones de la temperatura, T , y ésta es función del factor de escala, a .

Conocemos las ecuaciones de Friedmann [12]:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda}{3} - k\frac{c^2}{a^2} \quad (7)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - 4\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (8)$$

Por simplicidad trabajemos en unidades de Planck ($G = 1, c = 1$), y sin constante cosmológica ($\Lambda = 0$), por lo que las Ecs. (7) y (8) se pueden reescribir como:

$$3H^2 = 8\pi\rho - 3ka^{-2} \quad (9)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3p) \quad (10)$$

De la Ec. (9) se obtiene la expresión de la densidad de energía como función de la constante de Hubble y del factor de escala:

$$\rho = \frac{3}{8\pi}H^2 + \frac{3}{8\pi}ka^{-2} = \rho_c + \frac{3}{8\pi}ka^{-2} \quad (11)$$

De las Ecs. (9) y (10) se puede calcular la ecuación de conservación, que involucra la presión, la densidad de energía y su primera derivada respecto al tiempo:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (12)$$

Particularizando para un universo plano ($k = 0$, de modo que $\rho = \rho_c$) se verifica que la densidad de energía se comporta como la constante de Hubble al cuadrado,



Figura 2: El diagrama de dos *loops* constituye la contribución del orden dominante.

siendo la densidad de energía una función de la temperatura que a su vez es una función del factor de escala, mientras que la constante de Hubble es simplemente una función del factor de escala.

Debido al comportamiento de ρ como H^2 , se puede buscar una ecuación que relacione el factor de escala con la presión y la densidad de energía del fluido p -ádico. Sea $' \equiv \frac{d}{dT}$. Entonces la Ec. (12) se puede reescribir como

$$\rho'\dot{T} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (13)$$

Por medio de operaciones sencillas a partir de la Ec. (13) se obtiene

$$\frac{1}{a'} = \frac{\dot{T}}{\dot{a}} = -\frac{3}{a} \frac{\rho + p}{\rho'}, \quad (14)$$

y de la Ec. (14) se tiene

$$\frac{\rho'}{\rho + p} dT = -3d(\ln a). \quad (15)$$

Integrando la Ec. (15) finalmente se llega a

$$\int \frac{\rho'}{\rho + p} dT = -3 \int d(\ln a). \quad (16)$$

Estas integrales serán calculadas más adelante, cuando sean conocidas las expresiones de p y ρ .

III. PROPIEDADES TERMODINÁMICAS

Partiendo de la función de partición, Ec. (3), se puede obtener una ecuación para la presión, Ec. (19).

$$p = \frac{\partial(T \ln Z_2)}{\partial V} \quad (17)$$

donde se define la siguiente constante en términos de la escala de tensión de la cuerda:

$$\rho_0 = -3\lambda \left(\frac{M^2}{4\pi}\right)^4 \quad (18)$$

Entonces la ecuación de la presión queda como

$$p(T) = \rho_0 \frac{2\sqrt{\pi}T}{M} \zeta\left(\frac{2\pi T}{M}\right) \left[\frac{2\sqrt{\pi}T}{M} \zeta\left(\frac{2\pi T}{M}\right) - 2\alpha \right], \quad (19)$$

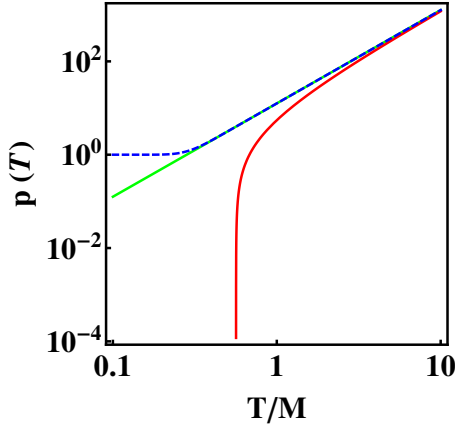


Figura 3: $p(T)$ vs. T para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida). A temperaturas altas ambas tienden a $\frac{4\pi\rho_0 T^2}{M^2}$.

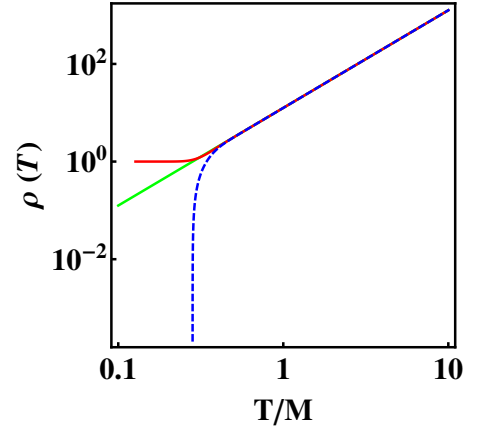


Figura 5: $\rho(T)$ vs. T para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida). A temperaturas altas ambas se comportan como $\frac{4\pi\rho_0 T^2}{M^2}$.

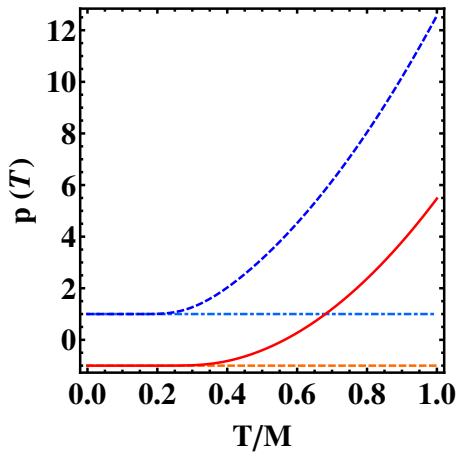


Figura 4: $p(T)$ vs. T para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida). A temperaturas bajas, la presión para $\alpha = 0$ tiende a ρ_0 y para $\alpha = 1$ tiende a $-\rho_0$.

