

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico II



**ESTIMACIÓN DE MODELOS ECONÓMÉTRICOS
DINÁMICOS LINEALES EN TIEMPO CONTINUO CON
OBSERVACIONES DISCRETAS Y MEDIDAS CON ERROR**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Luis Enrique Nuño Sevilla

Bajo la dirección del doctor

Francisco Álvarez González

Madrid, 2012

© Luis Enrique Nuño Sevilla, 2004

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
D.T.O. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS ECONÓMICO II**



**ESTIMACIÓN DE MODELOS ECONOMETRICOS DINÁMICOS LINEALES EN
TIEMPO CONTINUO CON OBSERVACIONES DISCRETAS Y MEDIDAS CON
ERROR.**

TESIS DOCTORAL

**Luis Enrique Nuño Sevilla.
Director: Francisco Álvarez González**

2004

Dedicada a la memoria de papá, a mamá y a Mario.

Agradecimientos

Muchas personas me han ayudado de diversos modos a elaborar esta memoria de tesis. A todas deseo agradecerles su estímulo y espero que, si leen estas líneas, se reconozcan entre ellas.

Dicho sea de paso, me divierte pensar que, en algunos casos, incluso sea preferible evitar una mención expresa.

Quiero, sin embargo, darle las gracias a mi director, Francisco Álvarez, por invertir en mí su enorme sentido común y su amistad.

También deseo reconocerle a Mercedes Gracia el trabajo que se tomó en revisar y corregir meticulosamente esta versión de la memoria de tesis. Y sobre todo, quisiera agradecerle su increíble y resuelta simpatía por las causas perdidas.

Me gustaría, además, destacar lo mucho que aprecio la atención incondicional que siempre me prestó Arthur Treadway y deseo expresarle mi admiración y afecto.

Mis amigos Juan Garrido y Ricardo Martín fueron (y son) enormemente pacientes conmigo y me orientaron en diversos problemas relacionados con este trabajo. Además, tuvieron la audacia de invitarme a sus bodas y a sus cenas y fueron testigos de hechos muy valiosos de mi vida.

Por último, como "je est un autre", quizá me disculpe el lector que me agradezca a mí mismo esta travesía y, más en particular, algunas pruebas de lo poderosa que resulta la voluntad frente al encono. Ojalá sea una lección duradera.

Estimación de modelos econométricos dinámicos
lineales en tiempo continuo con observaciones
discretas y medidas con error.

Luis Enrique Nuño Sevilla

Diciembre de 2003

Índice

1	Introducción	5
1.1	Enunciado del problema	6
1.2	Relevancia del problema en economía	7
1.3	Revisión de la literatura	9
1.4	Forma intuitiva de abordar el problema estudiado	12
1.5	Ejemplos empíricos	13
2	Formulación del problema de estimación	17
2.1	El problema de estimación	17
2.2	Una extensión: un modelo lineal de Volatilidad Estocástica (M.V.E.).	19
3	El problema de estimación en espacio de estados.	21
3.1	La forma reducida en el espacio de los estados.	22
3.2	El M.V.E. en el espacio de los estados.	23
3.3	Algunas observaciones adicionales.	25
3.4	Estimación en el espacio de los estados	29
3.5	Evaluación de la función de verosimilitud gaussiana.	30
4	Aplicación: estimación del M.V.E..	35
4.1	El M.V.E..	36
4.1.1	Forma en el espacio de los estados del M.V.E..	39
4.2	Un modelo <i>benchmark</i> del M.V.E..	42
4.2.1	Forma en el espacio de los estados del modelo benchmark del M.V.E..	43
4.3	Factorización de Cholesky de las covarianzas de los ruidos.	43
4.4	Resultados empíricos de la estimación del M.V.E..	44
4.4.1	Primer ejemplo: estimación del M.V.E. para el S&P 500 Automobiles Industrial Index.	45

4.4.2	Segundo ejemplo: estimación del M.V.E. para el tipo de cambio marco/dólar.	47
4.5	Estudios Monte Carlo de los dos M.V.E. estimados empíricamente.	48
5	Conclusiones y líneas futuras de investigación	51
6	Apéndices	55
6.1	Apéndice A. El filtro de Kalman.	55
6.2	Apéndice B. Cálculo del gradiente.	58
6.3	Apéndice C. Cálculo del hessiano.	63
6.4	Apéndice D. Cálculo de la matriz de información	64
6.5	Apéndice E. Estimaciones y Tablas.	68
6.6	Apéndice F. Gráficos de las estimaciones de las series empíricas.	82

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo contiene un resumen general de la tesis. La estructura del capítulo es la siguiente. La sección 1 presenta el problema principal que se aborda. Las secciones 2 y 3 motivan el estudio de dicho problema y comentan la bibliografía, respectivamente. La sección 4 presenta de manera intuitiva la forma que se propone de solucionarlo. La sección 5, recoge un breve resumen de la aplicación del método de solución propuesto a dos modelos distintos. Respecto del primer modelo, se presentan los resultados de su estimación con series artificiales generadas con parámetros, frecuencias de observación y horizontes temporales diversos que se imponen, y se comparan con los resultados de estimación para un modelo *benchmark* aproximado. Respecto al segundo modelo, se revisan los resultados de su estimación con dos series de datos reales y se resumen algunos resultados de su estimación con series artificiales generadas a través de parámetros iguales a los estimados, para cada una de las series, y frecuencias medias de observación y horizontes temporales diversos, que después se comparan también con los resultados de la estimación para un modelo *benchmark* aproximado.

Esta memoria de tesis consta, además de esta introducción, de los capítulos y apéndices siguientes.

El capítulo 2 presenta el problema principal de estimación que se investiga. El capítulo 3 expone la formulación general de los modelos considerados y el método de estimación general que se aplica, dada una muestra de observaciones e intervalos de muestreo. También se expone formalmente cómo estos métodos de estimación se basan en la construcción de una función de verosimilitud gaussiana de un modelo en el espacio de los estados. En el capítulo 4 se presenta una aplicación al caso de un modelo de volatilidad es-

toestocástica. El capítulo 5 contiene las conclusiones y las líneas de investigación futuras que sugiere este trabajo.

En los apéndices A-D figura el desarrollo en detalle algunos resultados matemáticos que se emplean en los capítulos 3 y 4. En el apéndice E se presentan los resultados de la estimación del modelo de volatilidad estocástica que se estudia en el capítulo 4 con dos series de datos reales diarios. En la Tabla 1 del apéndice E se registran los resultados de estimación del modelo de volatilidad estocástica para los datos de un índice de bolsa de la industria automovilística norteamericana. Además, se muestran las tablas de los estadísticos descriptivos de la serie de las tasas de variación logarítmicas de la serie original, Tabla 2, y los estadísticos descriptivos de las innovaciones estimadas y las innovaciones estandarizadas estimadas para el modelo de volatilidad estocástica considerado, Tablas 3 y 4, respectivamente. A su vez, se registran los resultados de estimación del modelo de volatilidad estocástica para ciertos datos del tipo de cambio marco/dólar, Tabla 5, las tasas de variación logarítmicas de la serie original, Tabla 6, y las innovaciones estimadas y las innovaciones estandarizadas estimadas en las Tablas 7 y 8, respectivamente. También en el apéndice E se presentan los resultados de diversos experimentos de estimación Monte Carlo para dos ejemplos de modelos dinámicos en tiempo continuo lineales y se comparan con los resultados correspondientes de sus aproximaciones según el esquema de Euler. En el primer Monte Carlo, Tabla 9, se estudia un modelo Orstein-Uhlenbeck y su *benchmark* aproximado, para distintas frecuencias medias y horizontes temporales. En el segundo, Tablas 10, 11 y 12, se presentan los resultados de la estimación del modelo de volatilidad estocástica y su *benchmark* aproximado, con distintas frecuencias de observación y horizontes temporales, para cada uno de los dos modelos parametrizados con los resultados de estimación de las series empíricas. En el apéndice F se incluye información gráfica útil en la diagnosis del modelo para cada una de las series empíricas.

1.1 Enunciado del problema

El problema considerado en esta tesis es la estimación de los parámetros de modelos econométricos dinámicos lineales gaussianos formulados en tiempo continuo cuando las observaciones son discretas y se recogen a intervalos irregulares de tiempo. Además, se permite la posibilidad de que las observaciones difieran de las variables cuya dinámica se representa en el modelo.

Como caso particular del problema anterior y sus aplicaciones, cabe citar

algunas cuestiones ampliamente estudiadas en la economía financiera, como la estimación de los modelos de volatilidad estocástica y el cálculo de precios de activos financieros a partir de los parámetros estimados de algún proceso estocástico subyacente.

1.2 Relevancia del problema en economía

La relevancia del problema planteado depende de cómo justificar la especificación de modelos econométricos en tiempo continuo cuando, generalmente, conduce a problemas de estimación más complejos que una formulación econométrica alternativa en tiempo discreto, casi siempre limitada a una frecuencia de observación constante. En la literatura se han propuesto principalmente dos motivos, que se enumeran a continuación y se comentan con mas detalle en el resto de la sección.

En primer lugar, puede haber motivos estadísticos que hagan preferible estimar un modelo en tiempo continuo cuando, con la información disponible, se quiere caracterizar la dinámica de ciertas variables. En segundo lugar, ciertas técnicas de valoración de opciones financieras requieren la formulación de modelos en tiempo continuo.

Respecto al primero de los motivos anteriores, se puede argumentar por razones teóricas que el proceso generador de una muestra de observaciones discretas es, por construcción, continuo (vid. Bergström [1984] y Harvey [1989]). Por supuesto, esta hipótesis puede ser una forma sencilla de modelar que la frecuencia de observación de los datos es mucho más pequeña que la frecuencia con la que evoluciona el proceso de interés. En este caso, como la especificación de un modelo econométrico en tiempo continuo permite procesar muestras de observaciones recogidas a intervalos irregulares de tiempo cualesquiera (vid. Harvey [1989]), puede que resulten ganancias significativas en términos de consistencia y/o eficiencia en la estimación de los parámetros (sobre todo de los asociados a captar el comportamiento de las variables en las frecuencias mayores) si se aprovecha toda la muestra disponible.

Este argumento está implícito, por ejemplo, en la posible ganancia en términos de consistencia y/o eficiencia, de usar frecuencias mayores de observación, cuando se trata de valorar una opción sobre el precio máximo de un activo, durante cierto período de tiempo, a través de técnicas de simulación de Monte Carlo (vid Campbell [1997]).

Respecto al segundo de los motivos enumerados, la especificación de modelos en tiempo continuo es útil en la derivación de fórmulas de valoración de activos financieros que no serían posibles si la especificación original del modelo fuera discreta (vid. Merton [1992], Sundaresan [2000], Kellerhals [2001]). Sin embargo, se plantea el problema de que muchos de los modelos en tiempo continuo propuestos son no lineales en las variables. Entonces, puede haber cierta transformación de las variables que permita construir un modelo equivalente lineal, o por el contrario, puede no haberla. En este último caso, no se conoce la dinámica exacta del modelo de modo que se manejan aproximaciones.

Además de las fórmulas paramétricas para la valoración de activos financieros, cuando éstas no se conocen o se prefiere un procedimiento alternativo más simple, aunque quizá más costoso computacionalmente, a menudo se recurre a la simulación de Monte Carlo (vid. Campbell [1997]). En este sentido, como he mencionado, una formulación en tiempo continuo puede ofrecer ventajas frente a un modelo en tiempo discreto limitado a intervalos de registro múltiples de un intervalo de referencia.

Con independencia de los dos motivos anteriores, a veces la muestra que se procesa hace posible optar entre un modelo econométrico formulado en tiempo continuo y otro especificado en tiempo discreto con intervalos regulares de tiempo. Entonces, en general no es cierto que siempre exista un modelo en tiempo continuo que represente la misma dinámica que una forma reducida en tiempo discreto. Además, la elección entre los primeros y los segundos ha dependido de la simplicidad de la formulación y de la tradición en la literatura y la práctica empírica.

Como ejemplo de esto último, en la literatura financiera ha sido común hasta fechas recientes que el trabajo econométrico empírico usara modelos discretos, mientras que las fórmulas teóricas de valoración de activos partían de modelos en tiempo continuo. Así, la fórmula de valoración de un activo de Schöbel & Zhu [1998] se deriva de un modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo del precio que generaliza el movimiento geométrico browniano de Black y Scholes e incorpora la observación empírica de que los rendimientos presentan una elevada autocorrelación condicional. Sin embargo, en general, no hay una contrapartida en tiempo continuo para cualquier modelo GARCH.

Finalmente en esta sección, se hace referencia a algunos campos dentro de la economía en los que se han propuesto modelos dinámicos en tiempo

continuo lineales. Cabe citar en primer lugar, los modelos de agregación temporal de variables macroeconómicas flujos en tiempo continuo (vid. Harvey [1989]). En segundo lugar, los modelos en tiempo continuo de precios de activos financieros (vid. Campbell [1997], Merton [1992], Sundaresan [2000], Kellerhals [2001]) y los modelos dinámicos en tiempo continuo no lineales para los que existe un modelo dinámico en tiempo continuo lineal de una transformación conocida de las variables, como por ejemplo el movimiento geométrico browniano que define el movimiento del precio de un activo en el modelo de Black-Scholes (vid. Black, F. and M. Scholes, [1973]). En tercer lugar, también se han utilizado modelos de este tipo en la literatura de juegos dinámicos (vid. Chen B. y P. A. Zdrozny [2002]).

1.3 Revisión de la literatura

En los últimos años ha crecido el interés en la estimación de modelos en tiempo continuo a partir de observaciones discretas mediante métodos de filtrado.

Harvey [1989] y Terceiro [1990] presentan métodos de filtrado para modelos estructurales en tiempo discreto y continuo y tiempo discreto, respectivamente. En la literatura de ingeniería financiera, Harvey et al. [1994] aplican dichos métodos a la estimación de modelos de volatilidad estocástica en tiempo discreto. El problema del filtrado de la volatilidad de los precios de activos en los modelos ARCH se aborda en, por ejemplo, Nelson [1992] y [1996], y la estimación de la volatilidad a partir de un modelo estructural lineal se discute en Timmer y Weigend [1997] a través de un filtro de Kalman ordinario.

El problema abordado en esta tesis, puede considerarse como un caso particular de la estimación de los parámetros de modelos no lineales en tiempo continuo con observaciones discretas, que se trata, por ejemplo en Jazwinsky [1970], Nielsen y Vestergaard [2000] y Kellerhals [2001]. En la práctica, la propuesta de estimación que se hace en esta tesis, presenta ganancias en términos de eficiencia respecto al tratamiento que se hace en las referencias anteriores. Esta ganancia se debe a la mayor simplicidad inherente a los modelos lineales.

Cabe citar como ejemplos de modelos financieros dinámicos lineales en tiempo continuo a Vacicek [1977], Beaglehole y Tenney [1991] y Kellerhals

[2001]. Vacicek [1977] describe la estructura temporal de los tipos de interés y sus volatilidades mediante un proceso de Orstein-Uhlenbeck del tipo de interés *spot* y Kellerhals [2001] presenta una versión más general. Beaglehole y Tenney [1991] usan una representación con dos procesos correlacionados de Orstein-Uhlenbeck para la evolución del tipo de interés a corto plazo de forma que éste revierte a una deriva que, a su vez, oscila alrededor de una media constante. Por último, Kellerhals [2001] construye un modelo de valoración de una acción perteneciente a un *closed-end fund*, a través de las dinámicas de un movimiento geométrico browniano para el valor neto por acción y un proceso de Orstein-Uhlenbeck que modela la evolución del premio de la acción.

Un número considerable de los modelos financieros dinámicos en tiempo continuo modelan la volatilidad del precio de un activo mediante un proceso estocástico adicional para uno de los parámetros de la varianza instantánea. Además, en las especificaciones típicas de los modelos paramétricos, el proceso elegido para representar la volatilidad preserva el signo positivo, lo que conduce típicamente a modelos no lineales de la dinámica del precio del activo.

En esta tesis, por el contrario, se modela la rentabilidad del precio del activo. Por lo tanto, se representa la volatilidad estocástica de las rentabilidades y no del precio, de manera que se permite que haya una probabilidad positiva de que el parámetro -instantáneamente variante- que regula la heterocedasticidad condicional adopte valores negativos, puesto que su dinámica viene dada por un proceso lineal gaussiano. No obstante, la varianza de las rentabilidades, es por construcción, no negativa.

La razón para haber escogido esta forma de modelar la volatilidad estocástica consiste en la mayor simplicidad de una representación lineal, en la medida en que se conoce exactamente la función de la heterocedasticidad condicional de las rentabilidades entre observaciones, lo que típicamente no ocurre en los modelos no lineales.

Dentro de los modelos dinámicos en tiempo continuo no lineales en las variables, se han propuesto además diferentes métodos de estimación para el caso en el que las variables de estado -aquellas cuya dinámica se representa en el modelo- son no observables, como sucede en los modelos de volatilidad estocástica .

La dificultad principal de la estimación de los modelos de volatilidad estocástica no lineales reside en que las funciones de densidad de transición,

y por lo tanto la función de verosimilitud, en general, no pueden expresarse con una fórmula cerrada.

En cuanto a los métodos de estimación aplicados a los modelos de volatilidad estocástica no lineales, en el caso de los modelos univariantes, Aït-Sahalia [1996] propuso un método donde la ecuación de Kolmogorov *forward* se usa para derivar un estimador semi-no paramétrico de la difusión, suponiendo que se conoce la función de la deriva. Pristker [1998] explora las propiedades para muestras pequeñas de estos estimadores. Stanton [1997] usa básicamente el mismo método para derivar una estimación semi-no paramétrica en tiempo discreto de las funciones de la difusión y de la deriva. Chapman y Pearson [2000] concluye que estos *kernel based* métodos pueden dar lugar a la estimación de no linealidades espúreas. Además, estos métodos tienen la limitación de que resulta difícil extenderlos para estimar procesos de difusión multivariantes, y en particular, los procesos con variables no observadas. Parte de la literatura ha extendido la aproximación de Pedersen [1995] que plantea la estimación como un problema de valores *missing*, mediante métodos de Monte Carlo de cadenas de Markov. Por ejemplo, Elerian et. al. [1998], Eraker [1998] y Jones [1998].

Otra rama de la literatura que estudia la estimación de modelos de volatilidad estocástica no lineales utiliza métodos basados en la simulación y en el *matching* de los momentos muestrales. El método de los momentos simulado de Duffie y Singleton [1993] obtiene condiciones para los momentos identificando los momentos muestrales con los momentos simulados del modelo que se propone. La idea fundamental del método de inferencia indirecto de Gourieroux et al. [1993] consiste en identificar los momentos de un modelo en tiempo discreto auxiliar identificado y estimado con los datos reales con los momentos de una versión discretizada del modelo en tiempo continuo propuesto. Esta es la aproximación que se sigue en Engle y Lee [1999] para un modelo de volatilidad estocástica. El método eficiente de los momentos supone un refinamiento del anterior. Este método se ha aplicado en la estimación de modelos de volatilidad estocástica en Gallant et al. [1997] y Gallant et al. [1998]. Sin embargo, la deficiencia del método EMM consiste en que se necesita tanto un modelo auxiliar que capte todas las propiedades de los datos y una relación uno a uno entre los parámetros de ambos modelos.

1.4 Forma intuitiva de abordar el problema estudiado

En el Capítulo 3 se muestra como los modelos finalmente estimados, a partir de las especificaciones en tiempo continuo, son modelos en tiempo discreto, exactos o no, cuyos parámetros son funciones de los diferentes intervalos temporales entre las observaciones, y por lo tanto, no limitados a una frecuencia de observación esencialmente constante. Entonces, si todos los intervalos temporales son múltiplos enteros de un intervalo de referencia (por ejemplo, un día), el modelo discreto correspondiente a un modelo en tiempo continuo, no registra observaciones "missing" intermedias entre las observaciones que están separadas en más del intervalo de referencia (por ejemplo, tres días).

Por otra parte, se formaliza la evolución dinámica de las variables del modelo econométrico, sean observables o no, como un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas lineales de las mismas variables, que depende de un vector de variables exógenas instantáneas (de dimensión menor) además de ciertos ruidos instantáneos representados como las variaciones de un movimiento browniano (también de dimensión menor), y por lo tanto, gaussianos. La linealidad del modelo (en contraste, en general, con los modelos no lineales) hace posible determinar analíticamente la expresión del sistema en cada uno de los instantes discretos de observación, como función del valor descontado continuamente de las variables del sistema en el instante de observación anterior, más la suma de los valores descontados continuamente de los ruidos y las variables exógenas instantáneas. Pero la posible distinción entre variables observables y no observables, exige definir explícitamente una observación como cierta suma de todas las variables de las que se describe la dinámica instantánea más, quizá ciertas variables exógenas y ruidos discretos adicionales.

En este sentido, como ya se ha mencionado, el modelo econométrico que debe estimarse es un modelo en tiempo discreto, descrito por una ecuación en diferencias de primer orden de ciertas variables, solución exacta de la ecuación diferencial estocástica entre dos instantes discretos de observación consecutivos, más una ecuación de observación lineal en las variables de la dinámica en el instante de observación contemporáneo. La diferencia explícita que se establece entre las observaciones y las variables de la dinámica sugiere escribir el modelo en forma de espacio de los estados, con el objeto de proponer un método de estimación de los parámetros del sistema.

Por ejemplo, en la variante del modelo de Schöbel y Zhu [1998] que se estudia en esta tesis, se modela la evolución instantánea de una variable no observable que afecta a la heterocedasticidad condicional de las observaciones. Una vez estimado el modelo, se puede reconstruir la secuencia estimada de esta variable no observable.

También se amplía el modelo de volatilidad estocástica anterior formulando uno de los parámetros que caracteriza la media incondicional de las observaciones como un proceso no observable adicional. Más aún, es importante observar que en la práctica, muchos de los modelos en tiempo continuo presentan como variables no observables con dinámica propia, algunos parámetros, es decir, suponen una especie de modelos de parámetros cambiantes. Entonces, la especificación empleada puede tener un interés adicional en la medida en que puede representar ciertas regularidades empíricas -por ejemplo en las series financieras- con diferente intensidad en diferentes instantes de tiempo y/o una mayor coherencia teórica del modelo.

1.5 Ejemplos empíricos

En el Capítulo 4, se presentan dos ejemplos prácticos de estimación, que se describen brevemente a continuación.

El primer ejemplo Monte Carlo de estimación consiste en la estimación de un modelo de Orstein-Uhlenbeck (Tabla 9), según la formulación general de los modelos en el espacio de los estados del Capítulo 3, a partir de series simuladas mediante ciertos valores supuestos de los parámetros. En este modelo se presentan las ganancias en términos de eficiencia y consistencia que resultan de una mayor frecuencia de muestreo y/o la ampliación del horizonte temporal de la muestra finita.

En el segundo (Tablas 10, 11 y 12), abordamos la estimación de una variante del modelo de volatilidad estocástica de Schöbel y Zhu [1998] del precio de un activo, donde la observación es una medida con error de las rentabilidades de los precios, en vez de una medida del precio como es habitual, en instantes de tiempo cualesquiera. Esta representación tiene la ventaja de que se puede calcular exactamente el modelo estadístico que pretende representar los datos, mientras que para la mayoría de los modelos no lineales el modelo exacto es desconocido y en la práctica se trata el problema de estimar una aproximación.

Además, la representación que se propone en este trabajo, en lugar de la de modelos no lineales más complejos (vid. Nielsen y Vestergaard [2000]), puede reportar ventajas adicionales en términos de precisión de la estimación y/o mayor simplicidad computacional del algoritmo matemático de estimación. En particular, puede suceder que una representación no lineal no sea escueta porque caracterizar un proceso que represente la serie observada (una medida del precio de un activo) exija infinitos parámetros, mientras que una transformación de la serie observada anterior (la rentabilidad del activo) admita una representación lineal definida por un conjunto finito de parámetros. También se argumenta que puede ser ventajoso representar la heterocedasticidad condicional mediante una variable que pueda adoptar valores negativos, como se supone en esta tesis siguiendo el ejemplo de Schöbel y Zhu [1998], en la medida en que puede evitar una representación no lineal.

Una vez definido el modelo estadístico y el método de estimación, consideramos la estimación de dos series empíricas de un índice de bolsa S&P 500 norteamericano de la industria del automóvil y del tipo de cambio marco/dólar, respectivamente. La frecuencia de los datos es diaria, las observaciones son al cierre de las sesiones de cotización, y por la construcción del modelo se pueden procesar las muestras completas. Además el horizonte temporal (trece y treinta y tres años, respectivamente) es bastante mayor que en los trabajos habituales (Nielsen y Vestergaard [2000] usan dos muestras de cinco años, e igualan todos los intervalos muestrales a uno). También se reparametriza el parámetro de la correlación instantánea entre los movimientos brownianos de los ruidos del modelo para definir bien el problema de estimación. Nielsen y Vestergaard [2000] y Belledin y Schlag [1999] no mencionan que se siga un procedimiento parecido con el fin de evitar problemas numéricos en el algoritmo de estimación.

