ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Núm. 109, 1985, págs. 83 a 90

Mixturas nítidamente no dominadas

por JUAN TEJADA CAZORLA,
JAVIER MONTERO de JUAN
Departamento de Estadística e I.O.
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense

RESUMEN

Se aborda el problema de la extensión de una relación de preferencia difusa, definida sobre un conjunto nítido de alternativas, al conjunto de distribuciones de probabilidad sobre éstas.

Palabras Clave: Preferencias difusas, Alternativas no Dominadas.

1. INTRODUCCION

Uno de los campos con mayor aplicación de la Teoría de los Conjuntos Difusos es la Teoría de la Decisión, pues en la práctica una gran parte de la información disponible es de naturaleza difusa, es decir, con una ambigüedad conceptual no asimilable a ninguna variabilidad de tipo probabilístico. Siendo esto así, parece natural desarrollar las diferentes técnicas usuales en decisión, basándonos en una información codificada siguiendo algún enfoque difuso.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos el conjunto

$$X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$$

formado por un número finito de alternativas. Sobre este conjunto, el decisor aportará como información básica sus preferencias, que supondremos expresadas según una relación de preferencia difusa. Es decir, un subconjunto difuso del producto cartesiano X × X con una función de pertenencia

$$\mu : X \times X \longrightarrow [0,1]$$

de modo que

$$\mu\,(x_i, x_j) = \mu_{ij}$$

refleja el grado de verificación de la preferencia no estricta de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j (Zadeh, [4]), aceptando por hipótesis que

$$\mu\,(x_i, x_i) = 1 \qquad \forall\ i$$

Asociada a cada relación de preferencia no estricta, Orlovsky [1] define una relación de preferencia estricta sobre el mismo conjunto de alternativas, con función de pertenencia

$$\mu^s\,(x_i, x_j) = \max\,(\mu\,(x_i, x_j) - \mu\,(x_j, x_i), 0) \qquad \forall\ i,j$$

que permite definir el conjunto difuso de alternativas no dominadas como un subconjunto en X con función de pertenencia

$$\mu^{ND}\,(x_i) = \inf_j\,[1 - \mu^s\,(x_j, x_i)\,] =$$

$$= 1 - \sup_j \mu^s\,(x_j, x_i)$$

y $\mu^{ND}\,(x_i)$ reflejará el grado en que la alternativa x_i no está dominada por ninguna otra alternativa considerada.

El objetivo será entonces encontrar las alternativas con máximo grado de no dominación. En concreto, nos interesará el llamado "conjunto difuso de alternativas nítidamente dominadas":

$$X_\mu^{UND} = \{\, x \in X \,/\, \mu^{ND}\,(x) = 1 \,\} =$$

$$= \{\, x \in X \,/\, \mu\,(x,y) \geq \mu\,(y,x) \quad \forall\ y \in X \,\}$$

Desde luego, si este conjunto fuese no vacío, la elección entre las alternativas debe restringirse a él. Pero si este conjunto es vacío, parece natural aceptar la aleatorización como una posible salida ante las dificultades que plantee el problema de decisión (X,μ), de manera análoga a lo que ocurre en la Teoría de la Decisión clásica.

3. EXTENSION MAX-MIN

Consideremos ahora el conjunto de distribuciones de probabilidad en X:

$$\hat{X} = \{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)' \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \; \lambda_i \geq 0 \quad \forall\, i \}$$

Basándose en el Principio de Extensión (Zadeh, [5]), Orlovsky [2] propone una extensión de toda relación de preferencia sobre X a una relación de preferencia sobre los subconjuntos difusos X. Así, si

$$\tilde{X} = \{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)' \in \mathbb{R}^n, \; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \forall\, i \}$$

se define

$$\mu_o : \tilde{X} \times \tilde{X} \longrightarrow [0,1]$$

$$\mu_o (\lambda,\gamma) = \max_{i,j} \; \min (\lambda_i, \gamma_j, \mu_{ij})$$

de modo que μ_o (λ, γ) representaría el grado de verificación de la preferencia de la alternativa difusa λ sobre γ.