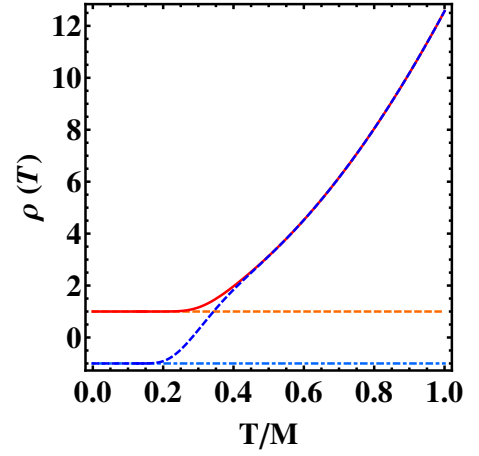


Figura 6: $\rho(T)$ vs. T para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida). A temperaturas bajas la densidad de energía para $\alpha = 0$ tiende a $-\rho_0$ y para $\alpha = 1$ tiende a ρ_0 .

la cual se puede representar para cada valor de α , siendo $\alpha = 0$ en ausencia de un contratérmino y $\alpha = 1$ con contratérmino, Fig. (3) y (4). Dicho contratérmino se introduce para evitar la presencia de *ghosts* en la teoría, y garantiza que la densidad de energía del fluido p -ádico sea positiva en todo el rango de temperaturas.

A partir de la Ec. (19) se calcula la expresión que da cuenta de la densidad de energía:

$$\rho(T) = T^2 \frac{\partial(p/T)}{\partial T} \quad (20)$$

$$\rho(T) = \rho_0 \frac{4\pi T^2}{M^4} \left[M^2 \zeta^2 \left(\frac{2\pi T}{M} \right) + 8e^{-\frac{4\pi^2 T^2}{M^2}} \pi^{3/2} T \cdot \left(\alpha M - 2\sqrt{\pi} T \zeta \left(\frac{2\pi T}{M} \right) \right) \frac{\partial \left(\zeta \left(\frac{2\pi T}{M} \right) \right)}{\partial \left(e^{-\left(\frac{2\pi T}{M} \right)^2} \right)} \right] \quad (21)$$

Se puede representar la densidad de energía para cada α , Figs. (5) y (6).

También se puede conocer la densidad de entropía asociada al fluido p -ádico:

$$s(T) = \frac{\partial p}{\partial T} \quad (22)$$

$$s(T) = \rho_0 \frac{4e^{-\frac{4\pi^2 T^2}{M^2}} \sqrt{\pi}}{M^4} \left[-\alpha M + 2\sqrt{\pi} T \zeta \left(\frac{2\pi T}{M} \right) \right] \cdot \left[e^{\frac{4\pi^2 T^2}{M^2}} M^2 \zeta \left(\frac{2\pi T}{M} \right) - 8\pi^2 T^2 \frac{\partial \left(\zeta \left(\frac{2\pi T}{M} \right) \right)}{\partial \left(e^{-\left(\frac{2\pi T}{M} \right)^2} \right)} \right] \quad (23)$$

La densidad de entropía dada por la Ec. (23) se puede representar para cada α , Figs. (7) y (8).

Por otro lado, dividiendo (19) entre (21), se obtiene la expresión que da cuenta del parámetro de la ecuación

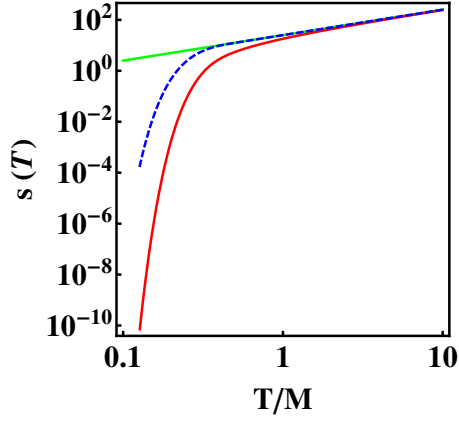


Figura 7: $s(T)$ vs. T para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida). A temperaturas altas ambas se comportan como $\frac{8\pi\rho_0 T}{M^2}$.

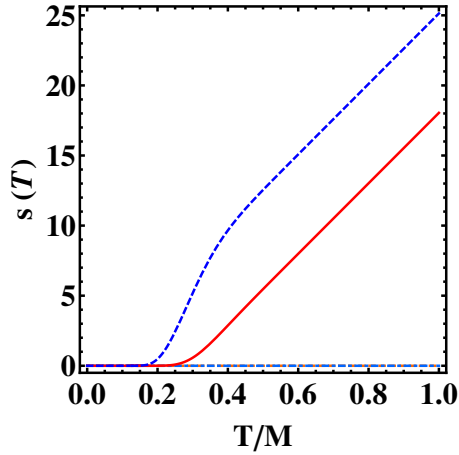


Figura 8: $s(T)$ vs. T para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida). A temperaturas bajas ambas se hacen 0.

de estado del fluido, Ec. (24). La dependencia de este parámetro con la temperatura se muestra en las Figs. (9) y (10).

$$\omega(T) = \frac{e^{\frac{4\pi^2 T^2}{M^2}} M^2 \zeta\left(\frac{2\pi T}{M}\right) \left[-\alpha M + \sqrt{\pi} T \zeta\left(\frac{2\pi T}{M}\right)\right]}{e^{\frac{4\pi^2 T^2}{M^2}} M^2 \sqrt{\pi} T \zeta^2\left(\frac{2\pi T}{M}\right) + \dots} \dots + 8\pi^2 T^2 \left[\alpha M - 2\sqrt{\pi} T \zeta\left(\frac{2\pi T}{M}\right) \right] \frac{\partial\left(\zeta\left(\frac{2\pi T}{M}\right)\right)}{\partial\left(e^{-\left(\frac{2\pi T}{M}\right)^2}\right)} \quad (24)$$

IV. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL FACTOR DE ESCALA

De las Ecs. (19), (20) y (22) el comportamiento de la presión, de la densidad de energía y de la densidad de entropía así como el parámetro de la ecuación de estado se pueden obtener analíticamente en los límites de altas

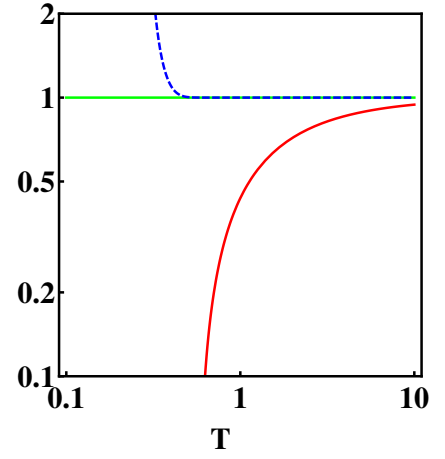


Figura 9: $w(T)$ vs. T para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida). A temperaturas altas el parámetro de la ecuación de estado se hace igual a 1, de modo que el fluido p-ádico se comporta como materia rígida.