Se diseñan experimentos de Monte Carlo para el modelo de volatilidad estocástica y las estimaciones de los parámetros de las dos series, considerando muestras de diferentes horizontes y distintas frecuencias muestrales. Observo que para muestras de un horizonte temporal "lo bastante largo" y con observaciones de una frecuencia "lo bastante grande" las estimaciones de los parámetros están centradas alrededor del verdadero valor. Este resultado puede interpretarse como consecuencia de que, bajo las condiciones anteriores, hay "suficiente" información muestral y de que el procedimiento de estimación "tiende a ser exacto". Por lo tanto, también en este segundo ejemplo, puede interpretarse que hay ganancias en términos de eficiencia y

consistencia de la estimación aparejadas a una mayor frecuencia de muestreo y/o la ampliación del horizonte temporal de la muestra finita, aunque resultan difíciles de discernir del efecto que tiene sobre la estimación el que una aproximación en el algoritmo de estimación es tanto más precisa cuanto mayor es la frecuencia de observación.

Además en Nielsen y Vestergaard [2000] se presentan ejercicios de Monte Carlo con modelos dinámicos en tiempo continuo de volatilidad estocástica no lineales, para la frecuencia "diaria", donde se evitan los valores del parámetro de la correlación instantánea entre los movimientos brownianos asociados al ruido cercanos a menos uno, coherentes con las estimaciones empíricas presentadas, que pueden conducir a problemas numéricos. En particular, el valor absoluto del parámetro de la correlación instantánea entre los ruidos no es necesariamente menor o igual que uno. Por el contrario, en esta tesis, la reparametrización que se formula es equivalente a una factorización de Cholesky, que por construcción garantiza esta propiedad.

Por último, se presentan apéndices donde se construye una estimación de la matriz de información, que no es estándar puesto que se considera el caso de que los estados aparecen en las matrices de covarianzas (en el modelo de volatilidad estocástica que sirve de ejemplo)

En los experimentos de Monte Carlo de estimación de los modelos de espacio de los estados implicados por el modelo de Orstein-Uhlenbeck y el modelo de volatilidad estocástica (variante del modelo de Schöbel y Zhu), comparamos los resultados con las estimaciones de dos modelos "benchmark" correspondientes en espacio de los estados, dados por una aproximación discreta del modelo en tiempo continuo según el esquema de Euler (para otros esquemas vid. Bergström [1984]). El esquema de Euler consiste básicamente en aproximar la evolución de una variable por la "diferencial", y es tanto más correcto, cuanto mayor es la frecuencia de observación. Su interés consiste en que el problema de estimación del modelo aproximado es más simple, porque evita el cálculo de algunas expresiones complicadas que contienen exponenciales de matrices, de forma que puede haber una relación de intercambio entre la eficiencia de la estimación y la simplicidad computacional. En efecto, se documenta en ambos casos la pérdida de eficiencia o la inconsistencia en la que se incurre por usar una aproximación del modelo exacto por el esquema de Euler, si bien, conforme aumenta la frecuencia de observación, los resultados de estimación pueden ser prácticamente idénticos a los asociados al modelo exacto.

Capítulo 2

Formulación del problema de estimación

2.1 El problema de estimación

Supongamos que la ley de evolución instantánea de una variable y_t viene dada mediante la **forma estructural**:

$$dy_t = Ay_t dt + Gu_t dt + \Xi d\varepsilon_t; \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

que es una ecuación diferencial estocástica de primer orden lineal donde y_t es un vector de l variables endógenas, $\{u_t, t \geq t_0\}$ es un proceso de un vector de r variables exógenas, y $\{\varepsilon_t, t \geq t_0\}$ es un movimiento browniano de l variables aleatorias, tales que:

$$E[d\varepsilon_t] = 0, \quad E[d\varepsilon_t d\varepsilon_s'] = (\Sigma_\varepsilon dt) \delta_{ts}$$

donde δ_{ts} es la delta de Dirac:

$$\delta_{ts} = \begin{cases} 0, & t \neq s \\ 1, & t = s \end{cases}$$

La forma estructural puede generalizarse para incluir como variables endógenas las variables exógenas de (1) si éstas siguen un proceso continuo lineal análogo.

18CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE ESTIMACIÓN

Además se supone inicialmente que A , G , Σ y Σ_ϵ son constantes. Sin embargo, en la sección del modelo de volatilidad estocástica estudiado en esta tesis, se muestra una extensión de este modelo donde considero que Σ_ϵ no es una matriz de constantes, sino que hay un subconjunto de variables de dimensión j , inferior a l , incluidas en algunas de las posiciones de Σ_ϵ , que a su vez tienen una dinámica de la forma (1). Entonces, el modelo ampliado, representará la evolución de un total de $j + l$ variables.

Se considera también que el proceso de las variables exógenas pueda ser estacionario, mientras que en Harvey [1989] sólo se permite que sea no estacionario. Esta última generalización puede plantear problemas especiales en el cálculo de algunas matrices de covarianzas del sistema que se estima, como se verá más adelante. Se pueden encontrar diversos modelos que formulan procesos (estacionarios o no) para las variables exógenas en la forma estructural (1) en Lo y Wang, [1994].

Un modelo econométrico completo exige definir las **observaciones**. Se supone que las observaciones vienen dadas por el proceso estocástico $\{z_{t_k}\}$, donde t_k representa el instante de muestreo t de la k -ésima observación, para un total de N observaciones. Si represento como $Y_{t_k}^{t_{k+1}}$ el continuo $\{y_t\}_{t_k}^{t_{k+1}}$ de las variables de (1) en el intervalo $[t_k, t_{k+1}]$, se define la observación genérica z_{t_k} como sigue:

$$z_{t_k} = V(Y_{t_k}^{t_{k+1}}) + T e_{t_k} \quad (2)$$

donde $V(Y_{t_k}^{t_{k+1}})$ es una función lineal de las variables $\{y_t\}_{t_k}^{t_{k+1}}$, T es constante y el proceso gaussiano discreto $\{e_{t_k}\}$, independiente de $\{y_t\}$, es tal que:

$$\begin{aligned} E[e_{t_k}] &= 0 \\ E\left[e_{t_{k_1}} e'_{t_{k_2}}\right] &= \Sigma_\epsilon \delta_{t_{k_1} t_{k_2}} \end{aligned}$$

donde $\delta_{t_{k_1} t_{k_2}}$ es la delta de Dirac.

Nos proponemos estimar los parámetros de la forma estructural (1) contenidos en A , G , Ξ , y Σ_ϵ más los parámetros adicionales de $V(Y_{t_k}^{t_{k+1}})$, T y Σ_ϵ contenidos en (2), dados la muestra $\{z_{t_k}\}$, las variables exógenas observables $\{u_t\}$ y los intervalos de muestreo $\{t_{k+1} - t_k\}$ (conocidos).

En adelante, se representa el conjunto de los parámetros por estimar de A , G , Ξ , Σ_ϵ , $V(Y_{t_k}^{t_{k+1}})$, T y Σ_ϵ por el vector θ .

2.2 Una extensión: un modelo lineal de Volatilidad Estocástica (M.V.E.).

Para mostrar un ejemplo concreto, consideremos una primera variación sobre el modelo de volatilidad estocástica de Schöbel y Zhu [1998], cuya forma estructural puede escribirse:

$$d \begin{bmatrix} \ln(S_t) \\ v_t^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(S_t) \\ v_t^s \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} v_t^s & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_{1t} \\ dW_{2t} \end{bmatrix}$$

donde S_t es el precio del activo S en el instante t , $\{W_{1t}\}$ y $\{W_{2t}\}$ son dos movimientos brownianos correlacionados de forma que $dW_{1t}dW_{2t} = (\rho dt) \delta_{ts}$ y $\{v_t^s\}$ es el proceso de una variable v^s que en cada instante t regula el tamaño del ruido asociado a la rentabilidad instantánea de S_t .

En los capítulos 3 y 4 estudio una extensión inmediata de este modelo.

Entonces, representando por $Y_{t_k}^{t_{k+1}} = \{d \ln(S_t)\}_{t_k}^{t_{k+1}}$, las observaciones se definen:

$$z_{t_k} = \ln(S_{t_{k+1}}/S_{t_k}) = V(Y_{t_k}^{t_{k+1}}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} d \ln(S_t) \quad (2')$$

es decir, el agregado temporal de la variable flujo tasa de variación logarítmica del precio del activo S_t en el tiempo continuo.

Por supuesto, en este caso $\theta = \{k, r, \theta, \sigma, \rho\}$.

20CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE ESTIMACIÓN

Capítulo 3

El problema de estimación en espacio de estados.

Para tratar el problema de estimación con generalidad, definiremos una formulación que comprenda todos los modelos lineales en el tiempo continuo de forma estructural (1) y de observaciones (2). Puede verse que, por la linealidad de $V(Y_{t_k}^{t_{k+1}})$, esta formulación debe permitir modelar procesos de $\{y_t\}$ en (1) para los que no haya observaciones. Éste es el caso, por ejemplo, de $\{v_t^s\}$ en el modelo de volatilidad estocástica anterior. Por lo tanto, la ecuación necesaria para representar la evolución de ciertos procesos, como por ejemplo $\{y_t\}$, debe ser distinta de la ecuación necesaria para representar el proceso (discreto) de las observaciones $\{z_{t_k}\}$.

Entonces, se formula el **modelo en el espacio de los estados**:

$$x_{t_{k+1}} = \Phi_{t_k} x_{t_k} + \Gamma_{t_k} u_{t_k}^s + E_{t_k} w_{t_k} \quad (3)$$

$$z_{t_k} = H_{t_k} x_{t_k} + D_{t_k} u_{t_k}^o + C_{t_k} v_{t_k} \quad (4)$$

donde:

x_{t_k} es el vector de las variables de estado de dimensión n ,
 $u_{t_k}^s$ y $u_{t_k}^o$ son los vectores de las variables exógenas de dimensiones r^s y r^o ,

z_{t_k} es el vector de variables observadas de dimensión m , que en general no coincide con el vector de variables endógenas, y

$\{w_{t_k}\}$ and $\{v_{t_k}\}$ son procesos, de variables con los siguientes primeros momentos centrales:

$$E[w_{t_k}] = 0, \quad E[v_{t_k}] = 0$$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_{t_{k1}} \\ v_{t_{k1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'_{t_{k2}} & v'_{t_{k2}} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_{t_k} & S_{t_k} \\ S'_{t_k} & R_{t_k} \end{bmatrix} \delta_{t_{k1}t_{k2}}$$

y el resto de momentos centrales impares iguales a cero.

Se supone que la matriz Q_{t_k} es semidefinida positiva y que la matriz R_{t_k} es definida positiva.

3.1 La forma reducida en el espacio de los estados.

Supuesto que las matrices A , G , Ξ , Σ_ε son matrices de constantes (o funciones del tiempo exclusivamente) y que cada observación es simplemente $z_{t_k} = V(Y_{t_k}^{t_{k+1}}) = y_{t_k}$ (las variables de la forma estructural se observan sin error). Entonces, la solución particular de (1) es:

$$y_{t_{k+1}} = e^{A(t_{k+1}-t_k)}y_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}Gu_\tau d\tau + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}\Xi d\varepsilon_\tau$$

que se conoce como **forma reducida** de (1), que puede representarse (vid. Terceiro [1990]) en el espacio de los estados (3)-(4) de forma que:

$$\begin{aligned} \Phi_{t_k} &= \Gamma_{t_k} = E_{t_k} = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \\ H_{t_k} &= D_{t_k} = C_{t_k} = I \\ u_{t_k}^s &= u_{t_k}^o = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}Gu_\tau d\tau \\ w_{t_k} &= v_{t_k} = \epsilon_{t_k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t-\tau)}\Xi d\varepsilon_\tau \end{aligned}$$

y dado que $\{\varepsilon_t, t \geq t_0\}$ es un movimiento browniano implica que el proceso $\{\epsilon_{t_k}\}$ es de ruido blanco gaussiano tal que:

$$\epsilon_{t_k} \sim_{i.d.} N \left(0, \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A\tau} \Xi \Sigma_\varepsilon \Xi' e^{A'\tau} d\tau \right)$$

Por lo tanto, en este caso, las observaciones pueden representarse en una forma reducida VAR(1). En concreto, a partir de una forma estructural como (1), si suponemos, por simplicidad, que $G = 0$ en (1), tenemos la forma reducida :

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{1t_k}(L) y_{t_k} &= \epsilon_{t_k} \\ \bar{\Phi}_{1t_k}(L) &= I - e^{A(t_k-t_{k-1})} L^{(t_k-t_{k-1})} \\ \epsilon_{t_k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A(t_{k+1}-\tau)} \Xi d\varepsilon_\tau \\ E[\epsilon_{t_k}] &= 0, \quad E[\epsilon_{t_{k_1}} \epsilon'_{t_{k_2}}] = Q_{t_{k_1}} \delta_{t_{k_1} t_{k_2}}\end{aligned}$$

Entonces $\begin{bmatrix} x'_{t_{k+1}} & z'_{t_k} \end{bmatrix}'$ del modelo (3)-(4) correspondiente a esta forma reducida VAR(1), se distribuyen conjuntamente como una normal porque, a partir de la representación en espacio de los estados, es fácil mostrar que es una transformación afín de $\begin{bmatrix} w'_{t_k} & v'_{t_k} \end{bmatrix}'$. Además, puesto que $\Sigma_\varepsilon > 0$, se verifica:

$$Q_{t_k} = S_{t_k} = R_{t_k} = \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A\tau} \Xi \Sigma_\varepsilon \Xi' e^{A'\tau} d\tau \geq 0$$

Las expresiones analíticas de las matrices de (3) y (4) son, en general, distintas para cada modelo. Además, es conocido (vid. Terceiro [1990]) que la formulación no es única.

3.2 El M.V.E. en el espacio de los estados.

Una formulación en el espacio de los estados de la variación del modelo de Schöbel y Zhu [1998] que hemos considerado, de dimensión mínima es:

$$\begin{aligned}
 x_{t_{k+1}} &= \Phi_{t_k} x_{t_k} + u_{t_k}^s + w_{t_k} \\
 z_{t_k} &= u_{t_k}^o + v_{t_k} \\
 x_{t_k} &= v_{t_k}^s, \quad z_{t_k} = \ln(y_{t_{k+1}}/y_{t_k}) \\
 \Phi_{t_k} &= e^{-k(t_{k+1}-t_k)} \\
 u_{t_k}^s &= \theta \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-kt} dt, \quad u_{t_k}^o = (r + \sigma\rho)(t_{k+1} - t_k) \\
 w_{t_k} &= \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t_{k+1}-t)} dW_{2t} \\
 v_{t_k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[v_{t_k}^s e^{-k(t-t_k)} + \theta H(t, t_k) \right] dW_{1t}, \quad H(t, t_k) = \int_{t_k}^t e^{-k(t-s)} ds \\
 Q_{t_k} &= \sigma^2 \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-2kt} dt \\
 S_{t_k} &= \sigma\rho \int_0^{t_{k+1}-t_k} \left(v_{t_k}^s e^{-k(t_{k+1}-t_k)} + \theta e^{-k(t_{k+1}-t_k-t)} H(t, 0) \right) dt \\
 R_{t_k} &= \int_0^{t_{k+1}-t_k} \left[v_{t_k}^s e^{-kt} + \theta H(t, 0) \right]^2 dt + \sigma_\epsilon^2
 \end{aligned} \tag{16}$$

La forma estructural de este modelo de volatilidad estocástica es, quizá, el ejemplo más simple en el que Ξ puede depender de un subconjunto de variables endógenas (la escalar v_t^s).

En el capítulo 4, en una extensión inmediata de este modelo, en la que se supone que las rentabilidades del activo entre registros sucesivos se observan con error, la linealidad de la forma estructural y la ecuación de observación, la normalidad de $\{v_t^s\}$ y el proceso de los ruidos de observación $\{e_{t_k}\}$ (incorrelado con los demás) más el supuesto de que $\{\varepsilon_t, t \geq t_0\}$ es un movimiento browniano, implica que las variables de $\{v_{t_k}\}$ conforman un ruido blanco no gaussiano, de momentos impares iguales a cero y momentos pares conocidos (a través del lema de Itô). En este caso, $\left[x'_{t_{k+1}} \ z'_{t_k} \right]'$ del modelo en espacio de los estados no es gaussiano, pero su densidad es simétrica respecto a la media condicional, porque es una transformación afín de $\left[w'_{t_k} \ v'_{t_k} \right]'$.

Puesto que en el modelo de volatilidad estocástica se supone que tanto σ como σ_ϵ son positivos, en (16) se verifica que $Q_{t_k} > 0$, $R_{t_k} > 0$.

3.3 Algunas observaciones adicionales.

Observación 1. Conviene insistir en que es posible que la serie temporal coherente con (2) expresada según (3)-(4) presente datos recogidos a intervalos irregulares de tiempo. Un ejemplo típico son los datos financieros de alta frecuencia.

Además, la distribución de $\begin{bmatrix} x'_{t_{k+1}} & z'_{t_k} \end{bmatrix}'$, como se verá, tiene una importancia central en la definición del método de estimación, mediante la construcción de una función de verosimilitud.

Observación 2. Dos de las características principales de la formulación en el espacio de los estados (3)-(4) son la consideración del vector de estado, que no se presenta en las formas reducidas de los modelos econométricos tradicionales como (observación1), y la presencia de dos términos de error correspondientes a dos procesos $\{w_{t_k}\}$ y $\{v_{t_k}\}$, en vez de uno sólo $\{\epsilon_{t_k}\}$ en (observación1).

La secuencia del vector de estado de la formulación (3)-(4), $\{x_{t_k}\}$, puede considerarse como la mínima información necesaria para determinar unívocamente la evolución del sistema dados los valores futuros de las variables exógenas, $\{u_{t_k}^s\}$ y $\{u_{t_k}^o\}$, los términos de error, $\{w_{t_k}\}$ y $\{v_{t_k}\}$, y los intervalos de tiempo entre las observaciones, $\{t_{k+1} - t_k\}$, a partir de un cierto valor inicial conocido del vector de estado, x_{t_0} .

Aunque no se escriba expresamente, se entiende que (vid. ejemplo S&Z), en general, las variables exógenas de (3)-(4), $\{u_{t_k}^s\}$ y $\{u_{t_k}^o\}$, son funciones de las variables exógenas $\{u_t\}$ de (1), de los parámetros θ y de los intervalos de muestreo $\{t_{k+1} - t_k\}$. Los términos de error, a su vez, son funciones de los procesos $\{\epsilon_t\}$ de (1) y $\{e_{t_k}\}$ de (2), caracterizados por sus funciones de densidad, quizá (vid. ejemplo S&Z) de un subconjunto de $\{x_{t_k}\}$, caracterizado también por su función de densidad gaussiana implicada por el modelo, de los parámetros θ y de los intervalos de muestreo $\{t_{k+1} - t_k\}$. Entonces, la formulación en el espacio de los estados de un modelo de forma estructural lineal en tiempo continuo permite la determinación de la función de densidad del vector de estado para cualquier instante futuro de tiempo.

La formulación en el espacio de los estados resulta especialmente relevante cuando el modelo que se estima incluye un proceso no observable, que tiene cierta interpretación económica. Un ejemplo de esto es el modelo

S&Z, donde se plantea el problema de estimar un proceso no observable, $\{v_t^s\}$, asociado a la heterocedasticidad condicional de las observaciones del precio de un activo. En este caso, no es posible estimar este modelo si no se formula $\{v_t^s\}$ como el proceso de una variable de estado.

Cuando alguno de los parámetros fijos de (1) se remodela como un proceso estocástico de forma estructural (1) se tiene otro caso de modelo con variables no observables. La extensión del modelo de volatilidad estocástica que se presenta más adelante, donde r_t sigue un proceso de Orstein-Uhlenbeck (O-U), es un ejemplo de esto último.

También es conveniente una formulación como (3)-(4) si se desean interpolar los valores de una variable medida con error. En la Observación 6 se muestra un ejemplo sencillo, en el que la forma reducida no permite estimar el proceso de la variable medida con error, mientras que el modelo en el espacio de los estados sí.

Observación 3. Esta formulación en el espacio de los estados no es la habitual en econometría porque:

a) Los modelos estándar (vid. Harvey [1989]) suponen que $S_{t_k} = 0$. Todos los modelos en el espacio de los estados pueden describirse suponiendo $S_{t_k} = 0$ (vid. Harvey [1989]). Por ejemplo, si $S_{t_k} = 0$, se puede escribir otra formulación en el espacio de los estados del modelo de Schöbel y Zhu [1998] si se definen:

$$x_{t_{k+1}}^a = [x_{t_{k+1}} \ z_{t_k}]', \quad z_{t_k}^a = z_{t_k}$$

donde $x_{t_{k+1}}^a$ y $z_{t_k}^a$ son el vector de estado y la observación "aumentados", respectivamente. Pero entonces, $x_{t_k}^a$ no tiene dimensión mínima ($x_{t_k}^a$ es 2×1 , mientras que x_{t_k} es 1×1) y el coste computacional de evaluar la verosimilitud gaussiana del modelo "aumentado" es mayor que la correspondiente al modelo de este trabajo (que permite $S_{t_k} \neq 0$) porque su filtro de Kalman exige propagar cinco ecuaciones más que aquél, que es eficiente (una más del estado, tres más de las covarianzas del estado y una más de la covarianza del estado y la observación).

b) El término de error en la ecuación de observación (4) tiende a evitar los problemas numéricos asociados a la posible singularidad de la matriz de covarianzas que se propaga en el filtro de Kalman cuando una combinación

lineal de los estados se observa sin error. Por ejemplo, la formulación de Harvey [1989] de (2) hace $v_{t_k} = 0$.

c) Aparecen los términos $u_{t_k}^s$ y $u_{t_k}^o$. En general $u_{t_k}^s \neq u_{t_k}^o$, pero a expensas de un coste computacional siempre se puede redefinir el sistema haciendo $u_{t_k} = [(u_{t_k}^s)' (u_{t_k}^o)']'$.

Es frecuente que los modelos análogos a (3)-(4) de la literatura (Harvey [1989], Jazwinski [1970]) no presenten explícitamente las variables exógenas $u_{t_k}^s$ y $u_{t_k}^o$. Aunque siempre se puede escribir (1) redefiniendo la variable endógena como $y_t^* = [(y_t)' (u_t)']'$, esto supone que:

c1) se eleva innecesariamente el coste computacional del filtro de Kalman por aumentar la dimensión del vector de estado en r variables.

c2) no es posible calcular las matrices de (3)-(4) mediante el método de diagonalización recomendado por Harvey [1989]. En efecto, en el capítulo 3, sección 5, se muestra un ejemplo presentado por Van Loan [1978] que justifica esta afirmación.

Observación 4. La especificación de dos términos de error en (3)-(4) también presenta ventajas respecto a la formulación de uno sólo en (Observación 1), desde el punto de vista de la formulación escueta de los modelos econométricos, incluso cuando es posible representar el modelo econométrico como (Observación 1).

Por ejemplo, si se considera el modelo (1) donde, por simplicidad, $G = 0$, entonces y_{t_k} sigue un VARMA(1, 0) dado por

$$\bar{\Phi}_{1_{t_k}}(L) y_{t_k} = w_{t_k} \quad (5)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{1_{t_k}}(L) &= I - e^{A(t_k - t_{k-1})} L^{(t_k - t_{k-1})} \\ w_{t_k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{A(t_{k+1} - \tau)} \Xi d\varepsilon_\tau \\ E[w_{t_k}] &= 0, \quad E[w_{t_{k_1}} w_{t_{k_2}}'] = Q_{t_{k_1}} \delta_{t_{k_1} t_{k_2}} \\ Q_{t_{k_1}} &= \int_0^{t_{k_1} - t_{k_1 - 1}} e^{A\tau} \Xi \Sigma_\varepsilon \Xi' e^{A'\tau} d\tau \end{aligned}$$

y las observaciones $\{z_{t_k}\}$ con error de $\{y_{t_k}\}$ son tales que:

$$z_{t_k} = y_{t_k} + v_{t_k}, \quad v_{t_k} \sim i.i.d. N(0, \Sigma_y), \quad E \left[v_{t_{k_1}} w'_{t_{k_2}} \right] = 0 \quad (6)$$

entonces se verifica:

$$z_{t_{k+1}} = e^{A(t_{k+1}-t_k)} z_{t_k} + v_{t_{k+1}} - e^{A(t_{k+1}-t_k)} v_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} \Xi d\varepsilon_\tau$$

de modo que la variable observada z_{t_k} sigue un VARMA(1, 1) dado por:

$$\bar{\Phi}_{1_{t_k}}(L) z_{t_k} = \bar{\Theta}_{1_{t_k}}(L) \epsilon_{t_k} = \eta_{t_k} \quad (7)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{1_{t_k}}(L) &= I - \theta_{t_k} L^{(t_k-t_{k-1})} \\ E[\epsilon_{t_k}] &= 0 \\ E[\epsilon_{t_{k_1}} \epsilon'_{t_{k_2}}] &= \Sigma_{\epsilon_{t_{k_1}}} \delta_{t_{k_1} t_{k_2}} \end{aligned}$$

para el que se verifican las ecuaciones:

$$\begin{aligned} E[\eta_{t_k} \eta'_{t_k}] &= \left(\Sigma_y + e^{A(t_k-t_{k-1})} \Sigma_y e^{A'(t_k-t_{k-1})} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t_k-t_{k-1}} e^{A\tau} \Xi \Sigma_\varepsilon \Xi' e^{A'\tau} d\tau \right) \\ E[\eta_{t_k} \eta'_{t_{k-1}}] &= -e^{A(t_k-t_{k-1})} \Sigma_y \\ E[\eta_{t_k} \eta'_{t_{k-l}}] &= 0, \quad l \geq 2 \end{aligned}$$

de modo que para escribir el modelo en términos de los parámetros de (5) se deberían resolver las ecuaciones para θ_{t_k} y $\Sigma_{\varepsilon_{t_k}}$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\epsilon_{t_k}} + \theta_{t_k} \Sigma_{\epsilon_{t_{k-1}}} \theta'_{t_k} &= E[\eta_{t_k} \eta'_{t_k}] \\ -\theta_{t_k} \Sigma_{\epsilon_{t_{k-1}}} &= E[\eta_{t_k} \eta'_{t_{k-1}}], \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

de forma que:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\epsilon_{t_k}} + e^{A(t_k-t_{k-1})}\Sigma_y\Sigma_{\epsilon_{t_{k-1}}}^{-1}\Sigma_y e^{A'(t_k-t_{k-1})} &= \left(\Sigma_y + e^{A(t_k-t_{k-1})}\Sigma_y e^{A'(t_k-t_{k-1})} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t_k-t_{k-1}} e^{A\tau}\Xi\Sigma_\epsilon\Xi' e^{A'\tau} d\tau \right) (8) \\ \theta_{t_k} &= e^{A(t_k-t_{k-1})}\Sigma_y\Sigma_{\epsilon_{t_{k-1}}}^{-1} \quad (9) \end{aligned}$$

Entonces, la identificación del proceso $\{z_{t_k}\}$ según (7) requiere la estimación de las mismas matrices $(A, \Xi, \Sigma_\epsilon, \Sigma_y)$ que la identificación del proceso original $\{y_{t_k}\}$ de (5) y la ecuación de observación (6), pero es computacionalmente más compleja porque debe resolverse, además, el sistema de ecuaciones (8)-(9) para θ_{t_k} y $\Sigma_{\epsilon_{t_k}}$. La formulación (7) es, en este sentido, menos escueta que (5)-(6). Más aún, en el caso vectorial, el coste computacional de (7) respecto a (5)-(6) aumenta con la dimensión del estado porque se precisa calcular $\Sigma_{\epsilon_{t_k}}^{-1}$.