Por analogía podemos proponer la "extensión max-min" de una relación de preferencia difusa μ a loterías:

$$\mu_o : \hat{X} \times \hat{X} \longrightarrow [0,1]$$

$$\mu_o (\lambda,\gamma) = \max_{i,j} \; \min (\lambda_i, \gamma_j, \mu_{ij})$$

que desde luego extenderá a μ. Además, podemos entonces analizar la relación existente entre el conjunto

$$X_{\mu}^{\mathrm{UND}}$$

de alternativas no dominadas en el problema de decisión (X, μ), y el conjunto

$$\hat{X}_{\mu_o}^{UND}$$

de alternativas no dominadas en el problema (X, μ_o) :

Proposición 1. Sea $\lambda^k \in \hat{X}$ la distribución degenerada en $x_k \in X$. Entonces

a) $\mu_o(\lambda^i, \lambda^j) = \mu_{ij}$

b) $x_k \in X_{\mu}^{UND} \Longrightarrow \lambda^k \in \hat{X}_{\mu_o}^{UND}$

Demostración: la parte a) es trivial, pues en este caso $\lambda_i^i = \lambda_j^j = 1$ con ceros en el resto. Para comprobar b), observamos por una parte que

$$x_k \in X_{\mu}^{UND} \Longleftrightarrow \mu_{kj} \geq \mu_{jk} \qquad \forall j$$

y por otra parte, como

$$\lambda_k^k = 1$$

$$\lambda_i^k = 0 \qquad \forall i \neq k$$

entonces

$$\begin{aligned} \mu_o(\lambda^k, \lambda) &= \max_{i,j} \min(\lambda_i^k, \lambda_j, \mu_{ij}) = \\ &= \max_{j} \min(\lambda_j, \mu_{kj}) \geq \\ &\geq \max_{j} \min(\lambda_j, \mu_{jk}) = \\ &= \max_{i,j} \min(\lambda_j, \lambda_i^k, \mu_{ji}) = \\ &= \mu_o(\lambda, \lambda^k) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\lambda^k \in \hat{X}_{\mu_o}^{UND}$$

Pero en esta extensión max-min subyace una clara confusión entre probabilidad y difusidad. Además, observamos que independientemente de la relación de preferencia inicial, la distribución uniforme siempre es una mixtura no dominada:

Proposición 2. $\lambda^* = (1/n, \dots, 1/n) \in \hat{X}^{UND}_{\mu_o} \quad \forall \mu$

Demostración: por ser $\mu_{ii} = 1$ para todo i (será suficiente la existencia de algún $\mu_{ij} \geq 1/n$), entonces para cualquier distribución γ se verifica

$$1/n \geq \max_{i,j} \min (1/n, \gamma_j, \mu_{ij})$$

$$\geq \max_{j} \min (1/n, \gamma_j) = 1/n$$

pues

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j = 1$$

luego

$$\mu_o (\lambda^* , \gamma) = \mu_o (\gamma , \lambda^*) = 1/n \quad \forall \gamma \in \hat{X}$$

4. EXTENSION LINEAL

Alternativamente, podemos proponer la extensión lineal

$$(\hat{X} , \mu_L)$$

donde

$$\mu_L : \hat{X} \times \hat{X} \longrightarrow [0,1]$$

está definida como

$$\mu_L (\lambda , \gamma) = \lambda'.R.\gamma \qquad \forall \lambda , \gamma$$

siendo

$$R = (\mu_{ij})_{i,j}$$

la matriz de la preferencia difusa dada.

Es claro que en este caso

$$\begin{aligned} \mu_L^s (\lambda , \gamma) &= \max (\mu_L (\lambda , \gamma) - \mu_L (\gamma , \lambda), 0) = \\ &= max (\lambda' . R . \gamma - \gamma' . R . \lambda, 0) = \\ &= \max (\lambda' . R . \gamma - \lambda' . R' . \gamma, 0) = \\ &= \max (\lambda' . (R-R') . \gamma , 0) \end{aligned}$$

y es de comprobación trivial la siguiente:

Proposición 3. Sea $\lambda^k \in \hat{X}$ la distribución degenerada en $x_k \in X$. Entonces

a) $\mu_L(\lambda^i, \lambda^j) = \mu_{ij}$

b) $x_i \in X_\mu^{UND} \Longleftrightarrow \lambda^i \in \hat{X}_{\mu_L}^{UND}$

Teorema 1. El conjunto

$$\hat{X}_{\mu_L}^{UND} = \{ \lambda \in \hat{X} \,/\, \mu_L(\lambda, \gamma) \geq \mu_L(\gamma, \lambda) \qquad \forall \gamma \in \hat{X} \}$$

es compacto, convexo y no vacio.