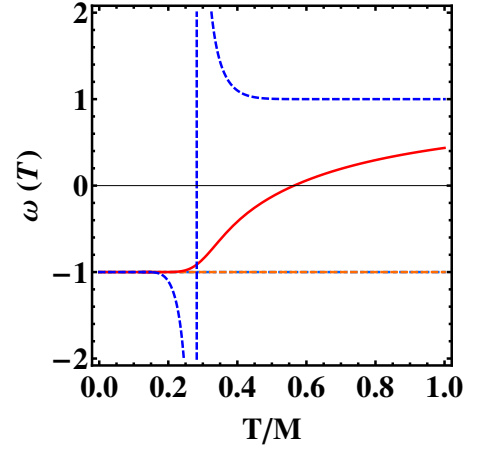


Figura 10: $w(T)$ vs. T para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida). A temperaturas bajas el parámetro de la ecuación de estado se iguala a -1 , por lo tanto el fluido p-ádico adopta el comportamiento de una constante cosmológica.

y bajas temperaturas, como una función de α a cualquier orden dado, sin más que sustituir el $\zeta\left(\frac{2\pi T}{M}\right)$ apropiado en cada una de sus ecuaciones (ver Cuadro I).

	$T \ll M$	$T \gg M$
1 ^{er} orden	$\frac{M}{2\sqrt{\pi}T}$	1
2 ^o orden	$\frac{M}{2\sqrt{\pi}T} \left(1 + 2e^{-\frac{M^2}{4T^2}}\right)$	$1 + 2e^{-\frac{4\pi^2 T^2}{M^2}}$

Cuadro I: $\zeta\left(\frac{2\pi T}{M}\right)$ en el límite asintótico a primer y segundo orden.

Además, ya se pueden resolver las integrales de la Ec. (16). Integrando entre dos temperaturas, T_0 y T , con $0 \leq T_0 < T$:

		$T \ll M$	$T \gg M$
$\alpha = 0$	$p(T)$	ρ_0	$\frac{4\pi\rho_0 T^2}{M^2}$
	$\rho(T)$	$-\rho_0$	$\frac{8\pi\rho_0 T}{M^2}$
	$s(T)$	0	$\frac{8\pi\rho_0 T}{M^2}$
$\alpha = 1$	$p(T)$	$-\rho_0$	$\frac{4\pi\rho_0 T^2}{M^2}$
	$\rho(T)$	ρ_0	$\frac{8\pi\rho_0 T}{M^2}$
	$s(T)$	0	$\frac{8\pi\rho_0 T}{M^2}$
$\alpha = 0 \text{ ó } 1$	$\rho'(T)$	0	$\frac{8\pi\rho_0 T}{M^2}$
	$\omega(T)$	-1	1

Cuadro II: Presión, densidad de energía, densidad de entropía y parámetro de la ecuación de estado en los límites asintóticos a primer orden.

$$\int_{T_0}^T \frac{\rho'}{\rho + p} dT = \ln \left(\frac{(\alpha M - 2\sqrt{\pi} T \zeta(\frac{2\pi T}{M}))}{(\alpha M - 2\sqrt{\pi} T_0 \zeta(\frac{2\pi T_0}{M}))} \right) \left(\frac{M^2 \zeta(\frac{2\pi T}{M}) - 8e^{-\frac{4\pi^2 T^2}{M^2}} \pi^2 T^2 \frac{\partial \zeta(\frac{2\pi T}{M})}{\partial (e^{-(\frac{2\pi T}{M})^2})}}{M^2 \zeta(\frac{2\pi T_0}{M}) - 8e^{-\frac{4\pi^2 T_0^2}{M^2}} \pi^2 T_0^2 \frac{\partial \zeta(\frac{2\pi T_0}{M})}{\partial (e^{-(\frac{2\pi T_0}{M})^2})}} \right) \quad (25)$$

$$-3 \int_{T_0}^T d(\ln a) = -3 \ln \left(\frac{a(T)}{a(T_0)} \right) \quad (26)$$

de modo que el factor de escala depende de la temperatura como se indica en la Ec. (27), que es válida con $\alpha = 0$ en el rango de temperaturas $0 \leq T_0 < T$ y con $\alpha = 1$ para todas las temperaturas.

$$a(T) = a_0 \left(\frac{(\alpha M - 2\sqrt{\pi} T \zeta(\frac{2\pi T}{M}))}{(\alpha M - 2\sqrt{\pi} T_0 \zeta(\frac{2\pi T_0}{M}))} \right) \left(\frac{M^2 \zeta(\frac{2\pi T}{M}) - 8e^{-\frac{4\pi^2 T^2}{M^2}} \pi^2 T^2 \frac{\partial \zeta(\frac{2\pi T}{M})}{\partial (e^{-(\frac{2\pi T}{M})^2})}}{M^2 \zeta(\frac{2\pi T_0}{M}) - 8e^{-\frac{4\pi^2 T_0^2}{M^2}} \pi^2 T_0^2 \frac{\partial \zeta(\frac{2\pi T_0}{M})}{\partial (e^{-(\frac{2\pi T_0}{M})^2})}} \right)^{-\frac{1}{3}} \quad (27)$$