Además, puede comprobarse que si se escribe (8) para hallar la solución estacionaria, de la que depende todo el esquema iterativo, dado un intervalo de muestreo (por ejemplo para la condición inicial $\Sigma_{\epsilon_{t_0}}$), resulta una ecuación cuadrática cuya solución (incluso en el caso univariante) no necesariamente existe y/o es única, o supone (en el caso vectorial) un problema algebraico costoso.

3.4 Estimación en el espacio de los estados

Una vez formulado el modelo econométrico en el espacio de los estados de la forma siguiente:

$$x_{t_{k+1}} = \Phi_{t_k}x_{t_k} + \Gamma_{t_k}u_{t_k}^s + E_{t_k}w_{t_k} \quad (3)$$

$$z_{t_k} = H_{t_k}x_{t_k} + D_{t_k}u_{t_k}^o + C_{t_k}v_{t_k} \quad (4)$$

con

$$\begin{aligned} E\{w_{t_k}\} &= 0, \quad E\{v_{t_k}\} = 0 \\ E\left\{\begin{bmatrix} w_{t_k} \\ v_{t_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'_{t_k} & v'_{t_k} \end{bmatrix}\right\} &= \begin{bmatrix} Q_{t_k} & S_{t_k} \\ S'_{t_k} & R_{t_k} \end{bmatrix} \delta_{t_{k_1}t_{k_2}} \end{aligned}$$

se procede a estimar el vector θ , que presenta p parámetros, en el que se incluyen todos los elementos desconocidos necesarios para calcular las matrices: Φ_{t_k} , Γ_{t_k} , E_{t_k} , H_{t_k} , D_{t_k} , C_{t_k} , Q_{t_k} , R_{t_k} and S_{t_k} . Recuérdese que los vectores x_{t_k} , $u_{t_k}^s$, $u_{t_k}^o$ y z_{t_k} tienen dimensiones n , r^s , r^o y m , respectivamente.

Representaremos la información muestral por $\{Z^{t_N}, U^{t_N}, T^{t_N}\}$ donde:

$$\begin{aligned} Z^{t_N} &= \{z'_{t_1}, \dots, z'_{t_N}\}' \\ U^{t_N} &= \{u'_t, t_0 \leq t \leq t_N\}' \\ T^{t_N} &= \{t_1 - t_0, \dots, t_N - t_{N-1}\}' \end{aligned}$$

El estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ de θ viene dado por:

$$\hat{\theta}_{t_N} = \arg \max_{\theta} L_{t_N}(\theta) = \arg \max_{\theta} p(Z^{t_N}; U^{t_N}, T^{t_N}, \theta) \quad (4.3)$$

where $p(Z^{t_N}; U^{t_N}, T^{t_N}, \theta)$ es la función de densidad conjunta de todas las observaciones Z^{t_N} . Considerada como función de θ , ésta es la función de verosimilitud $L_{t_N}(\theta)$.

Surgen dos problemas básicos a la hora de calcular $\hat{\theta}_N$ según este procedimiento. El primero consiste en obtener una expresión para $p(Z^{t_N}; U^{t_N}, T^{t_N}, \theta)$, y el segundo en maximizar esta expresión con respecto a θ . Ambos se examinarán seguidamente.

3.5 Evaluación de la función de verosimilitud gaussiana.

La dificultad básica en el cálculo de la función de verosimilitud consiste en que las observaciones no son independientes, esto es:

$$p(Z^{t_N}; U^{t_N}, T^{t_N}, \theta) \neq p(z_{t_1}; U^{t_1}, T^{t_1}, \theta) \dots p(z_{t_N}; U^{t_N}, T^{t_N}, \theta)$$

La idea central para resolver este problema es escribir la expresión $p(Z^{t_N}; U^{t_N}, T^{t_N}, \theta)$ como el producto de sucesivas funciones de densidad condicionales, de modo que:

$$\begin{aligned} p(Z^{t_N}; U^{t_N}, T^{t_N}, \theta) &= p(z_{t_N} | Z^{t_{N-1}}; U^{t_N}, T^{t_N}, \theta) \\ &\quad p(z_{t_{N-1}} | Z^{t_{N-2}}; U^{t_{N-1}}, T^{t_{N-1}}, \theta) \dots p(z_{t_1}; U^{t_1}, T^{t_1}, \theta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

3.5. EVALUACIÓN DE LA FUNCIÓN DE VEROSIMILITUD GAUSSIANA.31

donde $p(z_{t_k} | Z^{t_{k-1}}; U^{t_k}, T^{t_k}, \theta)$ es la función de densidad condicional de las observaciones en el instante t_k , z_{t_k} , dadas las observaciones y los intervalos muestrales pasados, $Z^{t_{k-1}}$ y T^{t_k} , respectivamente .

La factorización que así resulta puede calcularse dado que, bajo el supuesto de normalidad de las perturbaciones w_{t_k} y v_{t_k} , el término general $p(z_{t_k} | Z^{t_{k-1}}; U^{t_k}, \theta)$ se puede caracterizar completamente mediante el filtro de Kalman aplicado al sistema para cualquier valor de θ . En efecto, utilizando la notación siguiente:

$$\begin{aligned} E \{ z_{t_k} | Z^{t_{k-1}}; U^{t_k}, T^{t_k}, \theta \} &= \hat{z}_{t_k | t_{k-1}} \\ cov \{ z_{t_k} | Z^{t_{k-1}}; U^{t_k}, T^{t_k}, \theta \} &= E \left\{ [z_{t_k} - \hat{z}_{t_k | t_{k-1}}] [z_{t_k} - \hat{z}_{t_k | t_{k-1}}]' | Z^{t_{k-1}}; U^{t_k}, T^{t_k}, \theta \right\} \\ &= B_{t_k} \end{aligned} \quad (4.5)$$

se obtiene:

$$p(z_{t_k} | Z^{t_{k-1}}; U^{t_{k-1}}, T^{t_k}, \theta) = (2\pi)^{-m/2} |B_{t_k}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \tilde{z}_{t_k} \right\} \quad (4.6)$$

donde \tilde{z}_{t_k} se denomina la innovación, definida como:

$$\tilde{z}_{t_k} = z_{t_k} - \hat{z}_{t_k | t_{k-1}} \quad (4.7)$$

Las expresiones de \tilde{z}_{t_k} y B_{t_k} se obtienen del siguiente filtro de Kalman:

$$\tilde{z}_{t_k} = z_{t_k} - H_{t_k} \hat{x}_{t_k | t_{k-1}} - D_{t_k} u_{t_k}^o \quad (4.8)$$

$$\hat{x}_{t_{k+1} | t_k} = \Phi_{t_k} \hat{x}_{t_k | t_{k-1}} + \Gamma_{t_k} u_{t_k}^s + K_{t_k} \tilde{z}_{t_k} \quad (4.9)$$

$$K_{t_k} = [\Phi_{t_k} P_{t_k | t_{k-1}} H_{t_k}' + E_{t_k} S_{t_k | t_{k-1}} C_{t_k}'] B_{t_k}^{-1} \quad (4.10)$$

$$P_{t_{k+1} | t_k} = \Phi_{t_k} P_{t_k | t_{k-1}} \Phi_{t_k}' + E_{t_k} Q_{t_k} E_{t_k}' - K_{t_k} B_{t_k} K_{t_k}' \quad (4.11)$$

$$B_{t_k} = H_{t_k} P_{t_k | t_{k-1}} H_{t_k}' + C_{t_k} R_{t_k | t_{k-1}} C_{t_k}' \quad (4.12)$$

De la factorización dada por (4.4) y la notación in (4.3) se puede escribir:

$$L_{t_N}(\theta) = p(Z^{t_N}; U^{t_N}, T^{t_N}, \theta) = \prod_{k=1}^N p(z_{t_k} | Z^{t_{k-1}}; U^{t_k}, T^{t_k}, \theta) \quad (4.13)$$

Ahora se debe hacer máxima la expresión anterior con respecto al vector θ . Esto es equivalente a hacer mínimo el negativo del logaritmo de la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned} l_{t_N}(\theta) &= -\log p(Z^{t_N}; U^{t_N}, T^{t_N}, \theta) = -\sum_{k=1}^N \log p(z_{t_k} | Z^{t_{k-1}}; U^{t_k}, T^{t_k}, \theta) \\ &= \sum_{k=1}^N \left[\frac{m}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log |B_{t_k}| + \frac{1}{2} \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \tilde{z}_{t_k} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nótese que si se ignora la constante, la expresión $l(\theta)$ consta de dos términos: un término determinista que depende de B_{t_k} y un término cuadrático en \tilde{z}_{t_k} , que recuerda el principio de mínimos cuadrados.

De ahora en adelante, con el fin de simplificar la notación, se eliminará el subíndice t_N . Así, por ejemplo, $l_{t_N}(\theta)$ o $\hat{\theta}_{t_N}$ se escribirán $l(\theta)$ y $\hat{\theta}$, respectivamente.

Entonces el problema se reduce a hacer mínima la expresión (4.14), sujeta a las restricciones que introduce el filtro de Kalman e incorporadas en las ecuaciones de la (4.8) a la (4.12).

Éste es formalmente un problema de programación matemática con restricciones, que sin embargo puede resolverse por sustitución en la función objetivo. Por esta razón los procedimientos de optimación estándares (una versión del algoritmo de Newton-Raphson como la de E4, por ejemplo) pueden aplicarse en este problema. Se busca una solución $\hat{\theta}$ de la ecuación $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$ con $\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} > 0$.

Nótese que el problema de estimar los parámetros del sistema (4.1)-(4.2) requiere la estimación del vector de estado que da el filtro de Kalman. En este caso, y dado que no se conoce el verdadero valor de θ sino sólo una estimación, las estimaciones derivadas del filtro de Kalman y que se usan en evaluaciones sucesivas del filtro de Kalman son subóptimas. Sin embargo, si el proceso de estimación es tal que $\hat{\theta} \rightarrow \theta$ entonces el valor de $z_{t_k} - \hat{z}_{t_k|t_{k-1}}$ tiende a la verdadera innovación.

Un problema que se presenta en la evaluación de la función de verosimilitud es el cálculo de algunas matrices que contienen la exponencial de una matriz. Por ejemplo, una vez escrita la forma reducida de (1) en el formato

3.5. EVALUACIÓN DE LA FUNCIÓN DE VEROSIMILITUD GAUSSIANA.33

(3)-(4), tal como se expone en el capítulo 3, para construir la verosimilitud es preciso calcular e^A , $\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} Gu_\tau$ y $\int_0^{t_k-t_{k-1}} e^{A\tau} \Xi \Sigma \epsilon \Xi' e^{A'\tau} d\tau$. En general, no hay soluciones analíticas directas (como por ejemplo con A diagonal) y se recomiendan (Harvey [1989]) dos métodos:

a) Diagonalizar A

b) Método de Van Loan. Este método supone el cálculo de la exponencial de una matriz triangular superior, de modo que mediante la multiplicación de los elementos de las diferentes posiciones de la matriz resultante, pueden obtenerse las matrices del modelo en el espacio de los estados.

Van Loan [1978] demuestra analíticamente que:

-Ambos métodos no son siempre equivalentes. Por ejemplo, Van Loan [1978] discute el caso donde:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

entonces, existe la solución analítica de $e^{A\Delta}$:

$$e^{A\Delta} = \begin{bmatrix} e^{\lambda\Delta} & \alpha \frac{(1 - e^{\lambda\Delta})}{e^{\lambda\Delta}} \\ 0 & e^{\lambda\Delta} \end{bmatrix}$$

pero si, por ejemplo, $\lambda = 0$, es decir si:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y designamos Λ y X a las matrices de autovectores y autovectores, respectivamente, entonces los vectores de X son linealmente dependientes, y no funciona el método de diagonalización que calcula:

$$e^{A\Delta} = X e^{\Lambda\Delta} X^{-1}$$

aunque en este caso sencillo puede calcularse la solución analítica del modelo (l'Hôpital):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{A\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\Delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mientras que sí puede aplicarse el de Van Loan [1978].

En Harvey [1989] se presentan ejemplos concretos parecidos para los que, sin mencionar expresamente este problema, de hecho, se calculan las formas analíticas (por ejemplo, para el *local linear trend model*, donde $\alpha = 1$). Sin embargo, no se menciona que este problema puede aparecer para algunas formas estructurales vectoriales cualesquiera.

-Hay casos donde la matriz de autovectores (normalizada) de A está próxima a ser singular (según cierta norma) y (dependiendo de la precisión de la máquina) puede incurrirse en sesgos de estimación si se aplica el método de diagonalización, que está mal condicionado, mientras que el método de Van Loan está libre de este problema (vid. Van Loan)

-Cuando se generaliza la forma estructural, por ejemplo con modelos de variables exógenas, en general, ninguno de los dos métodos es suficiente para calcular algunas matrices que son sumandos en las covarianzas de los ruidos, y se hace necesario aproximar estas expresiones numéricamente.

Capítulo 4

Aplicación: estimación del M.V.E..

Las propiedades estadísticas de las series empíricas de los precios de activos de bolsa, tipos de interés y tipos de cambio han sugerido la formulación de modelos econométricos de volatilidad estocástica. En particular, está documentado que las series diarias de rendimientos de activos de bolsa presentan leptocurtosis, asimetría y una fuerte heterocedasticidad condicional en la forma de *clusters* de volatilidad. Otras series como las de tipos de cambio muestran las mismas propiedades (vid. Shepard [1993]).

Entonces, la modelación de la volatilidad y la estimación de modelos de volatilidad estocástica tienen una importancia principal en la valoración de derivados financieros y la aplicación de sistemas de gestión de riesgos.

Como ya se ha mencionado en el capítulo 2, los modelos habituales de volatilidad estocástica en tiempo continuo de la literatura, a diferencia del que se presenta en esta tesis, son no lineales.

Por lo tanto, las fórmulas cerradas de valoración de opciones bajo volatilidad estocástica se refieren a estos modelos. La valoración de opciones con modelos de volatilidad estocástica en tiempo continuo, típicamente no lineales, está tratada en Amin y Ng [1993], Ball and Roma [1994], Heston [1993], Hull y White [1987], Kellerhals [2001], Scott [1991] y Wiggings [987].

Como ya se ha mencionado en el capítulo 2, los métodos de filtrado para la estimación de los modelos en tiempo continuo de volatilidad estocástica

no lineales pueden consultarse en Nielsen y Vestergaard [2000] y Kellerhals [2001].

Por otra parte, otra estrategia para la valoración de derivados financieros consiste en la simulación de un cierto proceso estimado. Este método, en general más costoso computacionalmente, está sobre todo indicado si no se conoce una fórmula cerrada de valoración del derivado en cuestión (vid. Campbell [1997]).

4.1 El M.V.E..

Comencemos estudiando ahora un modelo econométrico bivariante en tiempo continuo de volatilidad estocástica, donde las observaciones se suponen medidas con error. Es una variación inmediata del modelo de Schöbel y Zhu [1998], donde se especifica el proceso estocástico:

$$d \begin{bmatrix} \ln(y_t^*) \\ v_t^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(y_t^*) \\ v_t^s \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} v_t^s & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_{1t} \\ dW_{2t} \end{bmatrix} \quad (10)$$

y se definen las observaciones:

$$\ln(y_{t_{k+1}}/y_{t_k}) = \ln(y_{t_{k+1}}^*/y_{t_k}^*) + \epsilon_{t_k}, \quad \epsilon_{t_k} \sim_{i.i.d.} N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (11)$$

En el modelo de Schöbel y Zhu [1998], sin embargo, $\theta = k\theta^*$, donde θ^* es la media incondicional del proceso $\{v_t^s\}$. El proceso $\{\epsilon_{t_k}\}$ formaliza el error de medida de las observaciones. Es habitual encontrar ejemplos en la literatura de modelos modificados por redefinir las observaciones como medidas con error (vid. la definición de un modelo C.I.R. del precio de un activo medido con error en Nielsen y Vestergaard [2000]).

En el modelo de Schöbel y Zhu [1998], sin embargo, $y_{t_k} = y_{t_k}^*$ se observa sin error (en los instantes de muestreo).

Estos autores derivaron entonces una expresión exacta del precio de un activo que sigue el proceso estocástico con las modificaciones descritas. Si y_t representa el precio de un activo, este modelo es una extensión del proceso postulado por Black & Scholes para el precio de un activo e incorpora una

forma paramétrica de la heterocedasticidad condicional que se observa en las rentabilidades reales. Por tanto, puede ser útil tanto en la valoración de activos como en la modelación de series temporales.

A diferencia de la aproximación de Schöbel & Zhu [1998], se ha derivado el modelo en el espacio de los estados del proceso de las rentabilidades (medidas con error).

La solución de (10) entre dos observaciones consecutivas es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ln(y_{t_{k+1}}^*) \\ v_{t_{k+1}}^s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-k(t_{k+1}-t_k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(y_{t_k}^*) \\ v_{t_k}^s \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (r + \sigma\rho)(t_{k+1} - t_k) \\ \theta \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-kt} dt \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [v_{t_k}^s e^{-k(t-t_k)} + \theta H(t, t_k)] dW_{1t} \\ \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t_{k+1}-t)} dW_{2t} \end{bmatrix} \\ H(t, t_k) &= \int_{t_k}^t e^{-k(t-s)} ds \end{aligned} \quad (11)$$

$$\epsilon_{t_k}^* = \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [v_{t_k}^s e^{-k(t-t_k)} + \theta H(t, t_k)] dW_{1t} \\ \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t_{k+1}-t)} dW_{2t} \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde el ruido $\epsilon_{t_k}^*$ se distribuye según la función de densidad $f(\cdot)$, no gaussiana, simétrica, con los dos primeros momentos centrales conocidos.

Seguidamente, se justifica esta afirmación.

Si dividimos $\epsilon_{t_k}^*$ de forma que:

$$\epsilon_{t_k}^* = [[\epsilon_{t_k}^*]_1 \quad [\epsilon_{t_k}^*]_2]'$$

entonces $[\epsilon_{t_k}^*]_1$ es igual a la suma de dos ruidos, de forma que escribimos:

$$[\epsilon_{t_k}^*]_1 = [\epsilon_{t_k}^*]_{1A} + [\epsilon_{t_k}^*]_{1B}$$

El primero es un ruido gaussiano. En efecto:

$$[\epsilon_{t_k}^*]_{1A} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \theta H(t, t_k) dW_{1t} \sim_{i.i.d.} N \left(0, \theta^2 \int_0^{t_{k+1}-t_k} [H(t, 0)]^2 dt \right)$$

Es necesario ahora estudiar la distribución del segundo ruido, es decir de:

$$[\epsilon_{t_k}^*]_{1B} = v_{t_k}^s \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t-t_k)} dW_{1t}$$

que es el producto del estado $v_{t_k}^s$ y $\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t-t_k)} dW_{1t}$. La distribución de $v_{t_k}^s$ es gaussiana, y además es independiente $\{dW_{1t}\}$, para $t > t_k$, y $E[v_{t_k}^s dW_{1t_k}] = \rho dt$ es infinitesimal. Por lo tanto, se verifica:

$$E[\epsilon_{t_k}^*] = 0$$

Ahora es necesario estudiar cuáles son el resto de los momentos de $[\epsilon_{t_k}^*]_{1B}$. Sea $n \geq 3$, impar. Entonces:

$$\begin{aligned} E \left[\left([\epsilon_{t_k}^*]_{1B} \right)^n \right] &= E \left[\left(v_{t_k}^s \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t-t_k)} dW_{1t} \right)^n \right] \\ &= E \left[\left(v_{t_k}^s \right)^n \right] E \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t-t_k)} dW_{1t} \right)^n \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde se ha usado la independencia de las potencias n -ésimas de los dos ruidos ($v_{t_k}^s$ depende de $\{dW_{2t}\}$ hasta t_k), que $E \left[\left(v_{t_k}^s \right)^n \right]$ está acotado y el resultado:

$$\underbrace{E[dW_{1r} dW_{1s} \dots dW_{1v}]}_{n \text{ términos}} = 0 dt, \quad \forall \underbrace{r, s, \dots, v}_{n \text{ términos}} \quad r, s, \dots, v \in [t_k, t_{k+1}]$$

derivado de las propiedades del proceso $\{dW_{1t}\}$ (vid. Jazwinski [1970]).

Por lo tanto, aunque se necesitarían infinitos momentos para caracterizar la distribución de $[\epsilon_{t_k}^*]_{1B}$, se sabe que es simétrica centrada en cero. En consecuencia, puesto que $[\epsilon_{t_k}^*]_{1A}$ es gaussiano de media cero y $[\epsilon_{t_k}^*]_{1B}$ se

distribuye simétricamente alrededor de cero, su suma, $[\epsilon_{t_k}^*]_1$, es también simétrica alrededor de cero.

Por último, se verifica que $[\epsilon_{t_k}^*]_2$ es gaussiano:

$$[\epsilon_{t_k}^*]_2 = \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t_{k+1}-t)} dW_{2t} \sim_{i.i.d.} N \left(0, \sigma^2 \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-2k\tau} dt \right)$$

Por lo tanto, $\epsilon_{t_k}^*$ se distribuye simétricamente alrededor de cero.

Queda entonces, calcular los momentos de segundo orden de $\epsilon_{t_k}^*$, es decir:

$$\begin{aligned} E [\epsilon_{t_k}^* \epsilon_{t_k}^{*'}] &= \begin{bmatrix} Q_{t_k} & S_{t_k} \\ S_{t_k} & R_{t_k}^* \end{bmatrix} \\ Q_{t_k} &= \sigma^2 \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-2kt} dt \\ S_{t_k} &= \sigma \rho \left[v_{t_k}^s e^{-k(t_{k+1}-t_k)} (t_{k+1} - t_k) + \theta \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-k(t_{k+1}-t_k-t)} H(t, 0) dt \right] \\ R_{t_k}^* &= \int_0^{t_{k+1}-t_k} \left[v_{t_k}^s e^{-kt} + \theta H(t, 0) \right]^2 dt \end{aligned} \quad (14)$$

donde las observaciones se definen como:

$$\ln(y_{t_{k+1}}/y_{t_k}) = \ln(y_{t_{k+1}}^*/y_{t_k}^*) + \epsilon_{t_k}, \quad \epsilon_{t_k} \sim_{i.i.d.} N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (15)$$

donde, por lo tanto, el ruido de las observaciones $[\epsilon_{t_k}^*]_1 + \epsilon_{t_k}$ también es simétrico alrededor de cero, y sus dos primeros momentos centrales son conocidos.

En la siguiente sección se explica la importancia de estos resultados sobre la distribución de los ruidos en el problema de estimación.

