

# 1. ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

## REDES SOCIALES

**Conrado Manuel<sup>1</sup> y Juan Tejada<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Dpto. Estadística e Investigación Operativa III  
Universidad Complutense de Madrid

<sup>2</sup> Dpto. Estadística e Investigación Operativa I  
Universidad Complutense de Madrid

¿Qué tienen en común entidades tan aparentemente diferentes como la Web, la difusión del VIH en una colectividad, las citas de los autores científicos, los consejos de administración de las grandes empresas, la corrupción urbanística o el sistema de proteínas de un organismo? Tienen en común, al menos, que todas estas entidades se pueden considerar, desde algún punto de vista, redes sociales, en sentido amplio, y que son, por tanto, susceptibles de ser estudiadas con las herramientas del análisis de redes sociales. En muchos casos, dichas redes participan, además, del concepto de complejidad que recuerda el profesor Sanjuán: "... las leyes que describen el comportamiento de los sistemas complejos son cualitativamente diferentes de las que gobiernan las unidades de que están compuestos."

El esqueleto o armazón de dichos sistemas puede ser visto como una red. Una red es un conjunto de nodos con conexiones entre ellos llamadas arcos (unidireccionales) o aristas (bidireccionales). Como decíamos, tenemos ejemplos de redes en muy diferentes contextos: Internet, las redes neuronales, la red de vasos sanguíneos, la de citas de los artículos científicos, la de las rutas aéreas, la de las alianzas y conexiones entre grupos terroristas y un largo etcétera. El estudio de las redes bajo el enfoque de la Teoría Matemática de Grafos es uno de los pilares de la Matemática Discreta. La elegante solución del Problema de los Puentes de Königsberg que en 1735 obtuviera Euler es, a menudo, considerada como la primera demostración en Teoría de Grafos. Desde entonces esta disciplina se ha desarrollado hasta convertirse en un amplio cuerpo de conocimiento.

En los últimos años el Análisis de Redes se centra en la búsqueda de propiedades específicas del tipo de redes concreto que se esté estudiando, pero también en examinar propiedades que son comunes

a todas ellas. Una visión general de los resultados conseguidos en este terreno puede verse en Newman (2003) [1].

Con un nivel mayor de detalle, podemos distinguir algunos tipos de redes en los que es posible señalar intereses específicos y pasar luego a las propiedades que parecen ser comunes a una amplia variedad de ellas.

### Redes Sociales

Una red social es un conjunto de personas o grupos con una estructura de relaciones o interacciones entre ellos. Desde los años treinta, los sociólogos tienen en cuenta este tipo de estructuras de relaciones para comprender el funcionamiento de la sociedad. En el contexto sociológico los estudios típicos se dirigen a conceptos como la centralidad (qué individuos son más importantes, están mejor conectados con otros y tienen mayor poder o influencia), la conectividad (de qué manera los individuos están conectados con otros dentro de la red), la centralización (distribución de la centralidad) o la cohesividad (tendencia de los individuos a mantenerse unidos persiguiendo sus metas o resistencia de un grupo conexo a romperse).

### Redes de Información

También llamadas a veces Redes de Conocimiento. El más clásico ejemplo es la red de citas entre artículos académicos. Aquí los arcos son dirigidos y la red se conoce como digrafo. Es acíclica pues es imposible citar artículos no escritos. Un tema de obvio interés es la distribución del número de citas. Price (1965) [11] puso de manifiesto que en esta red, tanto el grado de entrada como el de salida de cada nodo sigue una ley de tipo potencial. Otra red de información muy importante hoy en día es la World Wide Web que es la red de páginas Web. Estas páginas contienen información de diferentes tipos y

están unidas por enlaces. No debe ser confundida con Internet que es una red física de ordenadores unidos por fibra óptica u otra forma transmisión de datos. Aunque la World Wide Web es cíclica, a diferencia de la de citas académicas, mantiene distribuciones de tipo potencial para el grado de entrada y de salida. El traslado a este contexto de conceptos y soluciones de la teoría clásica de redes sociales, ha dado lugar a uno de los mayores éxitos tecnológicos y empresariales: Google.