El comportamiento del factor de escala frente a la temperatura en los límites asintóticos se obtiene analíticamente sustituyendo las expresiones asintóticas de la presión, la densidad de energía, la densidad de entropía y su derivada respecto a la temperatura en la Ec. (16). Durante las fases más tempranas de la evolución del universo (altas temperaturas), para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, el factor de escala se comporta como

$$a = a_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\frac{1}{3}}. \quad (28)$$

A tiempos más largos (bajas temperaturas) aparece una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ en el primer orden, así que es necesario recurrir al segundo orden para determinar analíticamente la relación entre la temperatura y el factor de escala, Ecs. (29) y (30).

$$p(T \ll M) = \rho_0 \left(1 + 2e^{-\frac{M^2}{4T^2}} \right) \left(1 - 2\alpha + 2e^{-\frac{M^2}{4T^2}} \right) \quad (29)$$

$$\rho(T \ll M) = -\rho_0 \left[1 - 2\alpha + \frac{2(\alpha - 1)e^{-\frac{M^2}{4T^2}}}{T^2} + \frac{4e^{-\frac{M^2}{2T^2}}(T^2 - M^2)}{T^2} \right] \quad (30)$$

Sustituyendo estas nuevas ecuaciones para la presión y la densidad de energía en la Ec. (16), se obtiene la dependencia del factor de escala con la temperatura a temperaturas bajas:

$$a = \frac{T e^{\frac{M^2}{6T^2}}}{\left(2 + (1 - \alpha)e^{\frac{M^2}{4T^2}} \right)^{\frac{1}{3}}} \quad (31)$$

Como en la Ec. (31), T y el factor 2 son despreciables en comparación a $e^{M^2/6T^2}$ para $T \ll M$, una buena aproximación del factor de escala $a(T)$ a bajas temperaturas es $e^{M^2/12T^2}$ para $\alpha = 0$ y $e^{M^2/6T^2}$ para $\alpha = 1$ (Fig. 11). Estos límites asintóticos son analíticamente invertibles, resultando $T = M(12 \ln a)^{-1/2}$ y $T = M(6 \ln a)^{-1/2}$ respectivamente.

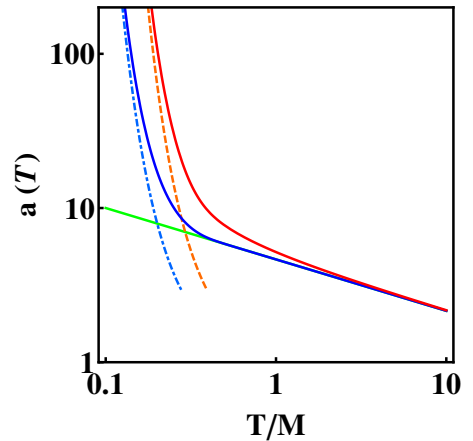


Figura 11: $a(T)$ vs. T para $\alpha = 0$ (curva sólida de la izquierda, azul en la versión *online*) y $\alpha = 1$ (curva sólida roja de la derecha), y sus aproximaciones asintóticas a altas temperaturas (recta verde sólida) y a bajas temperaturas, para $\alpha = 0$ (línea azul clara a puntos y rayas) y $\alpha = 1$ (línea naranja a rayas).

La expresión exacta de $a(T)$ es demasiado complicada como para invertirla analíticamente, pero se puede

representar numéricamente $T(a)$, Fig. (12) con las aproximaciones a sus comportamientos asintóticos a segundo orden para altas y bajas temperaturas.

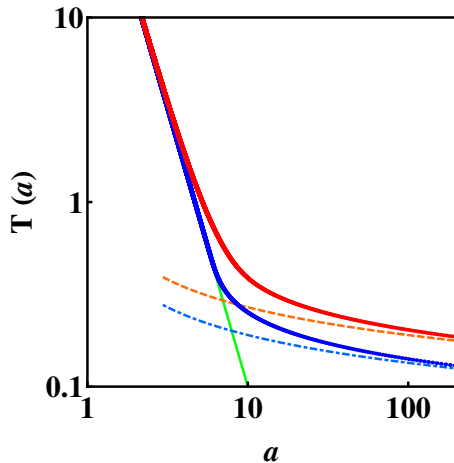


Figura 12: $T(a)$ vs. a para $\alpha = 0$ (curva sólida inferior, azul en la versión *online*) y $\alpha = 1$ (curva sólida roja superior). Véanse también las aproximaciones de $T(a)$ a altas (recta verde sólida) y bajas temperaturas para $\alpha = 0$ (línea azul clara a puntos y rayas) y $\alpha = 1$ (línea naranja rayada).

A altas temperaturas, $a(T)$ (Ec. 28) puede invertirse fácilmente (línea verde a puntos y rayas en la Fig. 12):

$$T = T_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} \quad (32)$$

Véase la Fig. (12) para comprobar el comportamiento de $T(a)$ a bajas temperaturas (línea azul rayada para $\alpha = 0$ naranja sólida para $\alpha = 1$).

V. FLUCTUACIONES TÉRMICAS Y ESPECTRO DE POTENCIAS

En el límite de bajas temperaturas, hemos comprobado que el fluido p-ádico se comporta como una constante cosmológica, por lo que es un candidato potencial para producir el periodo de inflación en el universo temprano o el de aceleración en el universo tardío. En el caso de ser el origen de la inflación, el fluido p-ádico podría producir las semillas de las estructuras que observamos en el universo mediante fluctuaciones térmicas.

Para calcular dichas fluctuaciones térmicas en un contexto cosmológico se define un espectro de potencias $\mathcal{P}_\Phi(k)$, que debe ser evaluado en el momento en el que los modos de vibración cruzan el horizonte de Hubble. Por lo tanto, el momento del modo de interés viene dado por

$$k = aH = \dot{a}. \quad (33)$$

De la Ec. (9) particularizada para un universo plano se tiene:

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi\rho}{3}} a \quad (34)$$

y de las Ecs. (33) y (34) es trivial obtener la ecuación de k :

$$k = \sqrt{\frac{8\pi\rho}{3}} a \quad (35)$$

En esta sección me limito al estudio de $k(T)$ en distintos universos dominados por un fluido p-ádico, una constante cosmológica, materia o radiación. Próximamente se desarrollará el estudio del espectro de potencias en función de k y se determinarán sus posibles huellas en el fondo cósmico de microondas.