4.1.1 Forma en el espacio de los estados del M.V.E..

Este modelo puede escribirse en el espacio de los estados (3)-(4) como:

$$\begin{aligned}
x_{t_{k+1}} &= \Phi_{t_k} x_{t_k} + u_{t_k}^s + w_{t_k} \\
z_{t_k} &= u_{t_k}^o + v_{t_k} \\
x_{t_k} &= v_{t_k}^s, \quad z_{t_k} = \ln(y_{t_{k+1}}/y_{t_k}) \\
\Phi_{t_k} &= e^{-k(t_{k+1}-t_k)} \\
u_{t_k}^s &= \theta \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-kt} dt, \quad u_{t_k}^o = (r + \sigma\rho)(t_{k+1} - t_k) \\
w_{t_k} &= \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t_{k+1}-t)} dW_{2t} \\
v_{t_k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[v_{t_k}^s e^{-k(t-t_k)} + \theta H(t, t_k) \right] dW_{1t}, \quad H(t, t_k) = \int_{t_k}^t e^{-k(t-s)} ds \\
Q_{t_k} &= \sigma^2 \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-2kt} dt \\
S_{t_k} &= \sigma\rho \int_0^{t_{k+1}-t_k} \left(v_{t_k}^s e^{-k(t_{k+1}-t_k)} + \theta e^{-k(t_{k+1}-t_k-t)} H(t, 0) \right) dt \\
R_{t_k} &= \int_0^{t_{k+1}-t_k} \left[v_{t_k}^s e^{-kt} + \theta H(t, 0) \right]^2 dt + \sigma_\epsilon^2 \tag{16}
\end{aligned}$$

Nótese que (16) puede calcularse exactamente, porque $\{v_t^s\}$ se postula como un proceso lineal en tiempo continuo (en concreto como un proceso de Orstein-Uhlenbeck), y entonces pueden sumarse exactamente los ruidos instantáneos de $d \ln(y_t^*)$ de cada intervalo de muestreo, como una función que depende de $(t_{k+1} - t_k)$ y es lineal (estocástica) en $v_{t_k}^s$.

Los modelos paramétricos de volatilidad estocástica en tiempo continuo habituales, sin embargo, formalizarían, para esta especificación, un ruido instantáneo asociado a $d \ln(y_t)$ (o quizá $d \ln(y_t^*)$) que fuera una función no lineal en $v_{t_k}^s$ (donde quizá $\{v_t^s\}$ siguiera un proceso continuo no lineal). Entonces, en general, la integral de los ruidos instantáneos en el intervalo de muestreo no podría sumarse exactamente como en este caso, como una función de $v_{t_k}^s$ y $(t_{k+1} - t_k)$ exclusivamente. Un ejemplo típico de lo anterior consistiría en que, en la ecuación de $d \ln(y_t^*)$ en (10), se sustituyera v_t^s por $(v_t^s)^2$ o por $\exp(v_t^s)$. En casos como estos, se emplean, en general, aproximaciones polinómicas en v_t^s de las funciones no lineales (vid. Jazwinsky [1970], Nielsen y Vestergaard [2000] y Kellerhals [2001]).

Se observa también en (16) que el ruido de la ecuación de observación v_{t_k} depende del estado $v_{t_k}^s$ y, además, no es gaussiano. Sin embargo, todos sus

momentos impares son cero, y todos sus momentos pares pueden calcularse a través del lema de Itô (dado que v_t^s es gaussiano). Por supuesto, las expresiones de la covarianza del ruido de observación v_{t_k} y el ruido del estado w_{t_k} también contienen la variable de estado $v_{t_k}^s$ y una función no lineal del estado, $(v_{t_k}^s)^2$.

Una vez escrito el modelo como (16), puede computarse la función de verosimilitud gaussiana del modelo. Puesto que el ruido de observación no es gaussiano, ésta no es la auténtica función de verosimilitud del proceso. Sin embargo, como la distribución del ruido es simétrica respecto a cero, siempre que sea posible calcular todos los elementos del filtro de Kalman, la estimación por la máxima verosimilitud gaussianase tendrán estimaciones consistentes de los parámetros, asintóticamente normales.

Surge el problema de que en el filtro de Kalman de la verosimilitud gaussiana se hace necesario calcular las esperanzas condicionadas de la matriz de covarianzas de los ruidos, que depende del estado $v_{t_k}^s$ y una función no lineal del estado, $(v_{t_k}^s)^2$. En efecto, se precisa calcular las expresiones:

$$\begin{aligned} S_{t_k | t_{k-1}} &= E [S_{t_k} | Z^{t_{k-1}}; T^{t_k}, \theta] \\ &= \sigma \rho \left[\hat{v}_{t_k | t_{k-1}}^s e^{-k(t_{k+1}-t_k)} (t_{k+1} - t_k) + k\theta \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-k(t_{k+1}-t_k-t)} H(t, 0) dt \right] \\ R_{t_k | t_{k-1}} &= E [R_{t_k} | Z^{t_{k-1}}; T^{t_k}, \theta] \\ &= \int_0^{t_{k+1}-t_k} E \left\{ \left[v_{t_k}^s e^{-kt} + k\theta H(t, 0) \right]^2 | Z_{t_{k-1}} \right\} dt + \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

De modo que se necesita calcular, además, la expresión:

$$E \left[(v^s)_{t_k}^2 | Z^{t_{k-1}}; T^{t_k}, \theta \right]$$

cuando el filtro de Kalman determina:

$$E [v_{t_k}^s | Z^{t_{k-1}}; T^{t_k}, \theta] = \hat{v}_{t_k | t_{k-1}}^s$$

Si se expande $(v^s)_{t_k}^2$ alrededor del valor $\hat{v}_{t_k | t_{k-1}}^s$ se tiene:

$$(v^s)_{t_k}^2 \simeq \left(\hat{v}_{t_k | t_{k-1}}^s \right)^2 + 2 \left(\hat{v}_{t_k | t_{k-1}}^s \right) \left(v_{t_k}^s - \hat{v}_{t_k | t_{k-1}}^s \right) + \left(v_{t_k}^s - \hat{v}_{t_k | t_{k-1}}^s \right)^2$$

donde, entonces:

$$E \left[(v^s)_{t_k}^2 \mid Z^{t_{k-1}}; T^{t_k}, \theta \right] \simeq \left(\hat{v}_{t_k|t_{k-1}}^s \right)^2 + P_{t_k|t_{k-1}}$$

y la aproximación será cada vez mejor con intervalos de muestreo más y más pequeños. Entonces, este estimador de máxima verosimilitud gaussiana aproximado, calculado con esta aproximación del momento condicional del estado $(v^s)_{t_k}^2$, es consistente y asintóticamente normal cuando $\max \{t_{k+1} - t_k\} \rightarrow 0$.

4.2 Un modelo *benchmark* del M.V.E..

Con el propósito de comparar los resultados de la estimación de máxima verosimilitud gaussiana del modelo exacto anterior con los de una especificación más sencilla, se considera cuál es el modelo en el espacio de los estados que resulta de aproximar (10) mediante el esquema de Euler (vid. Bergström [1984]), lo que supone:

$$dv_t^s = v_{t_k+dt}^s - v_{t_k}^s \simeq -k v_{t_k}^s dt + \theta dt + \sigma dW_{2t}$$

y entonces:

$$v_{t_k+dt}^s \simeq [1 - kdt] v_{t_k}^s + \theta dt + \sigma dW_{2t}$$

e integrando (10) en el intervalo muestral:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} d \ln S_t &= r \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} v_t^s dW_{1t} \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} dv_t^s &= v_{t_{k+1}}^s - v_{t_k}^s \simeq -k v_{t_k}^s \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt + \theta \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt + \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_{2t} \end{aligned}$$

de forma que sustituyendo los valores aproximados de v_t^s en la primera ecuación (teniendo en cuenta que $dW_{1t}dW_{2s} = (\rho dt) \delta_{ts}$) se tiene:

$$\begin{aligned} \ln (S_{t_{k+1}}/S_{t_k}) &= (r + \sigma\rho) (t_{k+1} - t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (v_{t_k}^s [1 - k(t - t_k)] + \theta(t - t_k)) dW_{1t} \\ v_{t_{k+1}}^s &= [1 - k(t_{k+1} - t_k)] v_{t_k}^s + \theta(t_{k+1} - t_k) + \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_{2t} \end{aligned}$$

que es el límite del modelo exacto cuando $\max \{t_{k+1} - t_k\} \rightarrow 0$.

4.2.1 Forma en el espacio de los estados del modelo benchmark del M.V.E..

Entonces, se deriva el correspondiente modelo en el espacio de los estados, que es:

$$\begin{aligned}
 x_{t_{k+1}} &= \Phi_{t_k} x_{t_k} + u_{t_k}^s + w_{t_k} \\
 z_{t_k} &= u_{t_k}^o + v_{t_k} \\
 x_{t_k} &= v_{t_k}^s, \quad z_{t_k} = \ln(S_{t_{k+1}}/S_{t_k}) \\
 \Phi_{t_k} &= [1 - k(t_{k+1} - t_k)] \\
 u_{t_k}^s &= \theta(t_{k+1} - t_k), \quad u_{t_k}^o = (r + \sigma\rho)(t_{k+1} - t_k) \\
 \rho &= b/(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a^2 = \sqrt{(1 - b^2)^2} \\
 w_{t_k} &= \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_{2t} \\
 v_{t_k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (v_{t_k}^s [1 - k(t - t_k)] + \theta(t - t_k)) dW_{1t} \\
 Q_{t_k} &= \sigma^2(t_{k+1} - t_k) \\
 S_{t_k} &= \sigma\rho(t_{k+1} - t_k) \left(\frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} [\theta - kv_{t_k}^s] + v_{t_k}^s \right) \\
 R_{t_k} &= \int_0^{t_{k+1} - t_k} [v_{t_k}^s (1 - kt) + \theta t]^2 dt + \sigma_\epsilon^2
 \end{aligned}$$

4.3 Factorización de Cholesky de las covarianzas de los ruidos.

En los experimentos numéricos se ha comprobado la importancia de asegurar por definición el carácter semidefinido positivo de las matrices de covarianzas instantáneas de los incrementos de los movimientos brownianos dW_{1t} y dW_{2t} . La factorización de Cholesky que se diseña para este propósito consiste en parametrizar:

$$\rho = b/(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a^2 = \sqrt{(1 - b^2)^2}$$

equivale a garantizar que $|\rho| \leq 1$. Si no se impone esta restricción, el algoritmo del filtro de Kalman para calcular la función de verosimilitud fracasa

muchas veces, porque no se asegura que la matriz de covarianzas de los ruidos de (3)-(4):

$$\begin{bmatrix} Q_{t_k} & S_{t_k} \\ S'_{t_k} & R_{t_k} \end{bmatrix}$$

sea semidefinida positiva. Este problema no se trata en Belledin y Schlag, [1999] y Nielsen y Vestergaard [2000].

Se ha programado la aproximación de Engle y Watson de la matriz de información. En particular, todas las expresiones de las derivadas respecto a los parámetros se obtienen mediante cocientes de las variaciones respecto a incrementos finitos de los valores de los parámetros.

Se deriva la expresión exacta de la matriz de información de la función de verosimilitud aproximada de este modelo según Terceiro [1990]. Para esto se precisan las fórmulas exactas del gradiente y del hessiano de la función de verosimilitud gaussiana.

En comparación con las fórmulas de Terceiro [1990], en la derivación del gradiente se toma en cuenta que las variables exógenas son también funciones de los parámetros y que, en los modelos de volatilidad estocástica, la matriz aproximada de la varianza del ruido de observación y la matriz de covarianza del ruido de observación y el ruido del estado, son funciones tanto de la media condicional como de la varianza condicional del estado.

4.4 Resultados empíricos de la estimación del M.V.E..

Los métodos de estimación descritos se aplican a la estimación del modelo de volatilidad estocástica con dos series temporales de observaciones recogidas a intervalos irregulares de tiempo.

La primera serie consiste en los datos diarios de cierre del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index comprendidos entre 11 de septiembre de 1989 y el 14 de octubre de 2002. La segunda presenta los datos diarios de cierre del tipo de cambio marco/dólar entre el 4 de enero de 1971 y el 22 de octubre de 2002.

Los intervalos de muestreo son variables, múltiplos enteros de $(1/7)(1/52)$, es decir, una diferencia de un día de cotizaciones. Entonces 1 representa un año completo.

Las dos series pueden obtenerse en <http://www.ecowin.com>.

4.4.1 Primer ejemplo: estimación del M.V.E. para el S&P 500 Automobiles Industrial Index.

La serie del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index consta de un total de 3303 observaciones y se muestra en la Figura 1. Sus tasas de variación logarítmicas, entre observaciones consecutivas, aparecen en la Figura 2, el gráfico de las longitudes temporales variantes en la Figura 3, así como el histograma de las tasas de variación logarítmicas en la Figura 4.

En la Figura 2 se advierte la acusada heterocedasticidad condicional, en la forma de *clusters* de volatilidad, típica de los rendimientos de los activos bursátiles. Además, la Tabla 2 muestra algunos estadísticos descriptivos que informan de que la serie presenta un exceso de curtosis sobre la normal y asimetría. Es importante observar que el valor mínimo de la Figura 2 corresponde al primer día de apertura después del once de septiembre de 2001.

En la Tabla 1 se muestran las estimaciones de los parámetros del modelo de volatilidad estocástica y entre paréntesis se indican sus desviaciones típicas estimadas. Todos los parámetros son significativamente distintos de cero. La estimación puntual de la media anual de los rendimientos es $\hat{r} + \hat{\sigma}\hat{\rho} = .0621 (.0636)$. Tanto el parámetro θ , asociado a la media incondicional de v_t^s , θ/k , como el correspondiente parámetro de la velocidad de retorno a θ/k , k , están muy probablemente sobreestimados (vid. la Tabla 10 con $h = 13$ y $f = 7/5$). La significatividad individual de la estimación del parámetro σ es coherente con el exceso de curtosis sobre la normal (2.39), que se representa, caeteris paribus, por este parámetro. Además el coeficiente de correlación de los movimientos brownianos tiene signo negativo de modo coherente con la asimetría negativa de los estadísticos descriptivos.

La correlación negativa entre los rendimientos bursátiles y las variaciones de la volatilidad, *leverage effect*, se ha documentado también en Black [1976], Christie [1982], Schmalensee y Trippi [1978] y Nielsen y Vestergaard [2000], y esta característica por sí misma sugiere la conveniencia de modelar la volatilidad como un proceso estocástico (una difusión). En Nielsen y Vestergaard [2000] se sugiere el interés de modelar el *leverage effect* dinámicamente, en la medida en que este efecto sea sólo transitorio en el mercado de valores. Esta cuestión se aborda en el contexto de formas estructurales en tiempo discreto en León, Rubio y Serna [2002].

En la Figura 5 se muestran los valores estimados del estado. Es notable que el valor máximo del estado de la volatilidad se registra el primer día de apertura después del once de septiembre de 2001.

Seguidamente se calcula la expresión de la matriz de covarianzas robustificada de los parámetros según White [1980]. En los apéndices A-D se muestran las expresiones analíticas para derivar la matriz de información (necesaria para calcular la matriz de covarianzas robustificada). Sin embargo, el programa de la aproximación de Engle y Watson de la matriz de información no es todavía satisfactorio, y para sustituir la inversa de la matriz de información se ha utilizado la matriz de covarianzas muestral del Monte Carlo de muestras con los mismos valores paramétricos, horizontes y frecuencias muestrales.

En la literatura se emplea a menudo la inversa del hessiano numérico de la menos log-verosimilitud (vid. Nielsen y Vestergaard [2000]) como una aproximación asintótica válida a la matriz de covarianzas de los parámetros en la medida en que el estimador se distribuya normalmente alrededor del verdadero valor.

En la Figura 6 y en la Figura 8 se muestran las series de las innovaciones estimadas y las innovaciones estandarizadas estimadas, respectivamente.

En las Tablas 3 y 4 se muestran diversos estadísticos descriptivos de las innovaciones y las innovaciones estandarizadas, respectivamente. El contraste de Jarque-Bera ($JB=127.21$) rechaza la hipótesis de normalidad de los residuos estandarizados (el valor crítico es $\chi_{95\%}^2(2) = 5.99$). El contraste de Ljung-Box no rechaza la hipótesis de no autocorrelación de los residuos estandarizados ($LB=31.31$) (el valor crítico es $\chi_{95\%}^2(30-6) = 36.41$). Sin embargo, tanto las acf y pacf de las innovaciones estimadas y de las innovaciones estandarizadas estimadas, en la Figura 7 y en la Figura 9, respectivamente, además de la media de los residuos estandarizados, significativamente distinta de cero, sugieren que pudiera haber cierta estructura no modelada. En particular, parece conveniente modelar un proceso (una difusión) para la tendencia. Los resultados de modelar un proceso Orstein-Uhlenbeck para la tendencia se muestran en (tabla apropiada). La Figura 10 presenta la evolución de los estados de la media y la volatilidad estimados.

4.4.2 Segundo ejemplo: estimación del M.V.E. para el tipo de cambio marco/dólar.

La serie del tipo de cambio marco/dólar consta de un total de 8070 observaciones y se muestra en la Figura 11. Los intervalos temporales de muestreo (variantes) de las (sólo) mil primeras observaciones (por claridad) se presentan en la Figura 12 mientras que las tasas de variación logarítmicas de la serie aparecen en la Figuras 13, 14 y 15, y los que su correspondiente histograma en la Figura 16.

En las Figuras 13, 14 y 15 se aprecia de nuevo una pauta de heterocedasticidad condicional de las tasas de variación del tipo de cambio, en la forma de *clusters* de volatilidad, si bien se aprecia que los rangos de variación son heterogéneos en las diferentes submuestras, lo que es coherente con cambios estructurales en diferentes regímenes cambiarios. Además, la Tabla 4 muestra algunos estadísticos descriptivos que informan de que la serie presenta asimetría y un exceso de curtosis sobre la normal superior al de la primera serie (4.69 frente a 2.39).

En la Tabla 5 se muestran las estimaciones del modelo de volatilidad estocástica y entre paréntesis se indican sus desviaciones típicas estimadas para la serie del tipo de cambio marco/dólar. Todos los parámetros son significativamente distintos de cero. La estimación puntual de la media anual de los rendimientos es $\hat{r} + \hat{\sigma}\hat{\rho} = .0010$. Además el coeficiente de correlación de los movimientos brownianos tiene signo negativo de modo coherente con la asimetría negativa de los estadísticos descriptivos. El valor relativo $\hat{\sigma}$ respecto de $\hat{\theta}/k$ (.1588/.0113) es bastante mayor que en el caso de los rendimientos del índice de bolsa (.2261/.0561), lo que es coherente con que la segunda serie es más leptocúrtica que la primera. Además el coeficiente de correlación de los movimientos brownianos tiene signo negativo de modo coherente con la asimetría negativa de los estadísticos descriptivos de la Tabla 6.

En las Figuras 17, 18 y 19 se muestran los valores estimados del estado. En comparación con la primera serie, la magnitud de los estados estimados es bastante menor: en efecto la desviación estándar de la serie es más reducida. También la desviación estándar del ruido de observación es menor en el modelo estimado de la segunda serie con respecto a la primera. También se registran valores de los estados asociados a la volatilidad condicional negativas (posibles por construcción).

Las Figuras 20, 21 y 22 presentan las innovaciones estimadas mientras que las Figuras 24, 25 y 26 muestran las innovaciones estandarizadas estimadas. Especialmente en éstas últimas resalta que la primera submuestra (cambios en el regimen de tipos de cambio) es más leptocúrtica que las dos restantes.

En las Tablas 7 y 8 se muestran diversos estadísticos descriptivos de las innovaciones y las innovaciones estandarizadas, respectivamente. El contraste de Jarque-Bera ($JB=3508.51$) rechaza la hipótesis de normalidad de los residuos estandarizados (el valor crítico es $\chi_{95\%}^2(2) = 5.99$). El contraste de Ljung-Box no rechaza la hipótesis de no autocorrelación de los residuos estandarizados ($LB=35.77$) (el valor crítico es $\chi_{95\%}^2(30 - 6) = 36.41$). Sin embargo, las acf y pacf tanto de los residuos como de los residuos estandarizados, en las Figuras 23 y 27, respectivamente, sugieren que pudiera haber cierta estructura no modelada. En particular, parece conveniente modelar un proceso (una difusión) para la tendencia.

4.5 Estudios Monte Carlo de los dos M.V.E. estimados empíricamente.

En esta sección se evalúa el método de estimación propuesto en el capítulo 3 para el modelo de volatilidad estocástica y el modelo aproximado *benchmark* según el esquema de Euler, con los valores paramétricos obtenidos con las series temporales del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index y el tipo de cambio marco/dólar, respectivamente.

En las Tablas 10 y 11 se muestran los resultados de la estimación de las simulaciones del modelo con los parámetros estimados a partir del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index, para un total de ocho tablas de 25 series independientes de datos generados a diferentes frecuencias y horizontes temporales.

En la Tabla 10, el caso con $h = 13$ y $f = (7/5)$ corresponde a los datos generados con una frecuencia de observación aproximadamente igual a los de la muestra empírica para un total de 13 años transcurridos desde el principio hasta el final de la serie. Se observa que las medias de las estimaciones de k y θ no están centradas entorno a sus verdaderos valores. La dificultad de distinguir entre k y θ en la estimación de esta forma paramétrica de la media del estado de la volatilidad (no observable) ya se ha destacado en Nielsen y Vestergaard [2000] para modelos no lineales cuyo estado es la desviación

típica, por ejemplo. La media de las estimaciones de la desviación estándar del ruido de observación también presenta un ligero sesgo. La media de las estimaciones de σ , sin embargo, está muy centrada alrededor del verdadero valor, y el contraste de significatividad es claramente distinto de cero.

Con el fin de comparar la influencia de aumentar h dada una frecuencia f , tomemos $h = 2$ y $f = (7/5)(1/2)$ con $h = 3$ y $f = (7/5)(1/2)$ de la Tabla 10 y además $h = 13$ y $f = (7/5)(1/2)$ de la Tabla 10. Entonces, disminuye monótonamente la desviación estándar de los parámetros, y son válidos los comentarios a propósito de la Tabla 10 anterior para el caso con $h = 13$ y $f = (7/5)$. También resalta que las estimaciones del Modelo Exacto (M.E.) son más precisas que las estimaciones con el modelo aproximado por el esquema de Euler (M.A.) con $h = 2$ y $h = 3$ (muestras "muy cortas") y se aproximan con $h = 13$.

Alternativamente, estudiaremos el efecto de aumentar la frecuencia f dado un h . Por ejemplo, si comparamos los resultados de $h = 5$ y $f = (7/5)(1/4)$ en la Tabla 11 con los de $h = 5$ y $f = (7/5)(1/6)$ en la Tabla 11 destaca la disminución de la desviación estándar de las medias de los parámetros k y θ , que pasan a estar más claramente no centradas en los verdaderos valores. Sin embargo, recordaremos que el filtro de Kalman del M.E. es sólo aproximado (vid. Capítulo 3) para los momentos de segundo orden, pero tiende a ser exacto conforme aumenta la frecuencia (y h es lo bastante grande) En efecto, con $h = 7.5$ y $f = (7/5)(1/5)$ de la Tabla 11 (prácticamente) todos los parámetros están más centrados que con $h = 7.5$ y $f = (7/5)(1/4)$ alrededor de los verdaderos valores. Además, la frecuencia de observación es lo bastante grande para que las estimaciones del M.E. sean prácticamente iguales a las del M.A..

En los diferentes casos de la Tabla 12 muestro los resultados de la estimación de las simulaciones del modelo de volatilidad estocástica con los parámetros estimados a partir del tipo de cambio marco/dólar, para un total de cuatro tablas de 25 series independientes de datos generados a diferentes frecuencias y horizontes temporales.

El ejemplo de la Tabla 12 con $h = 32$ y $f = (7/5)$ corresponde a los datos generados con una frecuencia de observación aproximadamente igual a los de la muestra empírica para un total de 32 años transcurridos desde el principio hasta el final de la serie. Se observa que, con esta frecuencia de observación, es muy probable que se haya sobreestimado la media incondicional del proceso de la volatilidad a través del parámetro θ , en detrimento

de σ . También parecen subestimarse los parámetros r y σ_ϵ . Además, se aprecia que las estimaciones del M.E. son relativamente más precisas que las del M.A.

En vista de que la frecuencia de observación empírica parece pequeña, se experimenta con frecuencias mayores $f = (7/5)(1/4)$, $(7/5)(1/6)$, $(7/5)(1/10)$, y $h = 2.5$. Aunque, en general, se detecta mayor precisión con el aumento de la frecuencia, parece claro que subsiste el problema de identificación de k y θ . Este análisis resulta incompleto por lo que sería conveniente ensayar frecuencias parecidas con un horizonte mayor $h = 5$. También se aprecia que las estimaciones del M.E. y el M.A., dados h y f , son prácticamente iguales.

Capítulo 5

Conclusiones y líneas futuras de investigación

En este trabajo se ha desarrollado una nueva formulación de los modelos econométricos dinámicos en tiempo continuo lineales de variables medidas con error en instantes discretos. Se ha derivado además un algoritmo para la estimación por máxima verosimilitud de todos los parámetros del modelo.

Los estimadores resultantes cuando la función de verosimilitud implicada por el modelo es exactamente gaussiana son consistentes y asintóticamente gaussianos y eficientes.