Demostración: lo haremos aplicando el Teorema Fundamental para Juegos Matriciales (ver Owen [3], por ejemplo), por el que sabemos que la extensión mixta de todo juego matricial presenta para ambos jugadores conjuntos de estrategias óptimas no vacios. Es decir: dada una matriz de pagos

$$M \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$$

y los simplex

$$S_{m_1} \subset \mathbb{R}^{m_1} \quad , \quad S_{m_2} \subset \mathbb{R}^{m_2}$$

correspondientes a los conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores J_1 y J_2, respectivamente, entonces el juego

$$G = (S_{m_1}, S_{m_2}, M)$$

está definido de modo que cuando J_1 y J_2 escogen sendas estrategias

$$\lambda \in S_{m_1} \quad , \quad \gamma \in S_{m_2}$$

sus pagos esperados son $\lambda'.M.\gamma$ y $-\lambda'.M.\gamma$, respectivamente. Y entonces los conjuntos de estrategias óptimas son

$$0\,(J_i, G) \neq \emptyset \qquad i = 1,2$$

con ambos convexos y compactos.

Además, si el juego matricial es simétrico ($m_1=m_2=m$ y M=–M′) entonces ambos conjuntos de estrategias óptimas coinciden de modo que

$$0\,(J_i,G) = \{\, \lambda \in S_m \;/\; \lambda'.M.\gamma \geq 0 \qquad \forall\, \gamma \in S_m \,\} \qquad i = 1,2$$

Por tanto, para demostrar el teorema será suficiente comprobar que

$$G = (\hat{X},\ \hat{X},\ R-R')$$

es un juego matricial simétrico, pues entonces tendríamos

$$0\,(J_i,\ G) = \{\, \lambda \in \hat{X} \;/\; \lambda'.(R-R').\gamma \geq 0 \qquad \forall\, \gamma \in \hat{X} \,\}$$
$$= \{\, \lambda \in \hat{X} \;/\; \lambda'.R.\gamma \geq \gamma'.R.\lambda \qquad \forall\, \gamma \in \hat{X} \,\} = \hat{X}^{UND}_{\mu_L}$$

que sería convexo y compacto, además de no vacío.

En efecto: por una parte,

$$S_{m_1} = S_{m_2} = S_n = \hat{X}$$

y por otra, trivialmente por la definición de matriz transpuesta,

$$R - R' = -(R-R')'$$

Los métodos usuales de resolución de juegos matriciales (submatrices, programación lineal) pueden ser aplicados, por tanto, para calcular de forma explícita el conjunto de loterías no dominadas.

Ejemplo

Sea $X = \{\, x_1,\ x_2,\ x_3 \,\}$ y

$$R = (\mu_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar que entonces

$$X^{UND}_{\mu} = \emptyset$$

y sin embargo, como

$$R-R' = \begin{pmatrix} 0 & -0.7 & 0.2 \\ 0.7 & 0 & -0.5 \\ -0.2 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

la solución del juego

$$G = (\hat{X}, \hat{X}, R-R')$$

nos proporciona

$$\hat{X}_{\mu_L}^{UND} = \{ (5/14, 2/14, 7/14) \}$$

Es importante observar que mediante la aleatorización se ha resuelto una vaguedad de tipo difuso. Sería interesante, pues, desarrollar otras extensiones que respondan a axiomática previamente fijadas por el decisor.

REFERENCIAS

[1] ORLOVSKY, S.A.: *"Decision-Making with a Fuzzy Preference Relation"* Fuzzy Sets 1, 1978, 155–167.

[2] ORLOVSKY, S.A.: *"On formalization of a General Fuzzy Mathematical Problem"* Fuzzy Sets 3, 1980, 311–321.

[3] OWEN, G.: *"Game Theory"*. Academic Press. 1982.

[4] ZADEH, L.A.: *"Similarity Relations and Fuzzy Orderings"* Information Sciences 3, 1971, 177–200.

[5] ZADEH, L.A.: *"The Concept of a Linguistic Variable and its Applications to Approximate Reasoning"* Information Sciences 8, 1975, 199–249, 301–357; 9, 1975, 43–80.

SUMMARY

"UNFUZZY NONDOMINATED MIXTURES"

In this paper we study the problem of how to extend a fuzzy preference relation, defined over an unfuzzy set of alternatives, to a fuzzy preference relation defined over the set of probability distributions.

Key words: Fuzzy Preferences, Undominated Alternatives.

AMS 1980. Subject classification: 62C99.