A. Universo dominado por un fluido p-ádico

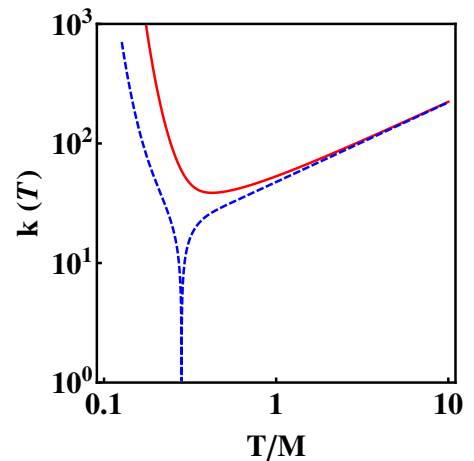


Figura 13: $k(T)$ vs. T en un universo dominado por un fluido p-ádico, para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida). El comportamiento extraño de la línea azul rayada entre $T = 0,2$ y $T = 0,5$ es debido a que $\rho(\alpha = 0)$ toma valores negativos a temperaturas bajas, por lo que hubo de tomarse el valor absoluto de ρ para calcular su raíz cuadrada.

La Fig. (13) puede invertirse numéricamente para conocer el comportamiento de $T(k)$ frente a k :

Podemos deducir el comportamiento de k frente a la temperatura a partir de la Ec.(35), como puede verse en la Fig. (14). A temperaturas altas, k se comporta como $k = \frac{4\pi}{M} \sqrt{\frac{2}{3}} \rho_0 T^{2/3}$. A temperaturas bajas, k se comporta como $k = \sqrt{\frac{8\pi\rho_0}{3}} e^{M^2/12T^2} T$ para $\alpha = 0$ y como $2\sqrt{\frac{2^{1/3}\pi\rho_0}{3}} e^{M^2/6T^2} T$ para $\alpha = 1$.

B. Universo dominado por una constante cosmológica

En un universo dominado por una constante cosmológica el comportamiento de k cambia drásticamente. En

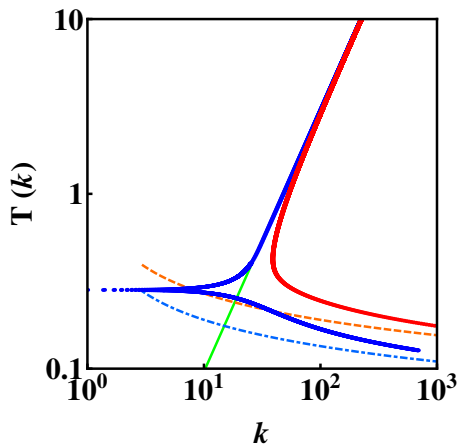


Figura 14: $T(k)$ vs. k en un universo dominado por un fluido p-ádico, para $\alpha = 0$ (curva sólida inferior, azul *online*) y $\alpha = 1$ (curva sólida superior, roja). Véanse también las aproximaciones de $T(k)$ a altas (recta verde sólida) y bajas temperaturas para $\alpha = 0$ (línea azul a puntos y rayas) y para $\alpha = 1$ (línea naranja rayada).

este caso la densidad de energía permanece constante, $\rho = cte$, de modo que a partir de la Ec. (35) se halla que $k(a) \propto a$ para altas y bajas temperaturas, véase la Fig. (15). Puesto que el comportamiento de $a(T)$ en un universo dominado por una constante cosmológica es conocido, se puede representar $k(T)$:

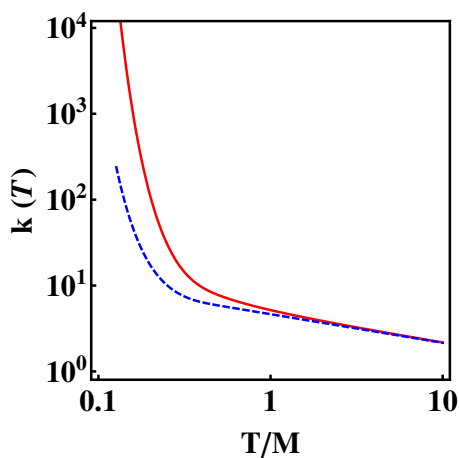


Figura 15: $k(T)$ vs. T en un universo dominado por una constante cosmológica, para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida).

Como se muestra en la Fig. (15), a altas temperaturas el momento k se comporta como e^{1/T^2} , mientras que a bajas temperaturas $k \sim T^{-1/3}$. Conforme la temperatura disminuye, k se hace mayor, de manera mucho más rápida según el universo se enfría.

C. Universo dominado por materia

En este caso la densidad de energía se comporta como a^{-3} , con lo que partiendo de la Ec. (35) se encuentra que

$k(a) \propto a^{-1/2}$ para altas y bajas temperaturas, Fig. (16).

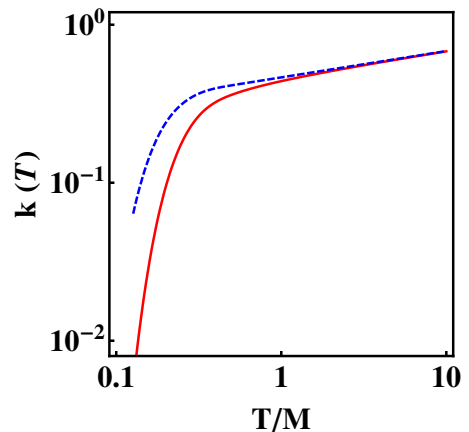


Figura 16: $k(T)$ vs. T en un universo dominado por materia para $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida).

En la Fig. (16) se puede ver que a altas temperaturas el momento k se comporta como e^{-1/T^2} . A temperaturas bajas, k decrece como $T^{1/6}$. En un universo dominado por materia, k toma valores mucho más pequeños que en uno dominado por un fluido p-ádico o por una constante cosmológica.