En el caso de los modelos de volatilidad estocástica presentados, la función de verosimilitud gaussiana es una aproximación a la verdadera, pero conforme la frecuencia de observación aumenta, los estimadores son también consistentes y asintóticamente gaussianos y eficientes.

Las principales contribuciones de este trabajo son:

-Una formulación en el espacio de los estados de dimensión mínima de los modelos econométricos dinámicos en tiempo continuo lineales de variables con errores de medida y observaciones en instantes discretos.

-Expresiones analíticas para la maximización de la función de verosimilitud del modelo. Nuestras estimaciones incluyen los componentes del estado inicial que son identificables. El tipo de condiciones iniciales es adecuado tanto para el empleo de las ecuaciones de Riccati del filtro del Kalman como para las ecuaciones del tipo de Chandrasekhar o Casals-Sotoca-Jerez que,

en el caso de formas estructurales de parámetros fijos y muestras de observaciones de frecuencia regular, a menudo ofrecen ventajas computacionales evidentes.

-Una expresión exacta de la matriz de información de la función de verosimilitud gaussiana (vid. Terceiro [1990]). Este resultado es particularmente relevante tanto para el proceso iterativo de maximización de la función de verosimilitud como para la validez de los contrastes de validación del modelo. Sin embargo, esta fórmula, en general, no puede calcularse analíticamente para los modelos econométricos en tiempo continuo, en contra de lo que se afirma en Harvey [1989], donde se ignora que algunas matrices del modelo en el espacio de los estados tienen, una forma funcional específica, que incluye exponenciales de matrices, a diferencia de los modelos habituales de forma estructural discreta : "It can also be done analytically, using the results set out in subsections 3.4.5 and 3.4.6." (p. 491) . Se presentan, no obstante, aproximaciones numéricas que pueden hacerse arbitrariamente precisas. También se indica la forma analítica cuando es posible.

Las fórmulas que se muestran en la literatura para el cálculo de la matriz de información corresponden a la aproximación de Engle y Watson (vid. Harvey [1989]) o casos particulares de la presentada en Terceiro [1990] (vid. Terceiro [2000]).

Además, se ha calculado la matriz de información apropiada de los modelos de volatilidad estocástica tratados, para después computar una expresión robustificada (aproximada) de la matriz de covarianzas según White [1980] (puesto que la verosimilitud es sólo aproximada). Esta expresión de la matriz de información tiene la peculiaridad de que las matrices de covarianzas dependen de la magnitud del estado. Debe notarse que a menudo se presentan estimaciones no robustificadas de la matriz de covarianzas para modelos de volatilidad estocástica no lineales, cuando algunos experimentos de simulación muestran que los estimadores máximo-verosímiles de una cierta aproximación de la función de verosimilitud son sesgados (vid. Nielsen , J. y M. Vestergaard, [2000]).

-Una consideración explícita en todas las formulaciones del caso general de observaciones de frecuencia irregular. Esto supone una generalización del caso de observaciones "missing", donde sólo se observan agregados contemporáneos o temporales de las variables.

Lo que se propone, y se ha contrastado numéricamente, es un procedimiento general para la estimación por máxima verosimilitud de modelos

econométricos dinámicos en tiempo continuo lineales de variables medidas con error en instantes discretos de tiempo.

En particular, se presentan ejemplos numéricos de estimación por máxima verosimilitud de dos modelos. En ambos casos, se comparan las estimaciones del modelo exacto con las estimaciones de un modelo aproximado *benchmark* construido mediante el esquema de Euler. El primero es un Orstein-Uhlenbeck (Bergström [1984]), cuya forma exacta se calcula con el método de Van Loan. El segundo es una variación del modelo de volatilidad estocástica de Schöbel y Zhu [1998]. En ambos casos, se muestran las ventajas de la estimación, en términos de consistencia y/o eficiencia, de los modelos exactos frente a los aproximados. Además, en el caso del modelo de volatilidad estocástica, se ilustran las ventajas de la estimación, en términos de consistencia y/o eficiencia de aumentar la frecuencia y/o horizonte de la muestra.

El procedimiento de estimación que se describe aquí es aplicable a diversos problemas de valoración de opciones financieras, bien sea mediante fórmulas cerradas de los precios funciones de los parámetros o mediante simulaciones de Monte Carlo del proceso estimado.

Capítulo 6

Apéndices

6.1 Apéndice A. El filtro de Kalman.

Supongamos el sistema que viene dado por:

$$x_{t_{k+1}} = \Phi_{t_k} x_{t_k} + \Gamma_{t_k} u_{t_k}^s + E_{t_k} w_{t_k} \quad (\text{A.1})$$

$$z_{t_k} = H_{t_k} x_{t_k} + D_{t_k} u_{t_k}^o + C_{t_k} v_{t_k} \quad (\text{A.2})$$

tal que x_{t_0} tiene un valor medio \bar{x}_{t_0} y una matriz de covarianzas P_{t_0} y donde $\{w_{t_k}\}$ y $\{v_{t_k}\}$ son procesos de ruido blanco de primeros momentos:

$$E[w_{t_k}] = 0, \quad E[v_{t_k}] = 0$$
$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_{t_k} \\ v_{t_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'_{t_k} & v'_{t_k} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_{t_k} & S_{t_k} \\ S'_{t_k} & R_{t_k} \end{bmatrix} \delta_{t_{k_1} t_{k_2}} \quad (\text{A.3})$$

donde $Q_{t_k} \geq 0$ y $R_{t_k} > 0$.

El estado inicial x_{t_0} y las perturbaciones $\{w_{t_k}\}$ y $\{v_{t_k}\}$ son independientes y tienen distribuciones simétricas alrededor de la media. Nótese que la normalidad de las distribuciones es un caso especial de este supuesto.

Si usamos la notación:

$$\hat{x}_{t_i|t_j} = E[x_{t_i} | Z^{t_j}; U^{t_i}, \theta] \quad (\text{A.4})$$

$$P_{t_i|t_j} = E \left\{ \begin{bmatrix} x_{t_i} - \hat{x}_{t_i|t_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t_i} - \hat{x}_{t_i|t_j} \end{bmatrix}' \mid Z^{t_j}; U^{t_i}, \theta \right\} \quad (\text{A.5})$$

donde $Z^{t_j} = \{z'_{t_1}, \dots, z'_{t_j}\}'$ y $U^{t_j} = \{u'_t, t_0 \leq t \leq t_j\}'$, el filtro de Kalman viene dado por las siguientes expresiones:

$$\hat{x}_{t_{k+1}|t_k} = \Phi_{t_k} \hat{x}_{t_k|t_{k-1}} + \Gamma_{t_k} u_{t_k}^s + K_{t_k} [z_{t_k} - H_{t_k} \hat{x}_{t_k|t_{k-1}} - D_{t_k} u_{t_k}^o] \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{x}_{t_0|t_{-1}} = E\{x_{t_0}\} = \bar{x}_{t_0} \quad (\text{A.7})$$

$$K_{t_k} = [\Phi_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} H'_{t_k} + E_{t_k} S_{t_k|t_{k-1}} C'_{t_k}] [H_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} H'_{t_k} + C_{t_k} R_{t_k|t_{k-1}} C'_{t_k}]^{-1} \quad (\text{A.8})$$

$$P_{t_{k+1}|t_k} = \Phi_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} \Phi'_{t_k} + E_{t_k} Q_{t_k} E'_{t_k} - K_{t_k} [H_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} H'_{t_k} + C_{t_k} R_{t_k|t_{k-1}} C'_{t_k}] K'_{t_k} \quad (\text{A.9})$$

$$P_{t_0|t_{-1}} = P_{t_0} \quad (\text{A.10})$$

La formulación del filtro de Kalman dado por (A.6) – (A.10) se obtiene por la aplicación directa de los siguientes resultados.

Si X es una variable aleatoria tal que $X \sim N(\nu, \Omega)$, y definimos $Y = AX + b$, entonces:

$$Y \sim N(A\nu + b, A\Omega A') \quad (\text{A.11})$$

Además, si suponemos que $\mu = A\nu + b$ y $\Sigma = A\Omega A'$, y que:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma'_{12} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

puede demostrarse que la distribución condicional de Y_1 dado $Y_2 = y_2$ es:

$$N[\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (y_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma'_{12}] \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto, si reescribimos (A.1) y (A.2) en una forma de espacio de los estados compacta:

$$\begin{bmatrix} x_{t_{k+1}} \\ z_{t_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{t_k} & E_{t_k} & 0 \\ H_{t_k} & 0 & C_{t_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t_k} \\ w_{t_k} \\ v_{t_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{t_k} & 0 \\ 0 & D_{t_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{t_k}^s \\ u_{t_k}^o \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

la distribución conjunta de $\begin{bmatrix} x_{t_{k+1}} \\ z_{t_k} \end{bmatrix}$, dado $Z^{t_{k-1}}$, es simétrica alrededor de la media:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{t_k} \hat{x}_{t_k|t_{k-1}} \\ H_{t_k} \hat{x}_{t_k|t_{k-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{t_k} & 0 \\ 0 & D_{t_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{t_k}^s \\ u_{t_k}^o \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

y tiene por covarianza:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} \Phi_{t_k}' + E_{t_k} Q_{t_k} E_{t_k}' & \Phi_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} H_{t_k}' + E_{t_k} S_{t_k|t_{k-1}} C_{t_k}' \\ H_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} \Phi_{t_k}' + C_{t_k} S_{t_k|t_{k-1}} E_{t_k}' & H_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} H_{t_k}' + C_{t_k} R_{t_k|t_{k-1}} C_{t_k}' \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Este resultado es consecuencia de (A.11). Si las distribuciones de x_{t_0} y las perturbaciones $\{w_{t_k}\}$ y $\{v_{t_k}\}$ son normales, la distribución conjunta de $\begin{bmatrix} x_{t_{k+1}}' & z_{t_k}' \end{bmatrix}'$ es además normal.

Las expresiones (A.6), (A.8), y (A.9) del filtro de Kalman se obtienen directamente usando (A.14) y (A.15) en el resultado dado por (A.12).

De acuerdo con (A.1), (A.2), y (A.6) podemos escribir:

$$\tilde{x}_{t_{k+1}|t_k} = \bar{\Phi}_{t_k} \tilde{x}_{t_k|t_{k-1}} + E_{t_k} w_{t_k} - K_{t_k} C_{t_k} v_{t_k}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t_{k+1}|t_k} &= x_{t_{k+1}} - \hat{x}_{t_{k+1}|t_k} \\ \bar{\Phi}_{t_k} &= \Phi_{t_k} - K_{t_k} H_{t_k} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P_{t_{k+1}|t_k} = \bar{\Phi}_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} \bar{\Phi}_{t_k}' + \begin{bmatrix} E_{t_k} & -K_{t_k} C_{t_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{t_k} & S_{t_k|t_{k-1}} \\ S_{t_k|t_{k-1}}' & R_{t_k|t_{k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{t_k}' \\ -C_{t_k}' K_{t_k}' \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

o

$$\begin{aligned}
P_{t_{k+1}|t_k} &= \bar{\Phi}_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} \bar{\Phi}'_{t_k} + E_{t_k} Q_{t_k} E'_{t_k} + K_{t_k} C_{t_k} R_{t_k|t_{k-1}} C'_{t_k} K'_{t_k} - K_{t_k} C_{t_k} S'_{t_k|t_{k-1}} E'_{t_k} \\
&\quad - E_{t_k} S_{t_k|t_{k-1}} C'_{t_k} K'_{t_k} \tag{A.14}
\end{aligned}$$

La expresión (A.13) pone de manifiesto que $P_{t_{k+1}|t_k}$ es el resultado de la suma de dos matrices semidefinidas positivas. No ocurre así en (A.9). Por lo tanto, los cálculos numéricos basados en (A.13) estarán mejor condicionados que los basados en (A.9). Es importante observar que los posibles errores numéricos en el cálculo de K_{t_k} por medio de (A.8) implican errores de primer orden en $P_{t_{k+1}|t_k}$ si se usa (A.9), mientras que hay errores de segundo orden si se usa (A.13).

Nótese que la expresión que hemos obtenido en la derivación del filtro de Kalman difiere de la que normalmente se usa en la literatura econométrica, porque hemos tomado en cuenta la posibilidad de que los errores de las ecuaciones de transición y de observación puedan estar correlados. También hemos incluido en esta formulación la matriz C_{t_k} para definir la distribución del ruido de la ecuación de observación.

La posible existencia de correlación contemporánea entre w_{t_k} y v_{t_k} , caracterizada por la matriz S_{t_k} , no es habitual en las formulaciones del filtro de Kalman que se usan en la literatura econométrica, y conduce a los términos $K_{t_k} C_{t_k} S'_{t_k|t_{k-1}} E'_{t_k}$ y $E_{t_k} S_{t_k|t_{k-1}} C'_{t_k} K'_{t_k}$ en (A.14). La inclusión de este efecto podría también tenerse en cuenta con una ligera redefinición del vector de estado, véase Anderson and Moore [1979].

Para un tratamiento más extenso del filtro de Kalman pueden consultarse Jazwinsky [1970] y Anderson y Moore [1979].

6.2 Apéndice B. Cálculo del gradiente.

Si $L(\theta)$ es la función de verosimilitud, se quiere calcular el gradiente del negativo del logaritmo de la función de verosimilitud, $l(\theta)$, tal que:

$$l(\theta) = -\log L(\theta) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{m}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log |B_{t_k}| + \frac{1}{2} \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \tilde{z}_{t_k} \right] \tag{B.1}$$

Si θ_i es el i -ésimo elemento en el vector θ , se pretende calcular el término general $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_i}$.

Se hará uso de los siguientes resultados de la derivación de matrices:

$$\frac{\partial \log |A(\alpha)|}{\partial \alpha} = \text{tr} \left[A(\alpha)^{-1} \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha} \right] \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial A(\alpha)^{-1}}{\partial \alpha} = -A(\alpha)^{-1} \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha} A(\alpha)^{-1} \quad (\text{B.3})$$

Si se deriva (B.1) se obtiene:

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_i} = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} \right] + \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} - \frac{1}{2} \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k}^{-1} \tilde{z}_{t_k} \right\} \quad (\text{B.4})$$

Es necesario calcular $\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i}$ y $\frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i}$, y para hacer esto se procede como sigue.

De (4.8) se tiene:

$$\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial H_{t_k}}{\partial \theta_i} \hat{x}_{t_k | t_{k-1}} - H_{t_k} \frac{\partial \hat{x}_{t_k | t_{k-1}}}{\partial \theta_i} - \frac{\partial D_{t_k}}{\partial \theta_i} u_{t_k}^o - D_{t_k} \frac{\partial u_{t_k}^o}{\partial \theta_i} \quad (\text{B.5})$$

Si se sustituye (4.8) en (4.9), se obtiene:

$$\hat{x}_{t_{k+1} | t_k} = \bar{\Phi}_{t_k} \hat{x}_{t_k | t_{k-1}} + \Gamma_{t_k} u_{t_k}^s - K_{t_k} D_{t_k} u_{t_k}^o + K_{t_k} z_{t_k} \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\bar{\Phi}_{t_k} = \Phi_{t_k} - K_{t_k} H_{t_k} \quad (\text{B.7})$$

Si se deriva (B.6) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}_{t_{k+1} | t_k}}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \bar{\Phi}_{t_k}}{\partial \theta_i} \hat{x}_{t_k | t_{k-1}} + \bar{\Phi}_{t_k} \frac{\partial \hat{x}_{t_k | t_{k-1}}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Gamma_{t_k}}{\partial \theta_i} u_{t_k}^s + \Gamma_{t_k} \frac{\partial u_{t_k}^s}{\partial \theta_i} \\ &\quad - K_{t_k} \left(\frac{\partial D_{t_k}}{\partial \theta_i} u_{t_k}^o + D_{t_k} \frac{\partial u_{t_k}^o}{\partial \theta_i} \right) + \frac{\partial K_{t_k}}{\partial \theta_i} (z_{t_k} - D_{t_k} u_{t_k}^o) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Conviene notar los problemas asociados al cálculo de algunos de estos términos en esta fórmula. Por ejemplo, si se calcula (B.6) para la formulación exacta en el espacio de los estados (2.21)-(2.25) de la forma estructural (2.2) se necesita calcular:

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{t_k} &= e^{A(t_{k+1}-t_k)} - K_{t_k}, \quad \Gamma_{t_k} = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \\ u_{t_k}^s &= u_{t_k}^o = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} G u_\tau d\tau\end{aligned}$$

Supongamos en adelante, por simplicidad, que $\{u_t\} = \{1\}$. Entonces, para obtener las ecuaciones de sensibilidad del filtro (B.8), es necesario calcular expresiones como $\frac{\partial (e^{A(t_{k+1}-t_k)})}{\partial \theta_i}$ y $\frac{\partial \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} G d\tau \right)}{\partial \theta_i}$. Desgraciadamente, no hay fórmulas analíticas generales para estas derivadas dada una matriz arbitraria A , así que deben usarse las siguientes aproximaciones numéricas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial (e^{A(t_{k+1}-t_k)})}{\partial A_{ij}} &\simeq \frac{(e^{he_i e'_j} - I) e^{A(t_{k+1}-t_k)}}{h} \\ &\frac{\partial \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} G d\tau \right)}{\partial A_{ij}} \\ &\simeq \frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{(A+he_i e'_j)(t_{k+1}-\tau)} G d\tau - \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} G d\tau}{h}\end{aligned}$$

No obstante, si la matriz A es diagonal, estas expresiones pueden calcularse exactamente como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial (e^{A(t_{k+1}-t_k)})}{\partial \theta_i} &= e^{A(t_{k+1}-t_k)} \frac{\partial A}{\partial \theta_i} (t_{k+1} - t_k) \\ \frac{\partial \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} G d\tau \right)}{\partial \theta_i} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} \frac{\partial A}{\partial \theta_i} (t_{k+1} - \tau) G d\tau \\ &\quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} \frac{\partial G}{\partial \theta_i} d\tau\end{aligned}$$

La expresión $\frac{\partial K_{t_k}}{\partial \theta_i}$ se obtiene de (4.10):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{t_k}}{\partial \theta_i} &= \left[\frac{\partial \Phi_{t_k}}{\partial \theta_i} P_{t_k|t_{k-1}} H'_{t_k} + \Phi_{t_k} \frac{\partial P_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} H'_{t_k} + \Phi_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} \frac{\partial H'_{t_k}}{\partial \theta_i} \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial E_{t_k}}{\partial \theta_i} S_{t_k} C'_{t_k} + E_{t_k} \frac{\partial S_{t_k}}{\partial \theta_i} C'_{t_k} + E_{t_k} S_{t_k} \frac{\partial C'_{t_k}}{\partial \theta_i} \right] B_{t_k}^{-1} \\
&\quad - \left[\Phi_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} H'_{t_k} + E_{t_k} S_{t_k} C'_{t_k} \right] B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k}^{-1} \quad (B.9)
\end{aligned}$$

En cuanto a $\frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i}$, si se deriva (4.12) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial H_{t_k}}{\partial \theta_i} P_{t_k|t_{k-1}} H'_{t_k} + H_{t_k} \frac{\partial P_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} H'_{t_k} + H_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} \frac{\partial H'_{t_k}}{\partial \theta_i} \\
&\quad + \frac{\partial C_{t_k}}{\partial \theta_i} R_{t_k} C'_{t_k} + C_{t_k} \frac{\partial R_{t_k}}{\partial \theta_i} C'_{t_k} + C_{t_k} R_{t_k} \frac{\partial C'_{t_k}}{\partial \theta_i} \quad (B.10)
\end{aligned}$$

Es preciso estudiar el caso especial del modelo de volatilidad estocástica univariante tratado en este trabajo. Se ve que las siguientes expresiones pueden desarrollarse como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{S}_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \hat{S}_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \hat{S}_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \hat{x}_{t_k|t_{k-1}}} \frac{\partial \hat{x}_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} \\
\frac{\partial \hat{R}_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \hat{R}_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \hat{R}_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \hat{x}_{t_k|t_{k-1}}} \frac{\partial \hat{x}_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \hat{R}_{t_k|t_{k-1}}}{\partial P_{t_k|t_{k-1}}} \frac{\partial P_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i}
\end{aligned}$$

Por último, se precisa calcular la expresión $\frac{\partial P_{t_{k+1}|t_k}}{\partial \theta_i}$. De (4.11) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{t_{k+1}|t_k}}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \Phi_{t_k}}{\partial \theta_i} P_{t_k|t_{k-1}} \Phi'_{t_k} + \Phi_{t_k} \frac{\partial P_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} \Phi'_{t_k} + \Phi_{t_k} P_{t_k|t_{k-1}} \frac{\partial \Phi'_{t_k}}{\partial \theta_i} \\
&\quad + \frac{\partial (E_{t_k} Q_{t_k} E'_{t_k})}{\partial \theta_i} - \frac{\partial K_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k} K'_{t_k} - K_{t_k} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} K'_{t_k} - K_{t_k} B_{t_k} \frac{\partial K'_{t_k}}{\partial \theta_i} \quad (B.11)
\end{aligned}$$

y de nuevo se presentan problemas computacionales. Si nos reducimos al caso antes mencionado de la formulación exacta en el espacio de los estados (2.21)-(2.25) de la forma estructural (2.2), entonces:

$$Q_{t_k} = S_{t_k} = R_{t_k} = \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A\tau} \Xi \Sigma_\epsilon \Xi' e^{A'\tau} d\tau$$

Por tanto, de nuevo no hay una expresión analítica general para las derivadas de estas expresiones con respecto a los elementos de la matriz A , de modo que se usan las fórmulas aproximadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{t_k}}{\partial A_{ij}} &= \frac{\partial S_{t_k}}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial R_{t_k}}{\partial A_{ij}} \\ &\simeq \frac{\int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{(A+he_i e_j')\tau} \Xi \Sigma_\epsilon \Xi' e^{(A+he_i e_j')'\tau} d\tau - \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A\tau} \Xi \Sigma_\epsilon \Xi' e^{A'\tau} d\tau}{h} \end{aligned}$$

No obstante, si A es diagonal, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{t_k}}{\partial \theta_i} &= \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A\tau} \frac{\partial A}{\partial \theta_i} \tau \Xi \Sigma_\epsilon \Xi' e^{A'\tau} d\tau + \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A\tau} \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_i} \Sigma_\epsilon \Xi' e^{A'\tau} d\tau \\ &\quad + \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A\tau} \Xi \frac{\partial \Sigma_\epsilon}{\partial \theta_i} \Xi' e^{A'\tau} d\tau + \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A\tau} \Xi \Sigma_\epsilon \frac{\partial \Xi'}{\partial \theta_i} e^{A'\tau} d\tau \\ &\quad + \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A\tau} \Xi \Sigma_\epsilon \Xi' \tau \frac{\partial A'}{\partial \theta_i} e^{A'\tau} d\tau \end{aligned}$$

Si en (B.11) se sustituye $\frac{\partial K_{t_k}}{\partial \theta_i}$ por su expresión (B.10), se puede simplificar la expresión resultante, y si entonces se sustituye $\frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i}$ por la ecuación (B.11), después de agrupar términos, se tiene:

$$\frac{\partial P_{t_{k+1}|t_k}}{\partial \theta_i} = \bar{\Phi}_{t_k} \frac{\partial P_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} \bar{\Phi}'_{t_k} + A_{it_k} + A'_{it_k} \quad (\text{B.12})$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{it_k} &= \frac{\partial \bar{\Phi}_{t_k}}{\partial \theta_i} P_{t_k|t_{k-1}} \bar{\Phi}'_{t_k} - K_{t_k} \frac{\partial H_{t_k}}{\partial \theta_i} P_{t_k|t_{k-1}} \bar{\Phi}'_{t_k} \\ &\quad - \frac{\partial E_{t_k}}{\partial \theta_i} S_{t_k} C'_{t_k} K'_{t_k} - E_{t_k} \frac{\partial S_{t_k}}{\partial \theta_i} C'_{t_k} K'_{t_k} - E_{t_k} S_{t_k} \frac{\partial C'_{t_k}}{\partial \theta_i} K'_{t_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial (E_{t_k} Q_{t_k} E'_{t_k})}{\partial \theta_i} \\ &\quad + \frac{1}{2} K_{t_k} \frac{\partial (C_{t_k} R_{t_k} C'_{t_k})}{\partial \theta_i} K'_{t_k} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

6.3 Apéndice C. Cálculo del hessiano.

El término general del hessiano, J_{ij} , viene dado por:

$$J_{ij} = \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (\text{C.1})$$

Si se deriva (B.4) se tiene:

$$\begin{aligned} J_{ij} = & \sum_{k=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial^2 B_{t_k}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right. \\ & + \frac{\partial \tilde{z}'_{t_k}}{\partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} - \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} + \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \\ & - \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_j} + \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \tilde{z}_{t_k} \\ & \left. - \frac{1}{2} \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial^2 B_{t_k}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \tilde{z}_{t_k} \right\} \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

Las expresiones de $\frac{\partial^2 \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ y $\frac{\partial^2 B_{t_k}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ se obtienen directamente si se derivan las ecuaciones (B.5), (B.8), (B.9), (B.10) y (B.11). Si bien los resultados son complejos analíticamente, su programación es simple. No obstante el coste computacional es considerable, y es aproximadamente equivalente a la solución de $[n(n+1)p^2]/2$ ecuaciones.