### Redes Tecnológicas

Son redes habitualmente diseñadas para distribuir un recurso: la red eléctrica, la telefónica, la ferroviaria, Internet, la de rutas aéreas. . . Estas redes están extendidas por el mundo entero y las conexiones son una función no suficientemente conocida de la relación entre lo que es tecnológicamente deseable y lo que es geográficamente alcanzable.

### Redes Biológicas

En este campo, encontramos ejemplos de redes de biomoléculas como el de la red de regulación entre genes o el de la red de las interacciones físicas entre las proteínas de un organismo. En esta última, por ejemplo, se vincula su esencialidad a la centralidad en dicha red. Sakata y Yamamori (2007) [13] establecen otra sorprendente relación al mostrar las similitudes topológicas entre redes complejas asociadas al cerebro y las redes sociales de amistad.

A pesar de la variedad de situaciones que pueden modelarse como redes, existen ciertas propiedades que son extensivas a la mayor parte de estas redes. Algunas de ellas son las siguientes:

1. **El efecto pequeño mundo:** Se conoce así el hecho de que la mayor parte de los nodos conectados en las redes están unidos por un pequeño número de intermediarios (que varían de unas parejas de nodos a otras). Como consecuencia, la transmisión de la información es rápida, el número de escalas en viajes aéreos para alcanzar cualquier destino es pequeño, el tiempo que una infección tarda en propagarse por una población, breve, etc.
2. **Transitividad o formación de clusters o bloques:** En la mayoría de las redes se observa que si el vértice A está conectado con el B

y éste con el C, entonces existe una probabilidad alta de que A esté conectado con C. En el lenguaje de las redes sociales: El amigo de tu amigo es verosíblemente tu amigo.

3. **Distribuciones del grado:** Si se considera la distribución del grado de los vértices puede comprobarse empíricamente, que en la mayor parte de los grafos dicha distribución tiene una larga cola derecha de valores que están muy por encima de la media. Sobre los resultados existentes respecto a la distribución del grado y del máximo grado pueden encontrarse múltiples referencias en Newman (2003) [1].
4. **Resistencia de las redes a romperse:** Si se eliminan vértices de una red la longitud de los caminos de conexión entre nodos aumenta pudiendo llegar a crearse diferentes componentes conexas. Diferentes redes varían en su resistencia a esta desconexión. Sin embargo, el estudio de esta resistencia es de vital importancia en algunos contextos, por ejemplo en epidemiología, donde la eliminación de vértices se asocia con la vacunación de individuos contra una enfermedad. La consideración de la eficacia de diferentes estrategias de vacunación puede conducir a ventajas sustanciales para la Salud Pública. Estudios sobre Internet (y la Web) sugieren una alta resistencia a la eliminación aleatoria de nodos pero una gran vulnerabilidad a ataques deliberados a nodos con alto grado.
5. **Diferentes tipos de vértices:** Es frecuente la existencia de diferentes tipos de vértices en una red y las probabilidades de conexión entre ellos depende a menudo de los tipos. Por ejemplo, en una red alimenticia en la que se representa qué especies se alimentan de otras en un ecosistema, inmediatamente se distinguen plantas, herbívoros y carnívoros. Muchos arcos relacionan plantas y herbívoros y, también, herbívoros y carnívoros pero pocos relacionan herbívoros con otros herbívoros y carnívoros con plantas. En Internet se distinguen los nodos correspondientes a los proveedores, los consumidores y los de las ISP que unen a unos con otros. En las redes sociales este tipo de relaciones selectivas se conocen como homofilias.

En el caso de las redes sociales es posible poner el acento sobre determinados temas específicos que se han analizado en el contexto de la Sociología desde principios del siglo pasado y que también han sido aplicados a otros tipos de redes complejas.

El concepto de centralidad busca determinar quién tiene la llave en una red social. Es una noción no claramente definida que suele introducirse a menudo de una manera indirecta. Suele decirse que un individuo tiene alta centralidad en una red si

- Puede comunicar directamente con muchos otros nodos o
- está cerca de muchos otros nodos o
- existen muchos pares de nodos que le necesitan como intermediario en sus comunicaciones o
- se comunica con nodos que son importantes.