D. Universo dominado por radiación

En este caso la densidad de energía se comporta como a^{-4} , por lo que de la Ec. (35) se llega a que $k(a) \propto a^{-1}$ para altas y bajas temperaturas, Fig. (17).

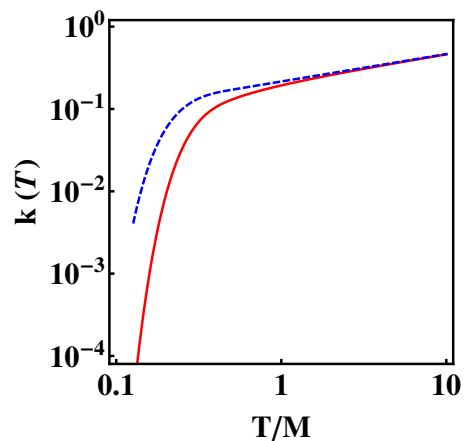


Figura 17: $k(T)$ vs. T en un universo dominado por radiación, con $\alpha = 0$ (línea azul rayada) y $\alpha = 1$ (línea roja sólida).

En la Fig. (17) se muestra que a altas temperaturas el momento k se comporta como e^{-1/T^2} , como en un universo dominado por materia. Conforme va disminuyendo la temperatura, k decrece como $T^{1/3}$, mucho más rápido que en un universo dominado por materia. En un universo dominado por radiación, como en uno dominado por materia, k toma valores mucho más pequeños que en uno dominado por un fluido p-ádico o por una constante cosmológica.

VI. DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS COSMOLÓGICOS

En el caso en el que el fluido p -ádico fuese el origen de la presente expansión acelerada que sufre el universo, deben realizarse otro tipo de análisis como el que se presenta en esta última sección. Se procede a introducir en el modelo p -ádico datos conocidos de distancias a supernovas de tipo Ia para ajustar los valores de la densidad de materia (Ω_M) y la escala de energías (M) que menor error lleven asociado. Dichos datos provienen de dos catálogos, ‘*gold*’ [13] con 157 supernovas y ‘*union*’ [14] con 307, que contienen información sobre el *redshift* (z) de cada supernova, el módulo de distancia observado (μ_{obs}) y el error en la medida (σ_μ).

La distancia por luminosidad a una supernova con *redshift* z para un modelo cosmológico con secciones espaciales planas, densidad de materia Ω_M y en el que la densidad de energía del fluido p -ádico es ρ , viene dada por [15]:

$$d_L = \frac{(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + (1-\Omega_M)\rho/\rho_0}} \quad (36)$$

El correspondiente módulo de distancia se define como sigue:

$$\mu_{th} = M_{min} + 5 \log(d_L H_0), \quad (37)$$

donde M_{min} es el valor que minimiza el error asociado al ajuste y que viene dado por

$$M_{min} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\mu_{obs} - 5 \log(d_L H_0)}{\sigma_\mu^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_\mu^2}}. \quad (38)$$

Para comparar las predicciones del modelo con los datos observacionales se define un estimador, χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{obs} - 5 \log(d_L H_0) - M_{min})^2}{\sigma_\mu^2}. \quad (39)$$

El mejor ajuste a cada conjunto de supernovas vendrá dado por los valores de Ω_M y M/T_0 que minimicen la función χ^2 , cuyo cálculo se detalla en el apéndice. En esta sección, para presentar los resultados daremos los valores de M a la escala T_0 , donde T_0 es el valor actual de la temperatura del fluido p -ádico (que es independiente de la temperatura de la radiación del CMB).

Para los dos ajustes, en la ecuación de la distancia por luminosidad, Ec. (36), se ha introducido la expresión de la densidad de energía a primer orden con contratérmino ($\alpha = 1$):

$$\rho = \rho_0 \left(1 + 4e^{-M^2/2} a^{-3} (-1 + M^2 + 6 \log a) \right). \quad (40)$$

En la Ec. (40) podemos comprobar como la densidad de energía se comporta como una constante cosmológica, y que la corrección a primer orden introduce un término proporcional a a^{-3} , es decir, un término que hace comportarse al fluido p -ádico como materia.

A partir del ajuste al conjunto ‘*gold*’ (Fig. 18), la densidad de materia resultó ser del 30,9% del contenido total de energía del universo para valores elevados de la escala de tensión de la cuerda, M , con respecto a la temperatura del fluido p -ádico cuando el factor de escala del universo es $a = 1$. Según el ajuste al conjunto ‘*union*’ (Fig. 19), la densidad de materia es del 28,7% del total con M grandes. Esto significa que durante las etapas tardías de la evolución del universo, cuando el cociente de la escala de tensión de la cuerda entre la temperatura del fluido tiende a ∞ ($T \ll M$), se recupera el resultado del modelo Λ CDM y el fluido se comporta como energía oscura, lo que es consistente con el valor que toma el parámetro de la ecuación de estado, $\omega = -1$.

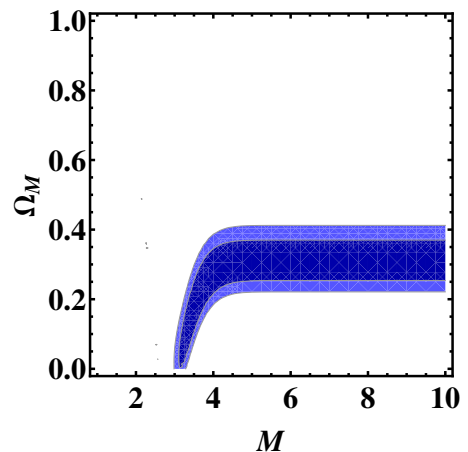


Figura 18: ($\alpha = 1$) Pares de valores Ω_M y M para los que el ajuste está separado del modelo menos de 1σ (azul oscuro) y 2σ (azul claro) respectivamente para el conjunto de datos ‘*gold*’. Cuando $M \rightarrow \infty$, $\Omega_M = 0,309$. El valor del estimador $\chi^2 = 177,072$ es compatible con $\chi^2 = 173,710$ de Λ CDM.