Si los términos en segundas derivadas y el penúltimo término de la expresión (C.2) son despreciables, la expresión siguiente sería una expresión válida:

$$\begin{aligned} J_{ij} = & \sum_{k=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} \right] + \frac{\partial \tilde{z}'_{t_k}}{\partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} \right. \\ & \left. - \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} - \tilde{z}'_{t_k} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_j} \right\} \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

El cálculo de esta expresión emplea información obtenida en el cálculo del gradiente, y por esto no comporta ningún coste computacional extra. Esta aproximación puede ser válida en la práctica dependiendo de la parametrización del problema.

6.4 Apéndice D. Cálculo de la matriz de información

El término general de la matriz de información es:

$$[M(\theta)]_{ij} = E \left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta} \right] \quad (\text{D.1})$$

Se puede escribir la expresión (C.2) que se obtiene en el Apéndice C de $\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ como:

$$\begin{aligned} J_{ij} = & \sum_{k=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_j} \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial^2 B_{t_k}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right. \\ & + \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{z}'_{t_k}}{\partial \theta_j} \right] - \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} \tilde{z}'_{t_k} \right] + \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{z}'_{t_k} \right] \\ & - \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_j} \tilde{z}'_{t_k} \right] + \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \tilde{z}_{t_k} \tilde{z}'_{t_k} \right] \\ & \left. - \frac{1}{2} \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial^2 B_{t_k}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} B_{t_k}^{-1} \tilde{z}_{t_k} \tilde{z}'_{t_k} \right] \right\} \quad (\text{D.2}) \end{aligned}$$

Si se usa que $E[\tilde{z}_{t_k}] = 0$ y que, de acuerdo con la ecuación (B.5), $\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i}$ no es una función de \tilde{z}_{t_k} , entonces:

$$E \left[\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} \tilde{z}'_{t_k} \right] = 0, \quad E \left[\frac{\partial^2 \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{z}'_{t_k} \right] = 0$$

Si se toman valores esperados en (D.2), se tiene:

$$[M(\theta)]_{ij} = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_j} \right] + \text{tr} \left\{ B_{t_k}^{-1} E \left[\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{z}'_{t_k}}{\partial \theta_j} \right] \right\} \right\} \quad (\text{D.3})$$

Esta expresión coincide con la usada en Watson y Engle (1983), y obtenida en Engle y Watson (1981).

6.4. APÉNDICE D. CÁLCULO DE LA MATRIZ DE INFORMACIÓN 65

Ahora se calculará la expresión correspondiente a $E \left[\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{z}'_{t_k}}{\partial \theta_j} \right]$. Para hacer esto, primero se puede advertir que:

$$E \left[\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{z}'_{t_k}}{\partial \theta_j} \right] = B_{t_k}^{ij} + \overline{\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{z}'_{t_k}}{\partial \theta_j}} \quad (\text{D.4})$$

donde $\overline{\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i}}$ es la media de $\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i}$ y $B_{t_k}^{ij}$ es la matriz de covarianzas de $\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i}$ y $\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_j}$. Entonces:

$$[M(\theta)]_{ij} = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_i} B_{t_k}^{-1} \frac{\partial B_{t_k}}{\partial \theta_j} \right] + \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} B_{t_k}^{ij} \right] + \text{tr} \left[B_{t_k}^{-1} \overline{\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{z}'_{t_k}}{\partial \theta_j}} \right] \right\} \quad (\text{D.5})$$

El problema se reduce entonces al cálculo de $\overline{\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_i}}$, $\overline{\frac{\partial \tilde{z}_{t_k}}{\partial \theta_j}}$ y de $B_{t_k}^{ij}$. Si se nota que la expresión (B.8) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}_{t_{k+1}|t_k}}{\partial \theta_i} &= \bar{\Phi}_{t_k} \frac{\partial \hat{x}_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} + \left[\frac{\partial \Phi_{t_k}}{\partial \theta_i} - K_{t_k} \frac{\partial H_{t_k}}{\partial \theta_i} \right] \hat{x}_{t_k|t_{k-1}} \\ &\quad + \frac{\partial \Gamma_{t_k}}{\partial \theta_i} u_{t_k}^s + \Gamma_{t_k} \frac{\partial u_{t_k}^s}{\partial \theta_i} - K_{t_k} \frac{\partial D_{t_k}}{\partial \theta_i} u_{t_k}^o - K_{t_k} D_{t_k} \frac{\partial u_{t_k}^o}{\partial \theta_i} + \frac{\partial K_{t_k}}{\partial \theta_i} z_{t_k} \end{aligned}$$

si se toman en cuenta las ecuaciones (B.6) y (B.8), se puede escribir el siguiente sistema lineal de dimensión $3n$:

$$x_{t_{k+1}}^c = \Phi_{t_k}^c x_{t_k}^c + (\Gamma_{t_k}^s)^c (u_{t_k}^s)^c + (\Gamma_{t_k}^o)^c (u_{t_k}^o)^c + K_{t_k}^c \tilde{z}_{t_k} \quad (\text{D.6})$$

$$z_{t_k}^c = H_{t_k}^c x_{t_k}^c + D_{t_k}^c (u_{t_k}^o)^c \quad (\text{D.7})$$

donde:

$$\begin{aligned}
x_{t_k}^c &= \left[\hat{x}'_{t_k|t_{k-1}} \quad \frac{\partial \hat{x}'_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_i} \quad \frac{\partial \hat{x}'_{t_k|t_{k-1}}}{\partial \theta_j} \right]' \\
(u_{t_k}^s)^c &= \left[(u_{t_k}^s)' \quad \frac{\partial (u_{t_k}^s)'}{\partial \theta_i} \quad \frac{\partial (u_{t_k}^s)'}{\partial \theta_j} \right]' \\
z_{t_k}^c &= \left[\frac{\partial z'_{t_k}}{\partial \theta_i} \quad \frac{\partial z'_{t_k}}{\partial \theta_j} \right]' \\
(u_{t_k}^o)^c &= \left[(u_{t_k}^o)' \quad \frac{\partial (u_{t_k}^o)'}{\partial \theta_i} \quad \frac{\partial (u_{t_k}^o)'}{\partial \theta_j} \right]'
\end{aligned}$$

y tal que:

$$\begin{aligned}
\Phi_{t_k}^c &= \begin{bmatrix} \Phi_{t_k} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi_{t_k}}{\partial \theta_i} - K_{t_k} \frac{\partial H_{t_k}}{\partial \theta_i} & \bar{\Phi}_{t_k} & 0 \\ \frac{\partial \Phi_{t_k}}{\partial \theta_j} - K_{t_k} \frac{\partial H_{t_k}}{\partial \theta_j} & 0 & \bar{\Phi}_{t_k} \end{bmatrix} \\
(\Gamma_{t_k}^c)^s &= \begin{bmatrix} \Gamma_{t_k} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Gamma_{t_k}}{\partial \theta_i} & \Gamma_{t_k} & 0 \\ \frac{\partial \Gamma_{t_k}}{\partial \theta_j} & 0 & \Gamma_{t_k} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma_{t_k}^c)^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -K_{t_k} \frac{\partial D_{t_k}}{\partial \theta_i} & -K_{t_k} D_{t_k} & 0 \\ -K_{t_k} \frac{\partial D_{t_k}}{\partial \theta_j} & 0 & -K_{t_k} D_{t_k} \end{bmatrix} \\
K_{t_k}^c &= \begin{bmatrix} K_{t_k} \\ \frac{\partial K_{t_k}}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial K_{t_k}}{\partial \theta_j} \end{bmatrix}, \quad H_{t_k}^c = \begin{bmatrix} -\frac{\partial H_{t_k}}{\partial \theta_i} & -H_{t_k} & 0 \\ -\frac{\partial H_{t_k}}{\partial \theta_j} & 0 & -H_{t_k} \end{bmatrix} \\
D_{t_k} &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial D_{t_k}}{\partial \theta_i} & D_{t_k} & 0 \\ -\frac{\partial D_{t_k}}{\partial \theta_j} & 0 & D_{t_k} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Si se define

$$\bar{x}_{t_k}^c = E[x_{t_k}^c], \quad \bar{z}_{t_k}^c = E[z_{t_k}^c]$$

6.4. APÉNDICE D. CÁLCULO DE LA MATRIZ DE INFORMACIÓN 67

y

$$P_{t_k}^c = E \left\{ [x_{t_k}^c - \bar{x}_{t_k}^c] [x_{t_k}^c - \bar{x}_{t_k}^c]' \right\}, \quad B_{t_k}^c = E \left\{ [z_{t_k}^c - \bar{z}_{t_k}^c] [z_{t_k}^c - \bar{z}_{t_k}^c]' \right\}$$

Las ecuaciones de la media y la covarianza del sistema se propagan como sigue:

$$\bar{x}_{t_{k+1}}^c = \Phi_{t_k}^c \bar{x}_{t_k}^c + (\Gamma_{t_k}^s)^c (u_{t_k}^s)^c + (\Gamma_{t_k}^o)^c (u_{t_k}^o)^c \quad (D.8)$$

$$\bar{z}_{t_k}^c = H_{t_k}^c \bar{x}_{t_k}^c + D_{t_k}^c (u_{t_k}^o)^c \quad (D.9)$$

$$P_{t_{k+1}}^c = \Phi_{t_k}^c P_{t_k}^c (\Phi_{t_k}^c)' + K_{t_k}^c B_{t_k}^c (K_{t_k}^c)' \quad (D.10)$$

$$B_{t_k}^c = H_{t_k}^c P_{t_k}^c (H_{t_k}^c)' \quad (D.11)$$

Entonces se dispone de valores de $\frac{\partial \bar{z}_{t_k}^c}{\partial \theta_i}$ y $\frac{\partial \bar{z}_{t_k}^c}{\partial \theta_j}$ de las ecuaciones (D.8) y (D.9). El valor de $B_{t_k}^{ij}$ viene dado por (D.10) y (D.11) puesto que:

$$B_{t_k}^c = \begin{bmatrix} B_{t_k}^{ii} & B_{t_k}^{ij} \\ B_{t_k}^{ji} & B_{t_k}^{jj} \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales de estas ecuaciones son:

$$x_{t_0}^c = [\bar{x}_{t_0}' \quad 0 \quad 0]'$$

$$P_{t_0}^c = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se indica en Terceiro [1990], si no hay un término constante y el sistema es estacionario $\bar{x}_{t_0} = 0$ y P_0 vendrá dado por la ecuación algebraica de Lyapunov correspondiente. En las situaciones no estacionarias, el valor de \bar{x}_{t_0} está dado por la solución estacionaria de (B.6) y $P_0 = 0$.

Apéndice E. Estimaciones y Tablas.

\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
9.4498	.2882	.2261	-1.000	.5302	.0062
(4.3300)	(.0480)	(.0417)	(.0000)	(.3136)	(.0002)
Log-verosimilitud: -11396.7379					

Tabla 1: Las coeficientes que se muestran son las estimaciones máximo-verosímiles correspondientes a la función de verosimilitud gaussiana aproximada implicada por el siguiente modelo de volatilidad estocástica de las tasas de variación instantáneas en tantos por uno del S&P 500 Automobol Industrial Index, de observaciones al cierre diarias consecutivas, desde el 11 de septiembre de 1989 hasta el 14 de octubre de 2002:

$$\begin{aligned}
 d \ln S_t^* &= r dt + v_t^s dW_{1t} \\
 dv_t^s &= (\theta - kv_t^s) dt + \sigma dW_{2t} \\
 \{W_{1t}, t \geq t_0\} \text{ y } \{W_{2t}, t \geq t_0\} &\text{ son movimientos brownianos} \\
 E[dW_{1t}^2] = E[dW_{2t}^2] &= dt, \quad E[dW_{1t}dW_{2s}] = (\rho dt) \delta_{ts} \\
 \ln(S_{t_{k+1}}/S_{t_k}) &= \ln\left(\frac{S_{t_{k+1}}^*}{S_{t_k}^*}\right) + \epsilon_{t_k} \\
 \epsilon_{t_k} &\sim i.i.d. N(0, \sigma_\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

que se construye con el siguiente Modelo Exacto (M.E.) en el espacio de los estados:

$$\begin{aligned}
 x_{t_{k+1}} &= \Phi_{t_k} x_{t_k} + u_{t_k}^s + w_{t_k} \\
 z_{t_k} &= u_{t_k}^o + v_{t_k} \\
 x_{t_k} &= v_{t_k}^s, \quad z_{t_k} = \ln(S_{t_{k+1}}/S_{t_k}) \\
 \Phi_{t_k} &= e^{-k(t_{k+1}-t_k)} \\
 u_{t_k}^s &= \theta \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-kt} dt, \quad u_{t_k}^o = (r + \sigma\rho)(t_{k+1} - t_k) \\
 \rho &= b/(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a^2 = \sqrt{(1-b^2)^2} \\
 w_{t_k} &= \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t_{k+1}-t)} dW_{2t} \\
 v_{t_k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} [v_{t_k}^s e^{-k(t-t_k)} + \theta H(t, t_k)] dW_{1t} + \epsilon_{t_k}, \quad H(t, t_k) = \int_{t_k}^t e^{-k(t-s)} ds \\
 Q_{t_k} &= \sigma^2 \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-2kt} dt \\
 S_{t_k} &= \sigma\rho \left[\int_0^{t_{k+1}-t_k} (v_{t_k}^s e^{-k(t_{k+1}-t_k)} + \theta e^{-k(t_{k+1}-t_k-t)} H(t, 0)) dt \right] \\
 R_{t_k} &= \int_0^{t_{k+1}-t_k} [v_{t_k}^s e^{-kt} + \theta H(t, 0)]^2 dt + \sigma_\epsilon^2
 \end{aligned}$$

donde, además, el filtro de Kalman se inicia con $\hat{x}_{t_0} = \hat{v}_{t_0}^s = \frac{\hat{\theta}}{\hat{k}}$ y la solución de la ecuación de Lyapunov implicada por la ecuación de transición del estado $\hat{P}_{t_0} = E[x_{t_0}^2] = E[(v_{t_0}^s)^2]$.

Entre paréntesis se muestran los valores de las desviaciones típicas de los parámetros, calculadas como desviaciones típicas muestrales a partir de un experimento Monte

Carlo con 25 muestras del mismo horizonte temporal y la misma frecuencia media que la serie empírica.

El modelo aproximado (M.A.) según el esquema de Euler en el espacio de los estados es:

$$\begin{aligned}
 & \textit{Aproximación de Euler (M.A.)} \\
 x_{t_{k+1}} &= \Phi_{t_k} x_{t_k} + u_{t_k}^s + w_{t_k} \\
 z_{t_k} &= u_{t_k}^o + v_{t_k} \\
 x_{t_k} &= v_{t_k}^s, \quad z_{t_k} = \ln(S_{t_{k+1}}/S_{t_k}) \\
 \Phi_{t_k} &= [1 - k(t_{k+1} - t_k)] \\
 u_{t_k}^s &= \theta(t_{k+1} - t_k), \quad u_{t_k}^o = (r + \sigma\rho)(t_{k+1} - t_k) \\
 \rho &= b/(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a^2 = \sqrt{(1 - b^2)^2} \\
 w_{t_k} &= \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_{2t} \\
 v_{t_k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (v_{t_k}^s + [\theta - kv_{t_k}^s](t - t_k)) dW_{1t} \\
 Q_{t_k} &= \sigma^2(t_{k+1} - t_k) \\
 S_{t_k} &= \sigma\rho(t_{k+1} - t_k) \left(\frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} [\theta - kv_{t_k}^s] + v_{t_k}^s \right) \\
 R_{t_k} &= \int_0^{t_{k+1} - t_k} [v_{t_k}^s + [\theta - kv_{t_k}^s]t]^2 dt + \sigma_\epsilon^2
 \end{aligned}$$

Tabla 2: Estadísticos descriptivos de las tasas de variación logarítmicas del S&P 500 Automobiles Industrial Index de observaciones diarias (de cierre) consecutivas:

11 de septiembre de 1989 - 14 de octubre de 2002

(Fuente: Ecowin)

Nºde observaciones	3302
Media:	0
Desviación estándar	.0078
Asimetría	-.0938
Exceso de curtosis sobre la normal	2.3860
Valor mínimo	-.0636, # 3031
Valor máximo	.0355, #577
Jarque-Bera	788.10

Tabla 3: Estadísticos descriptivos de las innovaciones del M.V.E. para las tasas de variación logarítmicas del S&P 500 Automobiles Industrial Index de observaciones diarias (de cierre) consecutivas:

11 de septiembre de 1989 - 14 de octubre de 2002

(Fuente: Ecowin)

Nºde observaciones	3302
Media:	-.0002 $t = -1.61$
Desviación estándar	.0078
Asimetría	-.1058
Exceso de curtosis sobre la normal	2.4791
Valor mínimo	-.0648, # 3031
Valor máximo	.0350, #577
Jarque-Bera	851.7343

Tabla 4: Estadísticos descriptivos de las innovaciones estandarizadas del M.V.E. para las tasas de variación logarítmicas del S&P 500 Automobiles Industrial Index de observaciones diarias (de cierre) consecutivas:

11 de septiembre de 1989 - 14 de octubre de 2002

(Fuente: Ecowin)

Nºde observaciones	3302
Media:	-.0342 $t = -1.9651$
Desviación estándar	.9993
Asimetría	.0123
Exceso de curtosis sobre la normal	.9612
Valor mínimo	-4.0852, # 2677
Valor máximo	3.7774, #2678
Jarque-Bera	127.2053

\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
16.2964	.1598	.1588	-1.000	.1840	.0021
(1.6048)	(.0107)	(.0098)	(.0001)	(.0510)	(.0000)
Log-verosimilitud: -11396.7379					

Tabla 5: Las coeficientes que se muestran son las estimaciones máximo-verosímiles correspondientes a la función de verosimilitud gaussiana aproximada implicada por el siguiente modelo de volatilidad estocástica de las tasas de variación instantáneas en tantos por uno de los tipos de cambio marco/dólar al cierre diarios consecutivos, de observaciones al cierre diarias consecutivas, desde el 4 de enero de 1971 hasta el 22 de octubre de 2002:

$$\begin{aligned}
d \ln S_t^* &= r dt + v_t^s dW_{1t} \\
dv_t^s &= (\theta - k v_t^s) dt + \sigma dW_{2t} \\
\{W_{1t}, t \geq t_0\} \text{ y } \{W_{2t}, t \geq t_0\} &\text{ son movimientos brownianos} \\
E[dW_{1t}^2] = E[dW_{2t}^2] &= dt, \quad E[dW_{1t} dW_{2s}] = (\rho dt) \delta_{ts} \\
\ln(S_{t_{k+1}}/S_{t_k}) &= \ln\left(\frac{S_{t_{k+1}}^*}{S_{t_k}^*}\right) + \epsilon_{t_k} \\
\epsilon_{t_k} &\sim i.i.d. N(0, \sigma_\epsilon^2)
\end{aligned}$$

que se construye con el siguiente Modelo Exacto (M.E.) en el espacio de los estados:

$$\begin{aligned}
x_{t_{k+1}} &= \Phi_{t_k} x_{t_k} + u_{t_k}^s + w_{t_k} \\
z_{t_k} &= u_{t_k}^o + v_{t_k} \\
x_{t_k} &= v_{t_k}^s, \quad z_{t_k} = \ln(S_{t_{k+1}}/S_{t_k}) \\
\Phi_{t_k} &= e^{-k(t_{k+1}-t_k)} \\
u_{t_k}^s &= \theta \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-kt} dt, \quad u_{t_k}^o = (r + \sigma\rho)(t_{k+1} - t_k) \\
\rho &= b / (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a^2 = \sqrt{(1 - b^2)^2} \\
w_{t_k} &= \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-k(t_{k+1}-t)} dW_{2t} \\
v_{t_k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} [v_{t_k}^s e^{-k(t-t_k)} + \theta H(t, t_k)] dW_{1t} + \epsilon_{t_k}, \quad H(t, t_k) = \int_{t_k}^t e^{-k(t-s)} ds \\
Q_{t_k} &= \sigma^2 \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{-2kt} dt \\
S_{t_k} &= \sigma\rho \left[\int_0^{t_{k+1}-t_k} (v_{t_k}^s e^{-k(t_{k+1}-t_k)} + \theta e^{-k(t_{k+1}-t_k-t)} H(t, 0)) dt \right] \\
R_{t_k} &= \int_0^{t_{k+1}-t_k} [v_{t_k}^s e^{-kt} + \theta H(t, 0)]^2 dt + \sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

donde, además, el filtro de Kalman se inicia con $\hat{x}_{t_0} = \hat{v}_{t_0}^s = \frac{\hat{\theta}}{\hat{k}}$ y la solución de la ecuación de Lyapunov implicada por la ecuación de transición del estado $\hat{P}_{t_0} = E[x_{t_0}^2] = E[(v_{t_0}^s)^2]$.

Entre paréntesis se muestran los valores de las desviaciones típicas de los parámetros, calculadas como desviaciones típicas muestrales a partir de un experimento Monte

Carlo con 25 muestras del mismo horizonte temporal y la misma frecuencia media que la serie empírica.

El modelo aproximado (M.A.) según el esquema de Euler en el espacio de los estados es:

$$\begin{aligned}
 & \textit{Aproximación de Euler (M.A.)} \\
 x_{t_{k+1}} &= \Phi_{t_k} x_{t_k} + u_{t_k}^s + w_{t_k} \\
 z_{t_k} &= u_{t_k}^o + v_{t_k} \\
 x_{t_k} &= v_{t_k}^s, \quad z_{t_k} = \ln(S_{t_{k+1}}/S_{t_k}) \\
 \Phi_{t_k} &= [1 - k(t_{k+1} - t_k)] \\
 u_{t_k}^s &= \theta(t_{k+1} - t_k), \quad u_{t_k}^o = (r + \sigma\rho)(t_{k+1} - t_k) \\
 \rho &= b/(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a^2 = \sqrt{(1 - b^2)^2} \\
 w_{t_k} &= \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_{2t} \\
 v_{t_k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (v_{t_k}^s + [\theta - kv_{t_k}^s](t - t_k)) dW_{1t} \\
 Q_{t_k} &= \sigma^2(t_{k+1} - t_k) \\
 S_{t_k} &= \sigma\rho(t_{k+1} - t_k) \left(\frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} [\theta - kv_{t_k}^s] + v_{t_k}^s \right) \\
 R_{t_k} &= \int_0^{t_{k+1} - t_k} [v_{t_k}^s + [\theta - kv_{t_k}^s]t]^2 dt + \sigma_\epsilon^2
 \end{aligned}$$

Tabla 6: Estadísticos descriptivos de las tasas de variación logarítmicas del tipo de cambio marco/dólar de observaciones diarias (de cierre) consecutivas:

4 de enero de 1971-22 de octubre de 2002

(Fuente: Ecwin)

Nº de observaciones	8069
Media:	0
Desviación estándar	.0029
Asimetría	-.1164
Exceso de curtosis sobre la normal	4.6915
Valor mínimo	-.0269, # 525
Valor máximo	.0255, #1958
Jarque-Bera	7418.35

Tabla 7: Estadísticos descriptivos de las innovaciones del M.V.E. para las tasas de variación logarítmicas del tipo de cambio marco/dólar de observaciones diarias (de cierre) consecutivas:

4 de enero de 1971-22 de octubre de 2002

(Fuente: Ecwin)

Nº de observaciones	8069
Media:	.0000 $t = -1.1404$
Desviación estándar	.0029
Asimetría	-.1168
Exceso de curtosis sobre la normal	4.6931
Valor mínimo	-.0269, # 525
Valor máximo	.0255, #1958
Jarque-Bera	7423.2848

Tabla 8: Estadísticos descriptivos de las innovaciones estandarizadas del M.V.E. para las tasas de variación logarítmicas del tipo de cambio marco/dólar de observaciones diarias (de cierre) consecutivas:

4 de enero de 1971-22 de octubre de 2002

(Fuente: Ecwin)

Nº de observaciones	8069
Media:	-.0129 $t = -1.1412$
Desviación estándar	1.0139
Asimetría	-.1474
Exceso de curtosis sobre la normal	3.2169
Valor mínimo	-7.2567, # 525
Valor máximo	6.7479, #1958
Jarque-Bera	3508.5108

		\hat{A}_{11}	\hat{A}_{12}	\hat{A}_{21}	\hat{A}_{22}	\hat{F}_{11}	\hat{F}_{12}	\hat{F}_{22}
		-1.5	0	0	-1.5	1.5	.2	1.5
<i>M.E.</i>	θ_p	-1.82	.03	-.06	-1.78	1.58	.30	1.52
	s_p	(.50)	(.64)	(.70)	(.67)	(.20)	(.19)	(.17)
<i>M.A.</i>	θ_p	-1.52	.03	-.05	-1.48	1.38	.19	1.37
	s_p	(.38)	(.45)	(.52)	(.47)	(.16)	(.14)	(.12)

$N = 100, a = d = .1$
100 simulaciones

		\hat{A}_{11}	\hat{A}_{12}	\hat{A}_{21}	\hat{A}_{22}	\hat{F}_{11}	\hat{F}_{12}	\hat{F}_{22}
		-1.5	.0	0	-1.5	1.5	.2	1.5
<i>M.E.</i>	θ_p	-1.95	.02	-.04	-1.80	1.63	.26	1.60
	s_p	(.47)	(.53)	(.49)	(.53)	(.26)	(.28)	(.29)
<i>M.A.</i>	θ_p	-1.25	-.02	-.03	-1.18	1.29	.14	1.30
	s_p	(.25)	(.25)	(.26)	(.25)	(.20)	(.16)	(.21)

$N = 100, a = .4, d = .1$
100 simulaciones

		\hat{A}_{11}	\hat{A}_{12}	\hat{A}_{21}	\hat{A}_{22}	\hat{F}_{11}	\hat{F}_{12}	\hat{F}_{22}
		-1.5	.0	0	-1.5	1.5	.2	1.5
<i>M.E.</i>	θ_p	-1.65	.02	-.00	-1.55	1.55	.25	1.53
	s_p	(.24)	(.20)	(.23)	(.28)	(.14)	(.09)	(.14)
<i>M.A.</i>	θ_p	-1.40	-.01	-.00	-1.32	1.38	.20	1.37
	s_p	(.18)	(.16)	(.18)	(.21)	(.13)	(.08)	(.12)

$N = 500, a = d = .1$
100 simulaciones

		\hat{A}_{11}	\hat{A}_{12}	\hat{A}_{21}	\hat{A}_{22}	\hat{F}_{11}	\hat{F}_{12}	\hat{F}_{22}
		-1.5	.0	0	-1.5	1.5	.2	1.5
<i>M.E.</i>	θ_p	-1.77	-.01	.01	-1.72	1.60	.27	1.57
	s_p	(.23)	(.18)	(.23)	(.26)	(.24)	(.12)	(.24)
<i>M.A.</i>	θ_p	-1.16	-.01	.02	-1.14	1.30	.19	1.29
	s_p	(.12)	(.10)	(.12)	(.12)	(.20)	(.09)	(.19)

$N = 500, a = .4, d = .1$
100 simulaciones

Tabla 9: Las tablas que se muestran arriba son los resultados de las estimaciones máximo-verosímiles correspondientes a la función de verosimilitud gaussiana del Modelo Exacto de Orstein Uhlenbeck (M.E.) y del Modelo Aproximado según el esquema de Euler (M.A.) para las diferentes frecuencias medias de observación y número de observaciones que considero, representadas por f y N , respectivamente, y los valores paramétricos impuestos. Cada uno de los resultados se obtiene a partir de 100 simulaciones independientes del M.E.