Estas ideas se reflejan en algunas medidas de centralidad bien conocidas como:

i) Centralidad por grado (Shaw, 1954 [15]; Nieminen, 1974 [10]). Esta aproximación identifica la centralidad del nodo con su grado, es decir, el número de arcos incidentes en él. Por tanto, el acento se pone en el nivel de relaciones o en la actividad en la comunicación. Cuanta más habilidad para relacionarse o comunicarse más centralidad.

ii) Centralidad por proximidad (Beauchamp, 1965 [2]; Sabidussi, 1966 [12]). Un nodo es más central si está más próximo a los demás nodos que el resto. Esta aproximación considera la suma de las distancias geodésicas de un nodo a los demás como una medida de falta de centralidad. A mayor suma menor centralidad. La centralidad por proximidad representa la independencia, la posibilidad de comunicarse con muchos otros individuos dependiendo del mínimo número de intermediarios.

iii) Centralidad por intermediación (Bavelas, 1948 [1]; Freeman, 1977 [5]). Esta aproximación incide en el control de las relaciones o de la comunicación: se es más central cuanto más se puede intermediar en las relaciones entre los demás. Para definir formalmente esta centralidad se consideran todas las posibles trayectorias entre todos los pares de nodos. La centralidad por intermediación de un

nodo fijo se define como el número de tales trayectorias a las cuales pertenece.

iv) Centralidad de autovector, Bonacich (1972,1987) [3] [4]. En ella está basada el algoritmo PageRank que utiliza Google para ordenar las páginas web. Esta centralidad está basada en la idea de que los nodos importantes están conectados a vecinos importantes. La denominación proviene de que la medida de la importancia de un nodo viene dada por un autovector de la matriz de adyacencia.

Otros aspectos muy importantes en el análisis de redes sociales son el de la cohesividad de la red y la determinación de grupos cohesivos. De nuevo la definición de grupo cohesivo es vaga. Se dice que un grupo es cohesivo:

- En la medida en que sus individuos poseen relaciones dentro del grupo que les mantienen juntos.
- Si es resistente a fuerzas disruptivas.
- Si tiene mucha tendencia a mantenerse unido persiguiendo sus metas.

El concepto de grupo cohesivo ha sido estudiado ampliamente en Sociología en el contexto de los llamados block-models que se definen como particiones de la red de acuerdo con algún criterio específico. Los sociólogos se han centrado también en la llamada equivalencia estructural. Dos nodos son estructuralmente equivalentes si tienen los mismos vecinos, si se relaciona con los mismos individuos. Diferentes medidas han sido propuestas por Harary (1969 [8]; 2001 [13]), Wasserman y Faust (1994) [17]. Se basan en el concepto de conectividad: riesgo de desconectar el grafo eliminando nodos o arcos.

### **Las redes sociales desde el punto de vista de la Teoría de Juegos**

En las últimas décadas se ha desarrollado un interés por dar un enfoque más matematizado al análisis clásico de las redes sociales. Un área de la Teoría de Juegos denominada Juegos Restringidos a Grafos, proporciona la base teórica para ello. El trabajo seminal en este campo es debido a Myerson (1977) [9] que, a partir de un juego  $n$ -personal cooperativo y un grafo que modeliza las relaciones de los jugadores (que se identifican con los nodos de dicho grafo), define el juego restringido al grafo. Si el juego cooperativo representa los intereses que

motivan la cooperación entre los jugadores, el grafo impone las restricciones en la comunicación. En este sentido, la Teoría de Juegos aporta un punto de vista más completo sobre el análisis de redes sociales al considerar no sólo la posición de los agentes en la estructura de la red de relaciones sino el motivo, el interés o el objetivo que persigue dicha red de relación, así como, la forma precisa en la que esas interrelaciones se producen.

Myerson utilizó el valor de Shapley (Shapley, 1954) [14] como una posible solución unipuntual de este juego y lo caracterizó. Hoy es conocido como el valor de Myerson. Slikker y Van den Nouweland (2001) [16] desarrollan en profundidad la teoría de los juegos restringidos a grafos.