En ambos casos, para valores de M menores que 5, la densidad de materia es menor, llegando a ser prácticamente nula en cierto rango de valores de M . Este resultado indica que el modelo p -ádico es compatible con la ausencia de materia oscura, debiéndose toda contribución de materia únicamente a la bariónica, $\Omega_M = \Omega_b = 0,0458 \pm 0,0016$ [16]. El intervalo de valores de M que cumplen esto es $3,08 < M < 3,31$ a 1σ y $2,95 < M < 3,38$ a 2σ para el conjunto *Gold*, y $3,18 < M < 3,38$ a 1σ y $3,08 < M < 3,44$ a 2σ para el conjunto *Union*. En esta situación, el fluido p -ádico imita el comportamiento de la materia oscura durante las etapas tempranas de la evolución del universo.

Por último, utilicemos el Ω_M obtenido de cada ajuste y un M elevado (en este caso $M = 10$) para representar el módulo de la distancia frente al *redshift* para cada conjunto de supernovas. En las Figs. (20) y (21) se puede comprobar el buen ajuste del modelo a los datos experimentales.

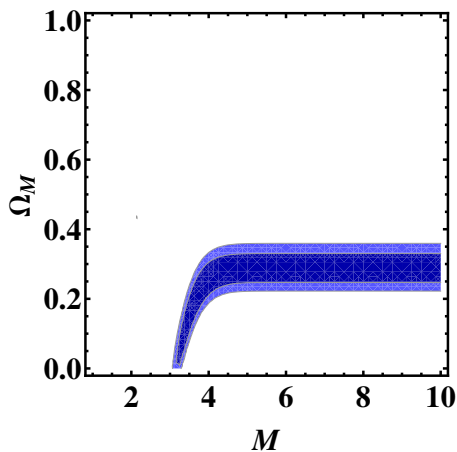


Figura 19: ($\alpha = 1$) Pares de valores Ω_M y M para los que el ajuste está separado del modelo menos de 1σ (azul oscuro) y 2σ (azul claro) respectivamente para el conjunto de datos ‘union’. $\Omega_M = 0,287$. El valor del estimador $\chi^2 = 311,936$ es compatible con $\chi^2 = 310,789$ de Λ CDM.

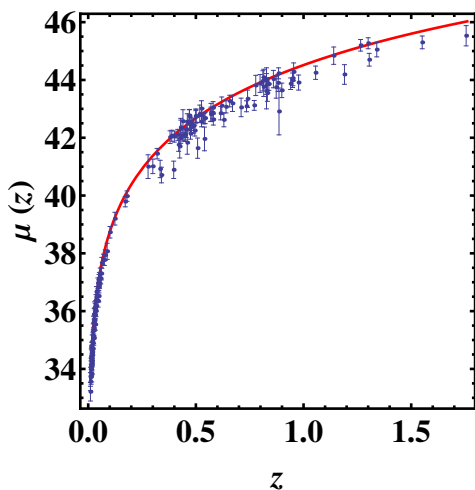


Figura 20: Módulo de distancia frente a *redshift* para el conjunto *gold*, con $\alpha = 1$, $\Omega_M = 0,309$ y $M = 10$ (curva roja). Se muestran también los datos observacionales de las 157 supernovas con sus barras de error.

VII. CONCLUSIONES

A lo largo de esta memoria se ha analizado el modelo de cuerdas p -ádicas y su fenomenología termodinámica y cosmológica. En las dos primeras secciones se ha introducido la acción de la teoría así como la función de partición resultante, y se ha encontrado una relación entre las propiedades termodinámicas del fluido p -ádico y el factor de escala cosmológico a partir de las ecuaciones de Friedmann.

En la tercera sección se ha supuesto un universo en expansión en el que sólo existe fluido p -ádico, y se han encontrado las expresiones analíticas de su presión, su densidad de energía y su densidad de entropía, además del parámetro de la ecuación de estado en un universo en expansión. A juzgar por el valor de este parámetro en

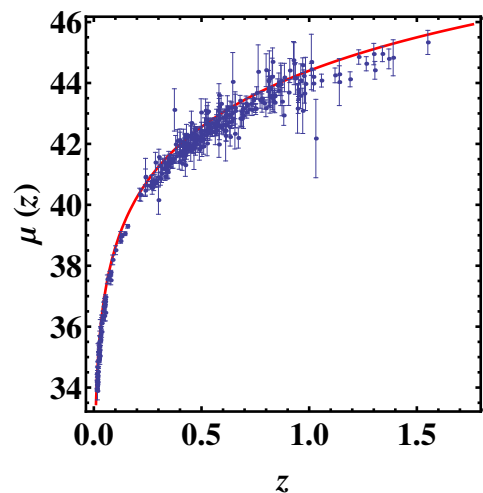


Figura 21: Módulo de distancia frente a *redshift* para el conjunto *union*, con $\alpha = 1$, $\Omega_M = 0,287$ y $M = 10$ (curva roja). Se muestran también los datos observacionales de las 307 supernovas con sus barras de error.

función de la temperatura se ha podido determinar que durante las primeras etapas de la evolución del universo el fluido p -ádico se comporta como materia rígida, y en sus etapas finales como energía oscura.

En la cuarta sección se ha calculado el factor de escala cosmológico, del que también se ha hallado una expresión analítica, y se han derivado dos expresiones asintóticas que dan cuenta de su crecimiento en etapas tempranas ($T \gg M$) y tardías ($T \ll M$) de la evolución del universo. De estos resultados se desprende que el fluido p -ádico es un buen candidato a ser el responsable de la expansión acelerada del universo en su evolución reciente.

La quinta sección consiste en un análisis del momento de los modos de vibración que entran en el horizonte de Hubble de un universo dominado por un fluido p -ádico, por una constante cosmológica, por materia y por radiación. Se comprueba que el momento de los modos de vibración que entran en el horizonte de Hubble de un universo dominado por el fluido p -ádico durante las etapas tardías de su evolución tiene el mismo comportamiento que aquellos que entran en un universo dominado por una constante cosmológica, mientras que los que entran durante las etapas tempranas se comportan como lo harían en un universo dominado por materia o radiación.