El modelo de Orstein Uhlenbeck que examino viene dado por la ecuación diferencial estocástica de primer orden:

$$dy_t = Ay_t dt + d\varepsilon_t$$

donde $\{\varepsilon_t, t \geq t_0\}$ es un movimiento browniano tal que:

$$E[d\varepsilon_t] = 0, \quad E[d\varepsilon_t d\varepsilon'_s] = (\Sigma_\varepsilon dt) \delta_{ts}$$

y se dispone de una muestra de las realizaciones de $\{y_{t_k}\}$ en un total de N instantes discretos consecutivos, separados por $N - 1$ intervalos de muestreo sucesivos, $\{t_{k+1} - t_k\}$, conocidos. Entonces, su forma reducida puede escribirse:

$$y_{t_{k+1}} = e^{A(t_{k+1}-t_k)} y_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\varepsilon_\tau$$

De modo que, la forma en el espacio de los estados del Modelo Exacto de Orstein Uhlenbeck (M.E.) es:

$$\begin{aligned} x_{t_{k+1}} &= \Phi_{t_k} x_{t_k} + E_{t_k} w_{t_k} \\ y_{t_k} &= x_{t_k} + v_{t_k} \\ \Phi_{t_k} &= E_{t_k} = [e^{A(t_{k+1}-t_k)}] \\ w_{t_k} &= v_{t_k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\varepsilon_\tau \\ Q_{t_k} &= S_{t_k} = R_{t_k} = \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A\tau} \Sigma_\varepsilon e^{A'\tau} d\tau \\ chol(\Sigma_\varepsilon) &= F \end{aligned}$$

mintras que la forma en el espacio de los estados del Modelo Aproximado según el esquema de Euler (M.A.) es:

$$\begin{aligned} x_{t_{k+1}} &= \Phi_{t_k} x_{t_k} + E_{t_k} w_{t_k} \\ y_{t_k} &= x_{t_k} + v_{t_k} \\ \Phi_{t_k} &= E_{t_k} = [I + A(t_{k+1} - t_k)] \\ w_{t_k} &= v_{t_k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\varepsilon_\tau \\ Q_{t_k} &= S_{t_k} = R_{t_k} = \Sigma_\varepsilon(t_{k+1} - t_k) \\ chol(\Sigma_\varepsilon) &= F \end{aligned}$$

$\bar{\theta}_p$ y s_p denotan, respectivamente, la media y la desviación estándar de los parámetros estimados a partir de 100 simulaciones independientes del M.E., para diferentes frecuencias medias de observación y número de observaciones, representadas por f y N , respectivamente.

Los intervalos temporales entre las observaciones consecutivas se generan mediante $(t_{k+1} - t_k) \sim_{i.i.d.} U(a, a + d)$. Por lo tanto, $f = (2a + d)/2$.

		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
		9.4498	.2882	.2261	-1.0000	.5302	.0062
<i>M.E.</i>	θ_p	11.6856	.2929	.2230	-1.0000	.7660	.0060
	s_p	(4.3300)	(.0480)	(.0417)	(.0000)	(.3136)	(.0002)
<i>M.A.</i>	θ_p	11.3400	.2865	.2165	-1.0000	.7431	.0060
	s_p	(4.0893)	(.0460)	(.0392)	(.0000)	(.2956)	(.0002)
$h = 13$ (años), $f = (7/5)$ (días) 25 simulaciones							
		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
		9.4498	.2882	.2261	-1.0000	.5302	.0062
<i>M.E.</i>	θ_p	11.4383	.2931	.2354	-1.0000	.7148	.0061
	s_p	(3.8732)	(.0647)	(.0557)	(.0000)	(.2410)	(.0001)
<i>M.A.</i>	θ_p	11.1735	.2880	.2306	-1.0000	.6981	.0061
	s_p	(3.6716)	(.0646)	(.0555)	(.0000)	(.2219)	(.0001)
$h = 13$ (años), $f = (7/5)$ (1/2) (días) 25 simulaciones							
		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
		9.4498	.2882	.2261	-1.0000	.5302	.0062
<i>M.E.</i>	θ_p	11.0443	.2490	.2400	-.9311	.6677	.0061
	s_p	(2.4829)	(.0950)	(.0794)	(.3400)	(.3097)	(.0001)
<i>M.A.</i>	θ_p	11.1874	.2441	.2389	-.9297	.6785	.0061
	s_p	(2.5448)	(.0977)	(.0807)	(.3403)	(.3031)	(.0001)
$h = 5$ (años), $f = (7/5)$ (1/6) (días) 25 simulaciones							
		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
		9.4498	.2882	.2261	-1.0000	.5302	.0062
<i>M.E.</i>	θ_p	9.9427	.2608	.2118	-1.0026	.5798	.0062
	s_p	(4.0591)	(.0970)	(.0826)	(.2255)	(.2668)	(.0001)
<i>M.A.</i>	θ_p	10.004	.2543	.2126	-1.0012	.5834	.0062
	s_p	(4.0123)	(.1126)	(.0820)	(.2251)	(.2638)	(.0001)
$h = 7.5$ (años), $f = (7/5)$ (1/5) (días) 25 simulaciones							

Tabla 10: Resultados de las estimaciones del Modelo Exacto (M.E.) y del Modelo Aproximado (M.A.), donde $\bar{\theta}_p$ y s_p denotan, respectivamente, la media y la desviación estándar de los parámetros estimados a partir de 25 simulaciones independientes del M.E., para diferentes frecuencias medias de observación y longitudes temporales de la muestra completa, representadas por f y h , respectivamente.

Los valores paramétricos que se emplean en las simulaciones son los estimados para el M.E. con la muestra empírica de las tasas de variación en tantos

por uno del S&P 500 Automobol Industrial Index, de observaciones al cierre consecutivas, desde el 11 de septiembre de 1989 hasta el 14 de octubre de 2002.

Los intervalos temporales entre las observaciones consecutivas se generan mediante $(t_{k+1} - t_k) \sim_{i.i.d.} U(0, \delta)$, donde $\delta/2$ es el intervalo de muestreo medio. N representa el número de observaciones. Por ejemplo, si se recoge un promedio de una observación por día de apertura, durante un año, considero que $\delta = (2) (7/5) (1/7)(1/52)$ y $N = (5/7) (7) (52)$.

Entonces, $h = \frac{N\delta}{2}$ representa el número (medio) de años que abarca la muestra simulada y $f = \frac{\delta}{2} (7) (52)$ es el tiempo medio en días entre dos observaciones consecutivas.

		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
		9.4498	.2882	.2261	-1.0000	.5302	.0062
<i>M.E.</i>	θ_p	13.1711	.3120	.2587	-1.0296	.8159	.0060
	s_p	(7.2712)	(.1319)	(.1180)	(.2759)	(.5860)	(.0003)
<i>M.A.</i>	θ_p	13.7257	.3148	.2688	-1.0424	.8378	.0060
	s_p	(7.8634)	(.1451)	(.1059)	(.2677)	(.6830)	(.0003)
$h = 2$ (años), $f = (7/5)$ (1/2) (días)							
25 simulaciones							
		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
		9.4498	.2882	.2261	-1.0000	.5302	.0062
<i>M.E.</i>	θ_p	12.3904	.2933	.2437	-.9931	.7601	.0059
	s_p	(6.7664)	(.1258)	(.1129)	(.0537)	(.4833)	(.0003)
<i>M.A.</i>	θ_p	12.6398	.2954	.2443	-.9934	.7776	.0059
	s_p	(7.1500)	(.1225)	(.1138)	(.0523)	(.5147)	(.0003)
$h = 3$ (años), $f = (7/5)$ (1/2) (días)							
25 simulaciones							
		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
		9.4498	.2882	.2261	-1.0000	.5302	.0062
<i>M.E.</i>	θ_p	10.7197	.2665	.1982	-1.0335	.6215	.0061
	s_p	(5.0808)	(.0881)	(.0902)	(.1672)	(.3710)	(.0002)
<i>M.A.</i>	θ_p	10.7869	.2626	.1991	-1.0213	.6281	.0061
	s_p	(5.1493)	(.0942)	(.0926)	(.1797)	(.3684)	(.0002)
$h = 5$ (años), $f = (7/5)$ (1/4) (días)							
25 simulaciones							
		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
		9.4498	.2882	.2261	-1.0000	.5302	.0062
<i>M.E.</i>	θ_p	9.8138	.2589	.1937	-1.0223	.6104	.0061
	s_p	(3.8697)	(.0834)	(.0571)	(.1102)	(.2324)	(.0001)
<i>M.A.</i>	θ_p	9.8873	.2621	.1958	-1.0265	.6091	.0061
	s_p	(3.9670)	(.0846)	(.0603)	(.1096)	(.2268)	(.0001)
$h = 7.5$ (años), $f = (7/5)$ (1/4) (días)							
25 simulaciones							

Tabla 11: Resultados de las estimaciones del Modelo Exacto (M.E.) y del Modelo Aproximado (M.A.), donde $\bar{\theta}_p$ y s_p denotan, respectivamente, la media y la desviación estándar de los parámetros estimados a partir de 25 simulaciones independientes del M.E., para diferentes frecuencias medias de observación y longitudes temporales de la muestra completa, representadas por f y h , respectivamente.

Los valores paramétricos que se emplean en las simulaciones son los estimados para el M.E. con la muestra empírica de las tasas de variación en tantos

por uno del S&P 500 Automobol Industrial Index, de observaciones al cierre consecutivas, desde el 11 de septiembre de 1989 hasta el 14 de octubre de 2002.

Los intervalos temporales entre las observaciones consecutivas se generan mediante $(t_{k+1} - t_k) \sim_{i.i.d.} U(0, \delta)$, donde $\delta/2$ es el intervalo de muestreo medio. N representa el número de observaciones. Por ejemplo, si se recoge un promedio de una observación por día de apertura, durante un año, considero que $\delta = (2) (7/5) (1/7)(1/52)$ y $N = (5/7) (7) (52)$.

Entonces, $h = \frac{N\delta}{2}$ representa el número (medio) de años que abarca la muestra simulada y $f = \frac{\delta}{2} (7) (52)$ es el tiempo medio en días entre dos observaciones consecutivas.

		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$
		16.2964	.1598	.1588	-1.0000	.1840	.0021
<i>M.E.</i>	θ_p	16.8028	.1167	.1170	-1.0000	.3919	.0020
	s_p	(1.6048)	(.0107)	(.0098)	(.0001)	(.0510)	(.0000)
<i>M.A.</i>	θ_p	16.2445	.1124	.1127	-1.0000	.3787	.0020
	s_p	(1.2561)	(.0104)	(.0089)	(.0001)	(.0397)	(.0000)
$h = 33$ (años), $f = (7/5)$ (días)							
25 simulaciones							
		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$
		16.2964	.1598	.1588	-1.0000	.1840	.0021
<i>M.E.</i>	θ_p	15.6623	.0958	.1165	-1.0524	.3235	.0021
	s_p	(1.7764)	(.0549)	(.0401)	(.2144)	(.1338)	(.0001)
<i>M.A.</i>	θ_p	15.9874	.0961	.1163	-1.0424	.3282	.0021
	s_p	(2.3041)	(.0552)	(.0414)	(.2137)	(.1194)	(.0001)
$h = 2.5$ (años), $f = (7/5)(1/4)$ (días)							
25 simulaciones							
		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$
		16.2964	.1598	.1588	-1.0000	.1840	.0021
<i>M.E.</i>	θ_p	15.8858	.1096	.1220	-.9393	.3114	.0021
	s_p	(1.7764)	(.0716)	(.0520)	(.1890)	(.1633)	(.0001)
<i>M.A.</i>	θ_p	15.8524	.0961	.1219	-.9320	.3101	.0021
	s_p	(3.6339)	(.0689)	(.0502)	(.1815)	(.1630)	(.0001)
$h = 2.5$ (años), $f = (7/5)(1/6)$ (días)							
25 simulaciones							
		\hat{k}	\hat{r}	$\hat{\sigma}$	\hat{b}	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}_\varepsilon$
		16.2964	.1598	.1588	-1.0000	.1840	.0021
<i>M.E.</i>	θ_p	15.8193	.1148	.1252	-.9407	.3141	.0021
	s_p	(1.5571)	(.0673)	(.0449)	(.2336)	(.1339)	(.0000)
<i>M.A.</i>	θ_p	16.2276	.1175	.1282	-.9386	.3240	.0021
	s_p	(1.4799)	(.0642)	(.0415)	(.2382)	(.1461)	(.0000)
$h = 2.5$ (años), $f = (7/5)(1/10)$ (días)							
25 simulaciones							

Tabla 12: Resultados de las estimaciones del Modelo Exacto (M.E.) y del Modelo Aproximado (M.A.), donde $\bar{\theta}_p$ y s_p denotan, respectivamente, la media y la desviación estándar de los parámetros estimados a partir de 25 simulaciones independientes del M.E., para diferentes frecuencias medias de observación y longitudes temporales de la muestra completa, representadas por f y h , respectivamente.

Los valores paramétricos que se emplean en las simulaciones son los estimados para el M.E. con la muestra empírica de las tasas de variación en tantos por

uno del tipo de cambio marco/dólar, de observaciones al cierre consecutivas, desde el 4 de enero de 1971 hasta el 22 de octubre de 2002.

Los intervalos temporales entre las observaciones consecutivas se generan mediante $(t_{k+1} - t_k) \sim_{i.i.d.} U(0, \delta)$, donde $\delta/2$ es el intervalo de muestreo medio. N representa el número de observaciones. Por ejemplo, si se recoge un promedio de una observación por día de apertura, durante un año, considero que $\delta = (2) (7/5) (1/7)(1/52)$ y $N = (5/7) (7) (52)$.

Entonces, $h = \frac{N\delta}{2}$ representa el número (medio) de años que abarca la muestra simulada y $f = \frac{\delta}{2} (7) (52)$ es el tiempo medio en días entre dos observaciones consecutivas.

Apéndice F. Gráficos.

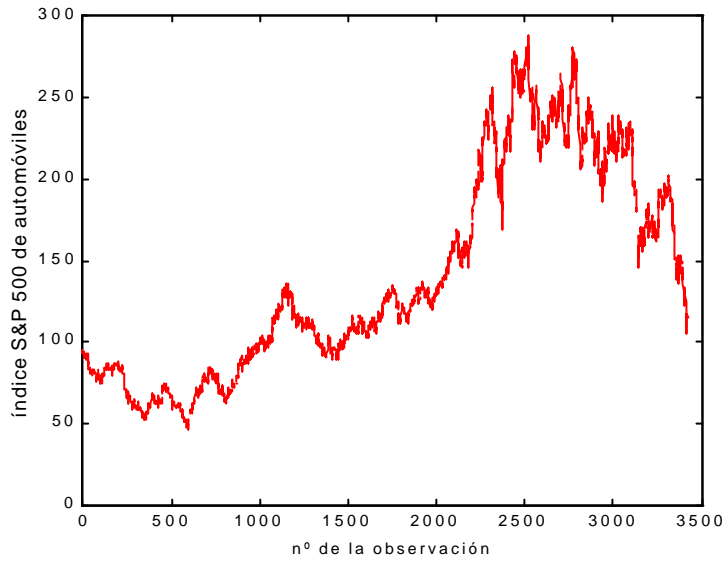


Figura 1: Serie del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index (observaciones diarias al cierre) entre el 11-9-89 y el 14-10-02.

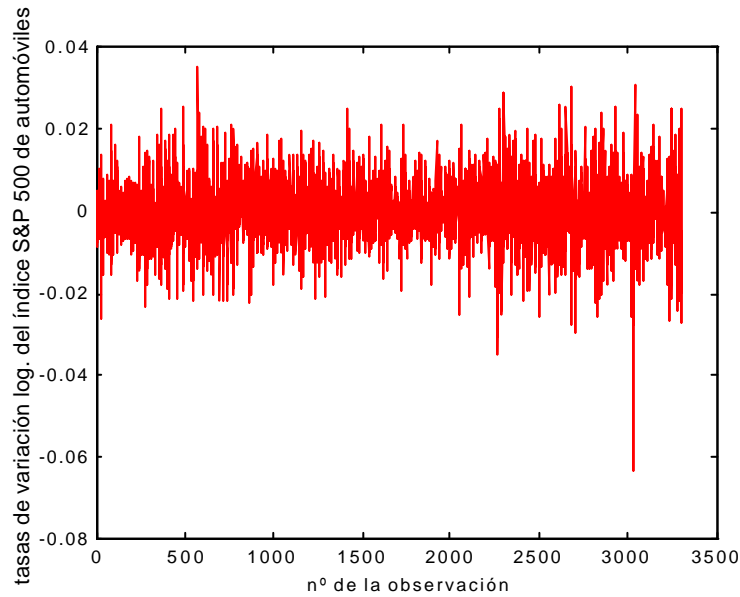


Figura 2: Tasas de variación logarítmicas del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index (observaciones diarias al cierre) entre 11-9-89 y 14-10-02.

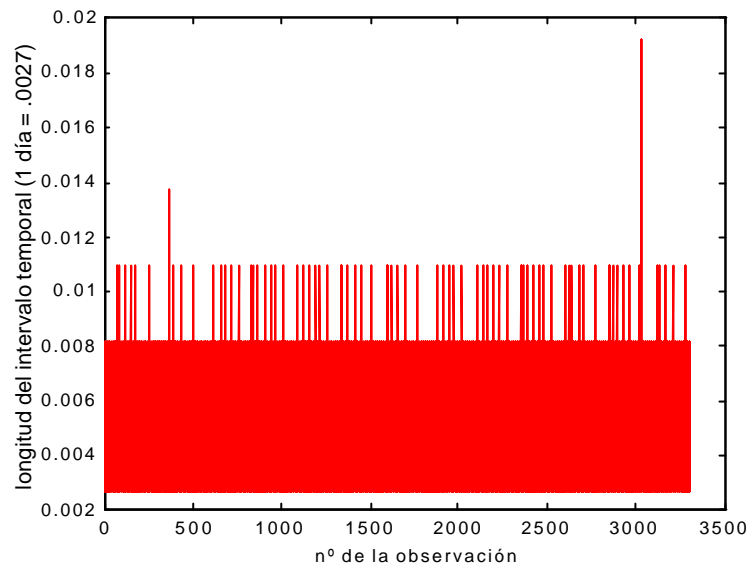


Figura 3: Serie de la longitud de los intervalos de muestreo entre las observaciones consecutivas (un día = .0027) del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index entre el 11-9-89 y el 22-10-02.

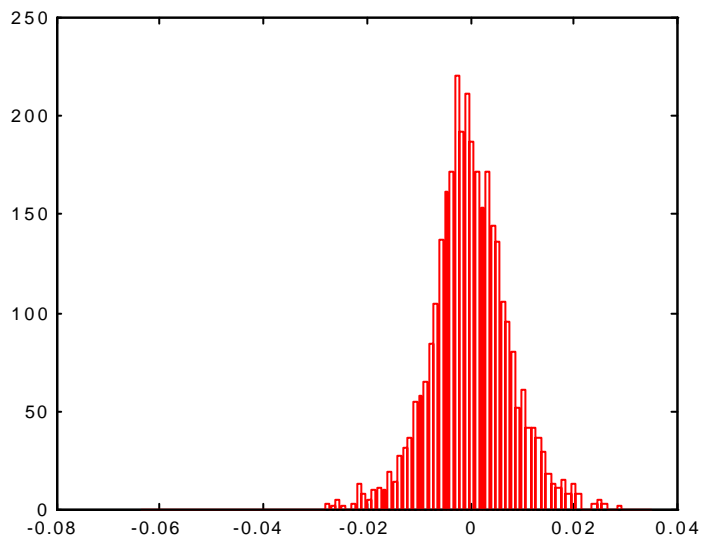


Figura 4: Histograma de las tasas de variación logarítmicas de la serie del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index (observaciones diarias al cierre) entre el 11-9-89 y el 22-10-02.

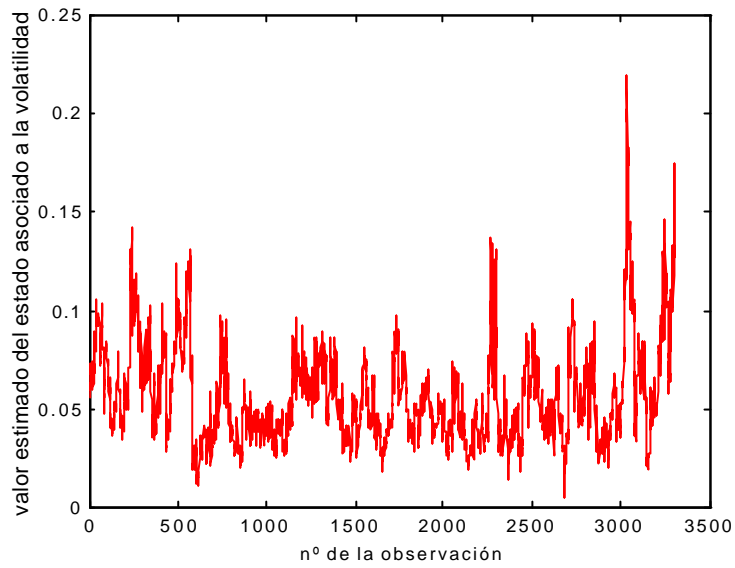


Figura 5: Estimaciones del estado de la volatilidad del modelo de volatilidad estocástica con las tasas de variación logarítmica del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index (observaciones diarias al cierre) entre el 11-9-89 y el 22-10-02.

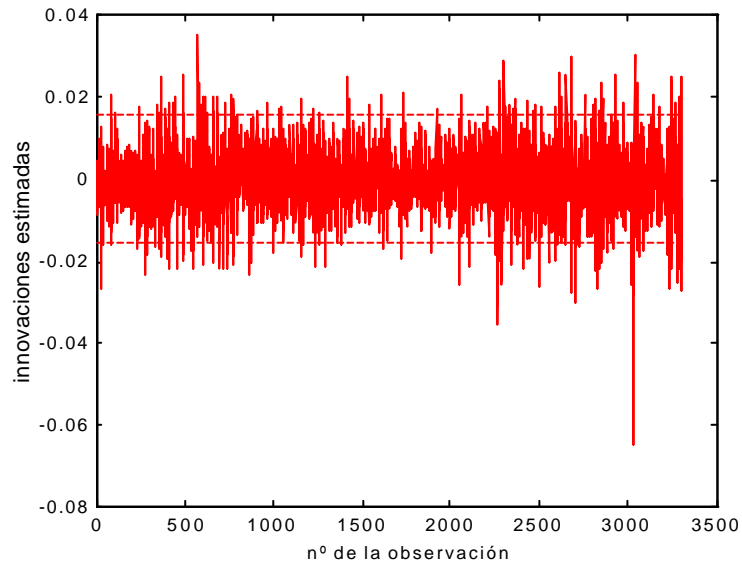


Figura 6: Innovaciones estimadas del modelo de volatilidad estocástica con las tasas de variación logarítmica del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index (diarias al cierre) entre el 11-9-89 y el 22-10-02.