El valor de Myerson es utilizado por Gómez et al. (2003) [6] como medida de centralidad en una red social donde se asume que los intereses de los jugadores, como se ha dicho, vienen dados por un juego cooperativo. Esta medida de centralidad tiene propiedades interesantes, desde el punto de vista sociológico, ya que admite una descomposición en dos medidas que pueden interpretarse como de centralidad por proximidad y por intermediación, respectivamente. Así mismo, Gómez et al. [7] utilizan el juego de Myerson para analizar la cohesividad de subgrupos en una red. De nuevo una medida de cohesividad para un subgrupo de jugadores, que tiene propiedades interesantes, viene dada por la proporción de riqueza que sus miembros son capaces de mantener al pasar del juego original al juego restringido .

Finalmente, dos datos sobre la importancia del estudio de las redes desde un punto de vista formal matemático. En primer lugar, la concesión del Premio Nevalinna a Jon Kleinberg el pasado agosto con ocasión de la celebración en Madrid del Congreso Internacional de Matemáticos. En la entrega del premio se destacó su profunda y creativa contribución a la teoría matemática de la información global y, en particular, el desarrollo del algoritmo "hubs and authorities" que ordena las páginas Web (nodos en un grafo dirigido) asignando a cada página un valor de autoridad y un valor de punto de interconexión (hub). En segundo lugar, destacamos que en la lista de los 50 'SuperHot Papers' en Ciencia, desde el 2003, que publica ISI, sólo aparece un artículo del área de matemáticas, clasificado en el puesto quince: el ya mencionado trabajo de New-

man (2003) [1] que trata sobre la estructura y función de redes complejas.

## Referencias

- [1] Bavelas, A.,(1948). A mathematical model for small group structures. *Human Organization*, **7**, 16-30.
- [2] Beauchamp, M.A., (1965). An improved index of centrality. *Behavioral Science*, **10**, 161-163.
- [3] Bonacich, P., (1972). Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. *Journal of Mathematical Sociology*, **2**, 113-120.
- [4] Bonacich, P., (1987). Power and centrality: a family of measures. *American Journal of Sociology*, **92**, 1170-1182.
- [5] Freeman, L.C., 1977. A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, **40**, 35-41.
- [6] Gómez, Daniel, Enrique González-Arangüena, Conrado Manuel, Guillermo Owen, Mónica del Pozo, Juan Tejada, 2003. Centrality and power in social networks: A game theoretic approach. *Mathematical Social Sciences*. 46, 27-54.
- [7] Gómez, D., E. González-Arangüena, C. Manuel, G. Owen, M. del Pozo, M. Saboyá. (2007). The Cohesiveness of subgroups in social networks. A view from game theory. *Annals of Operations Research* (en revision).
- [8] Harary, Frank, 1969. *Graph Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- [9] Myerson, R.B., (1977). Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operation Research*, **2**, 225-229.
- [10] Nieminen, J., (1974). On centrality in a graph. *Scandinavian Journal of Psychology*, **15**, 322-336.
- [11] Price, D. J. de S., (1965). Networks of Scientific Papers. *Science*, **149**, 510-515.
- [12] Sabidussi, G., (1966). The centrality index of a graph. *Psychometrika*, **31**, 581-603.

- [13] Sakata, S., Yamamori, T., (2007). Topological relationships between brain and social networks. *Neural Networks*, **20**, 12-21.
- [14] Shapley, L.S., (1953). A value for n-person games. In: Tucker, A.W., Kuhn, H. (Eds.), *Contributions to the Theory of Games II. Annals of Mathematics Studies*, Vol. **28**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 307-317
- [15] Shaw, M.E., (1954). Group structure and the behaviour of individuals in small groups. *Journal of Psychology*, **38**, 139-149.
- [16] Slikker, M., Van den Nouweland, A., (2001). Social and economic networks in cooperative game theory. *Kluwer Academic Publishers*, Norwell, MA.
- [17] Wasserman, S., Faust, K., (1994). *Social Networks Analysis*, Cambridge University Press.