En la última sección se analiza el comportamiento del fluido p -ádico como energía oscura formando parte de un universo realista. Para ello se ha ajustado el modelo a los datos observacionales recopilados en dos catálogos de supernovas. Dichos ajustes han restringido los valores que pueden tomar la escala de tensión de la cuerda y la cantidad total de materia contenida en el universo. Estos parámetros son compatibles tanto con las predicciones del modelo cosmológico estándar Λ CDM para valores elevados de la escala de tensión de la cuerda ($M \rightarrow \infty$), como con la reducción de la cantidad de materia oscura necesaria (M más pequeños) e incluso con la ausencia total de materia oscura ($3,08 < M < 3,38$ a 2σ en unidades de la temperatura actual del fluido p -ádico) en un universo en el que el papel de este tipo de materia está re-

presentado por el fluido p -ádico.

Apéndice A: Apéndice: Cálculo de parámetros cosmológicos con Mathematica8

Primero se define el producto de la distancia por luminosidad por el inverso de la constante de Hubble, $d_L H_0 = Hd$, en función del *redshift* z , la densidad de materia y (parámetro a ajustar) y la escala de tensión de la cuerda M (a ajustar).

```
Hd[z_, y_?NumberQ, M_?NumberQ] :=
(1+z)*NIntegrate[1/Sqrt{(1 - y)ro[z, M]
+ y (1 + x)^ 3}, {x, 0, z}]
```

donde se la densidad de energía del fluido p -ádico a primer orden en función del *redshift* y y la escala de tensión de la cuerda p -ádica:

```
ro[z_, M_?NumberQ] = 1 + 4 (1 + z)^ 3
E^ (-M^ 2 / 2) (M^ 2 - 1 - 6 Log[1+z])
```

A continuación se carga el paquete de datos de supernovas, `gold.txt` o `union.txt`.

```
u = Import["gold.txt", "Table"]
```

Se definen tres funciones auxiliares, A , B y $Mmin$, para facilitar el trabajo.

```
A = sum_{i=1}^ {n} (u[[i, 2]] -
5 Log[10, Hd[u[[i, 1]], y, M]]) / (u[[i, 3]])^ 2;
```

```
B = sum_{i=1}^ {n} (1/(u[[i, 3]])^ 2);
```

```
Mmin = A/B;
```

Donde n es el número de supernovas que contiene cada catálogo. A continuación se define el estimador χ^2 en función de todo lo anterior.

```
x2 = sum_{i=1}^ {n} (u[[i, 2]] - 5Log[10,
Hd[u[[i, 1]], y, M]] - Mmin)^ 2 / (u[[i, 3]])^ 2;
```

Para encontrar los valores de Ω_M (y) y M que minimizan la función χ^2 se recurre al comando `FindMinimum`. Se toma un valor inicial para uno de los parámetros, en este caso $M = 5$, y se busca el valor del otro parámetro que hace mínimo χ^2 , en este caso y en el rango comprendido entre 0 (no hay materia) y 1 (toda la energía del universo está en forma de materia).

```
FindMinimum[{x2/. M->5.0, 0.0<=y<=1.0}, {y, 0.0}]
```

El valor obtenido de este modo se introduce como valor inicial de este parámetro, y se busca el otro.

```
FindMinimum[{x2/. y->%, 0.1<=M<=10.0}, {M, 0.1}]
```

Estas dos últimas operaciones se repiten recursivamente hasta alcanzar el par de parámetros (Ω_M, M) que minimiza el estimador χ^2 , y que por lo tanto es el par que proporciona el mejor ajuste del modelo a los datos experimentales. Los contornos a 1σ y 2σ se han obtenido sumando al mínimo de χ^2 2.30 y 4.61 respectivamente [17].

-
- [1] Tirthabir Biswas, Jose A. R. Cembranos and Joseph Kapusta, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 021601 (2010).
- [2] J. J. Atick and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B310**, 291 (1988).
- [3] J. Polchinski, *Commun. Math. Phys.* **104**, 37 (1986).
- [4] B. Sathiapalan and N. Sircar, *JHEP* **0808**, 019 (2008).
- [5] K. R. Dienes and M. Lennek, preprint, arXiv:hep-th/0505233.
- [6] P. G. O. Freund and M. Olson, *Phys. Lett.* **B199**, 186 (1987); P. G. O. Freund and E. Witten, *Phys. Lett.* **B199**, 191 (1987); L. Brekke, P. G. Freund, M. Olson and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B302**, 365 (1998).
- [7] P. H. Frampton and Y. Okada, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 484 (1988); *Phys. Rev. D* **37**, 3077 (1988).
- [8] T. Biswas, J. Cembranos and J. I. Kapusta, in preparation.
- [9] N. Barnaby, T. Biswas and J. M. Cline, *JHEP* **0704**, 056 (2007); J. E. Lidsey, *Phys. Rev. D* **76**, 043511 (2007); N. J. Nunes and D. J. Mulryne, *AIP Conf. Proc.* **1115**, 329 (2009).
- [10] A. Nayeri, R. H. Brandenberger and C. Vafa, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 021302 (2006); T. Biswas, R. Brandenberger, A. Mazumdar and W. Siegel, *JCAP* **0712**, 011 (2007).
- [11] T. Biswas and S. Alexander, *Phys. Rev. D* **80**, 043511 (2009); T. Biswas, preprint, arXiv:0801.1315; B. Greene, D. Kabat and S. Marnerides, preprint, arXiv:0809.1704.
- [12] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2006
- [13] A. G. Riess *et. al.*, *Astrophys. J.* **607**: 665 (2004)
- [14] M. Kowalski *et. al.*, *Astrophys. J.* **686**: 749-778 (2008)
- [15] J. B. Jimenez, R. Lazkoz, A. L. Maroto, *Phys. Rev.* **D80** (2009) 023004.
- [16] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **192** (2011) 18. [arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]].
- [17] N. Nakamura *et al.* *JPG* **37**, 075021 (2010)