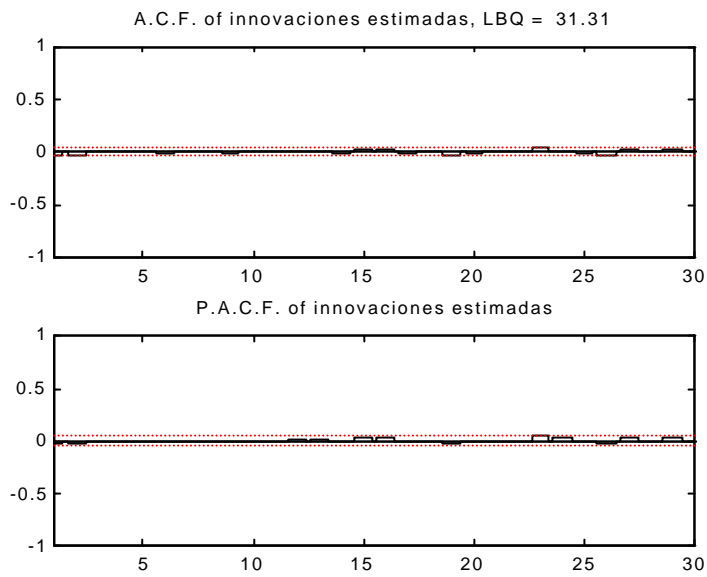


Figura 7: Funciones de autocorrelación simple y parcial de las innovaciones estimadas en el modelo de volatilidad estocástica con las tasas de variación logarítmicas del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index (observaciones diarias al cierre) entre el 11-9-89 y el 22-10-02.

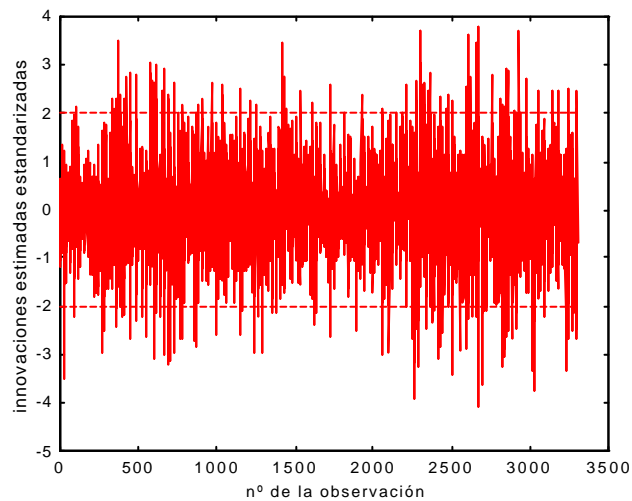


Figura 8: Innovaciones estandarizadas estimadas del modelo de volatilidad estocástica con las tasas de variación logarítmicas del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index (observaciones diarias al cierre) entre el 11-9-89 y el 22-10-02.

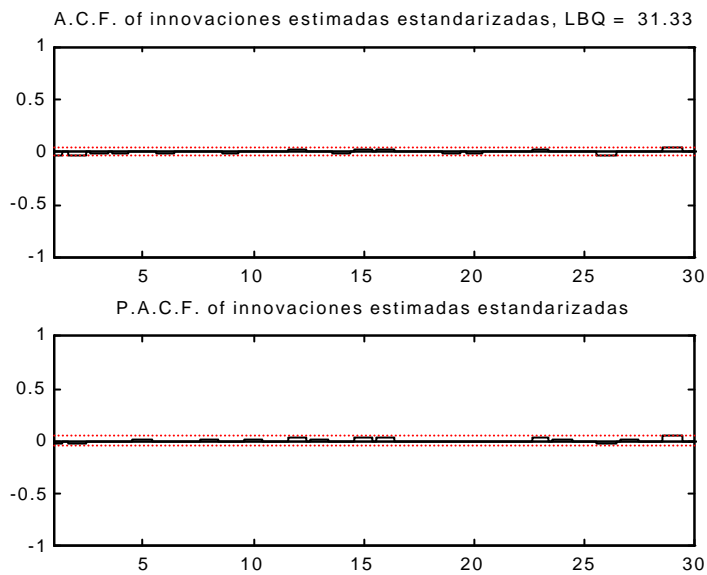


Figura 9: Funciones de autocorrelación simple y parcial de las innovaciones estandarizadas estimadas del modelo de volatilidad estocástica con las tasas de variación logarítmicas del USA S&P 500 Automobiles Industrial Index entre el 11-9-89 y el 22-10-02.

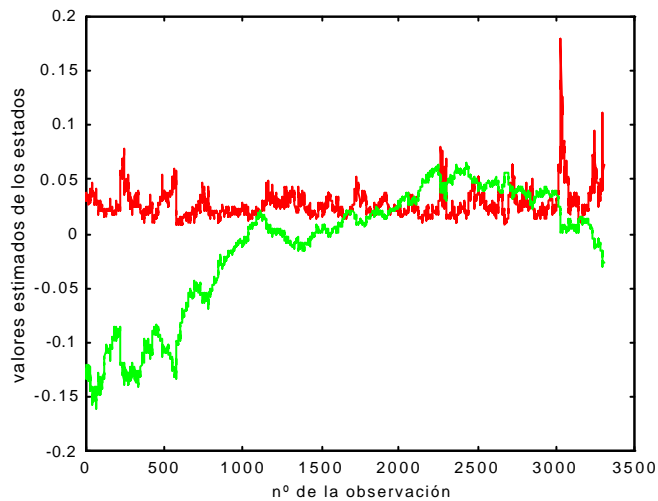


Figura 10: Serie de los estados de la volatilidad y la tendencia estimados con el modelo de dos factores con las tasas de variación logarítmicas del USA Automobiles Industrial Index (observaciones diarias al cierre) entre el 11-9-89 y el 22-10-02.

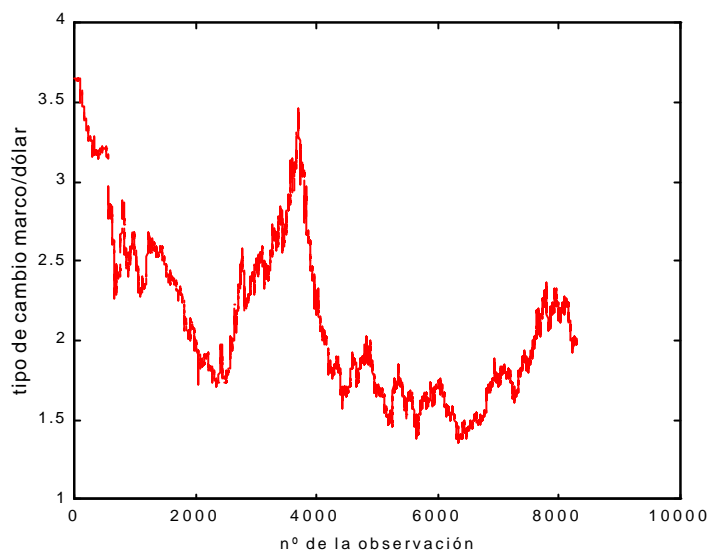


Figura 11: Serie del tipo de cambio marco/dólar diario al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02.

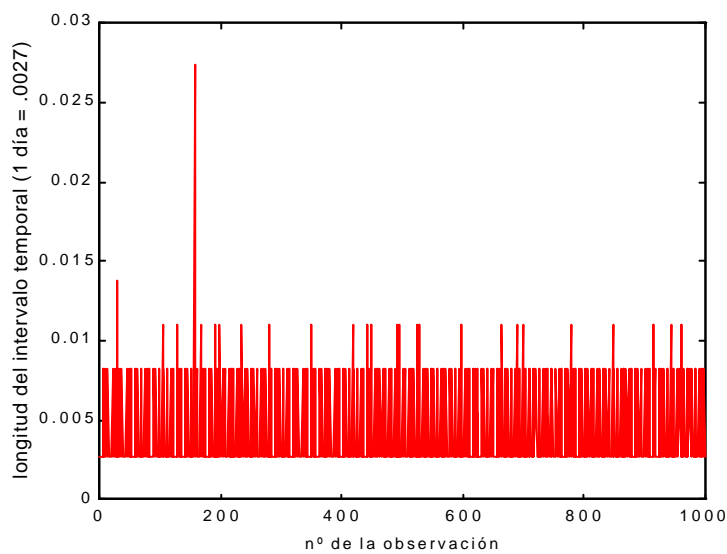


Figura 12: Serie de las longitudes de los mil primeros intervalos de muestreo (un día = .0027) entre las observaciones de la serie del tipo de cambio marco/dólar diario al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02.

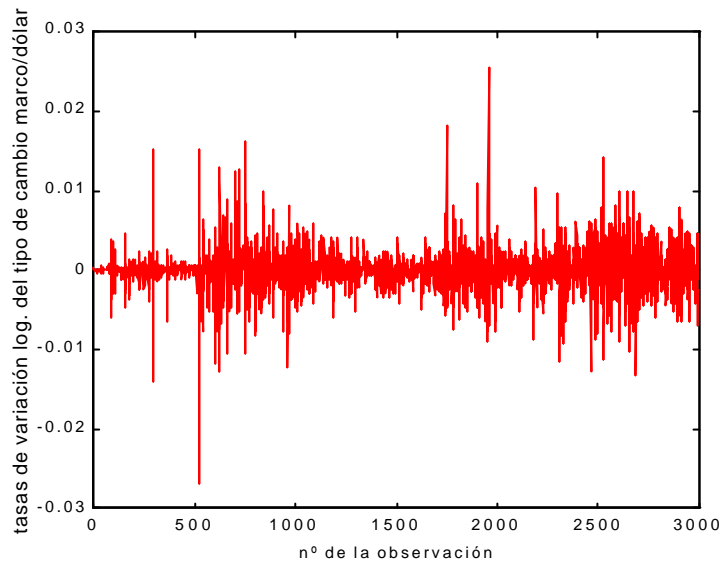


Figura 13: Serie de las tres mil primeras tasas de variación logarítmicas de las observaciones diarias al cierre del tipo de cambio marco/dólar entre el 4-1-71 y el 22-10-02

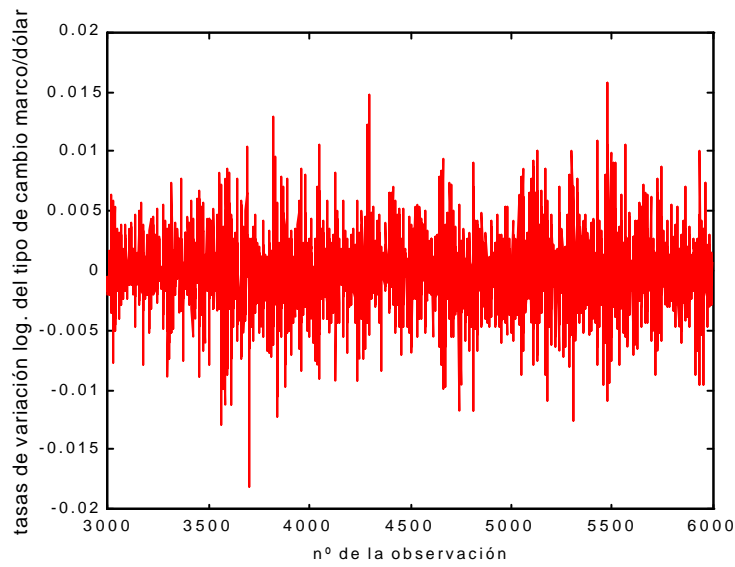


Figura 14: Serie de las segundas tres mil tasas de variación logarítmicas de las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02.

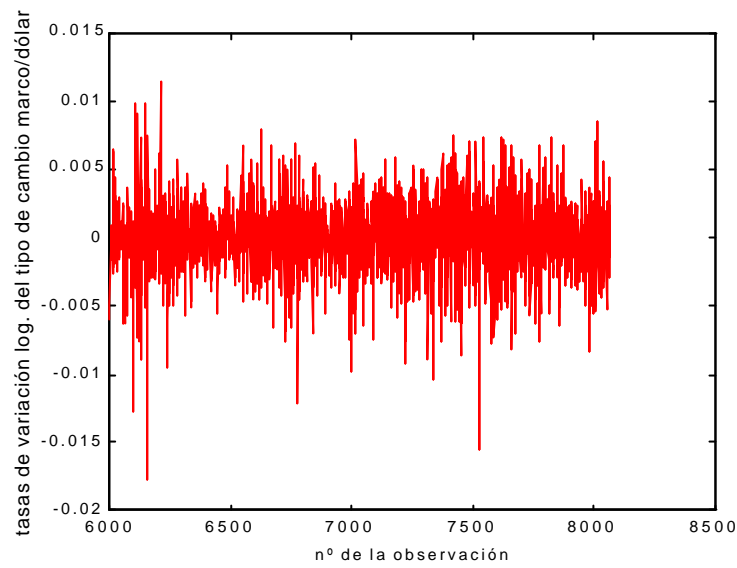


Figura 15: Serie de las tasas de variación logarítmica desde la seis mil a la última de las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diario al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02.

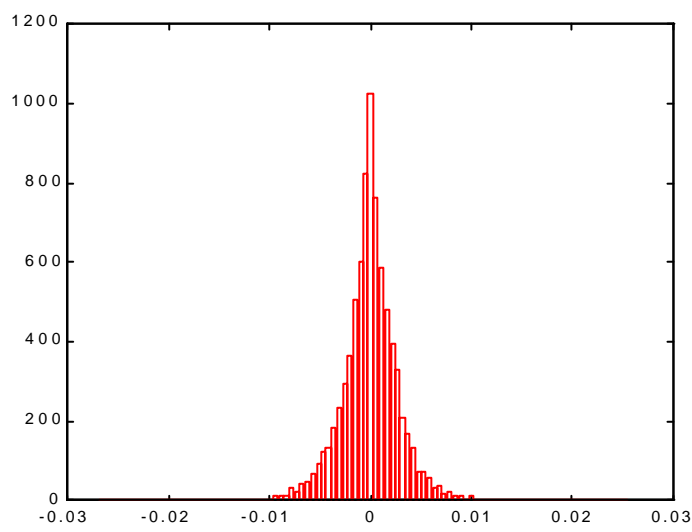


Figura 16: Histograma de las tasas de variación del tipo de cambio marco/dólar diario al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02.

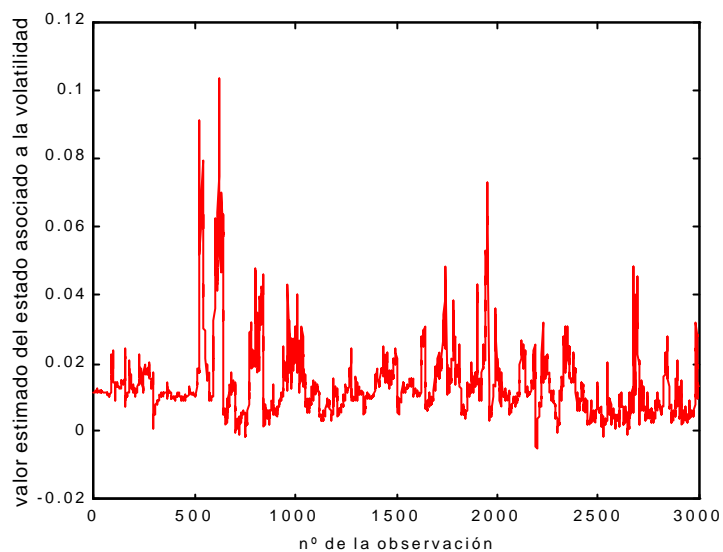
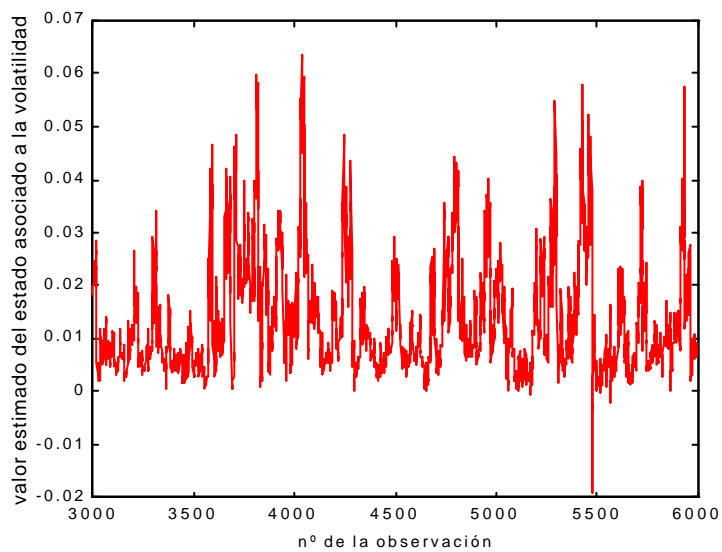


Figura 17: Serie de las estimaciones de los tres mil primeros valores del estado del modelo de volatilidad estocástica con las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02.



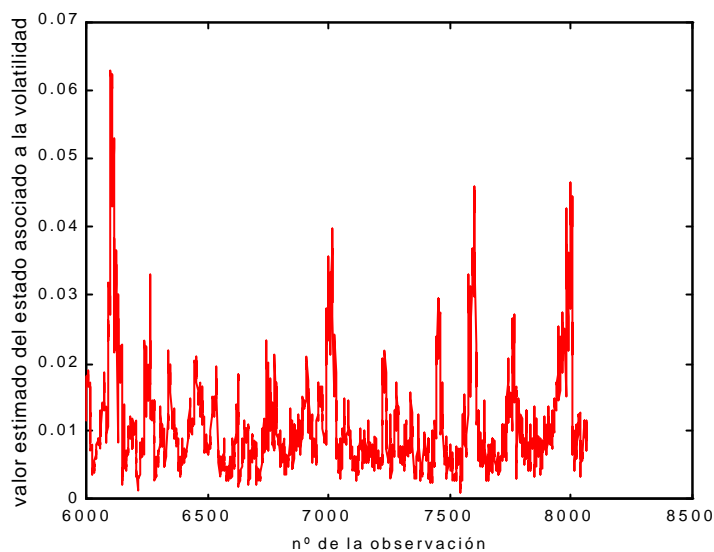


Figura 19: Serie de las estimaciones de los valores del estado entre el seis mil y el último del modelo de volatilidad estocástica con las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02

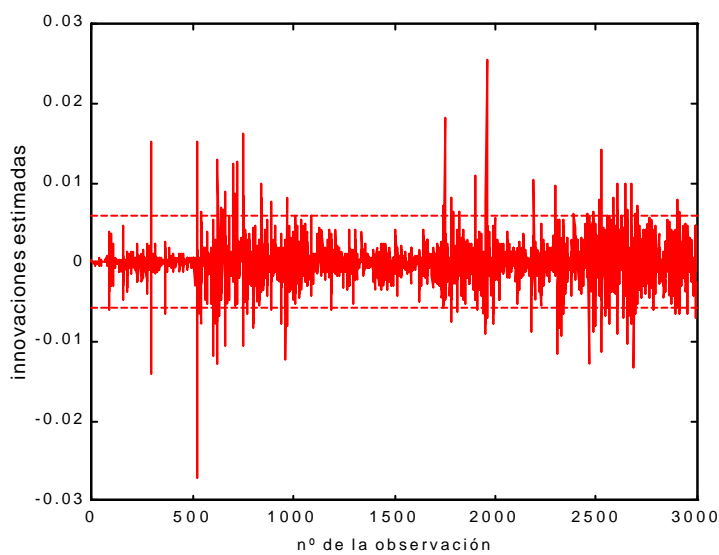


Figura 20: Serie de las estimaciones de las primeras tres mil innovaciones del modelo de volatilidad estocástica con las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02

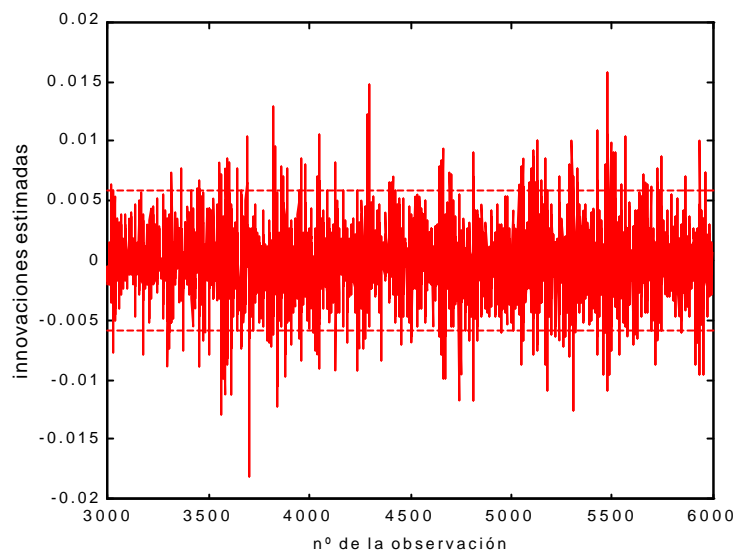


Figura 21: Serie de las estimaciones de las segundas tres mil innovaciones del modelo de volatilidad estocástica con las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02

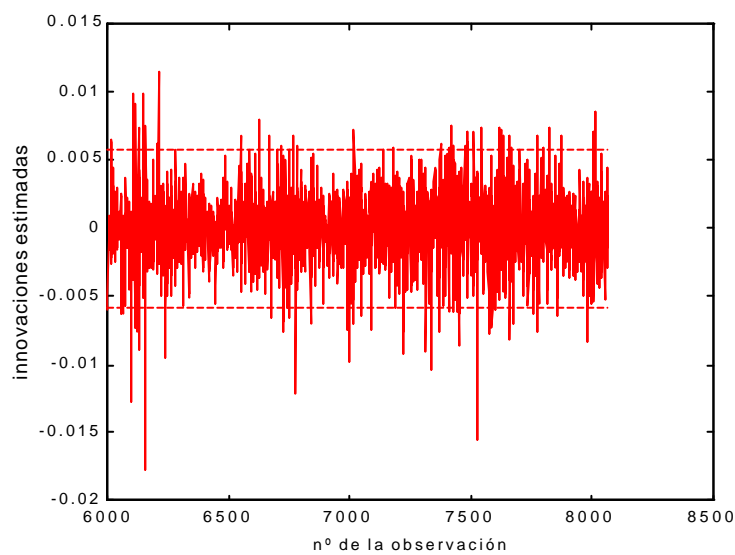


Figura 22: Serie de las estimaciones de las innovaciones entre la seis mil y la última del modelo de volatilidad estocástica con las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02

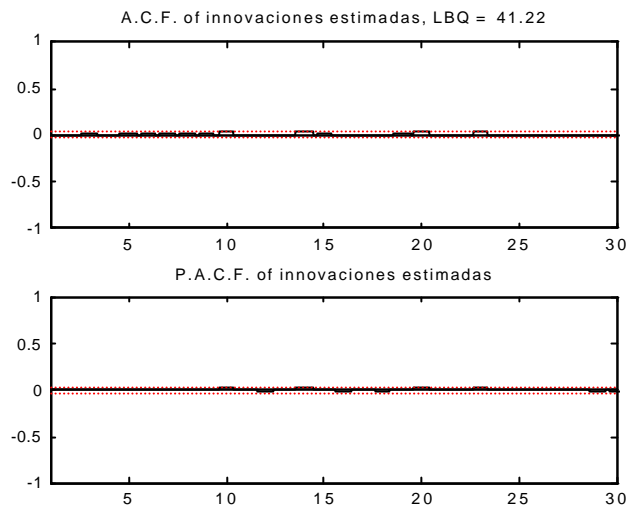


Figura 23: Funciones de autocorrelación simple y parcial de las innovaciones estimadas en el modelo de volatilidad estocástica con las tasas de variación logarítmicas de las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02.

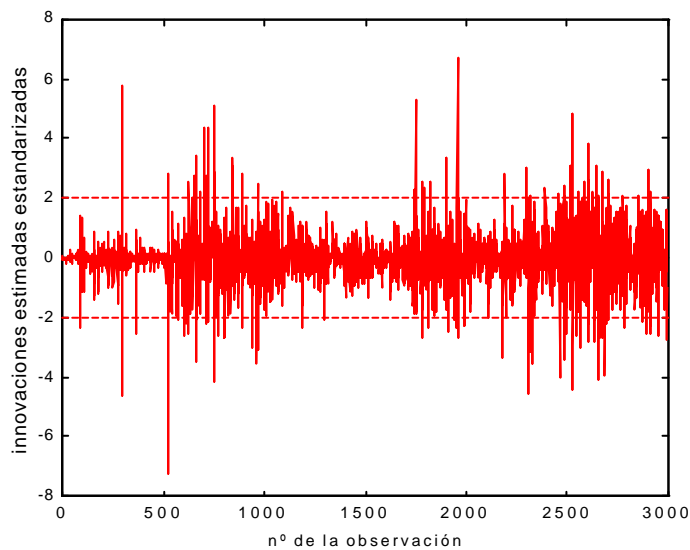


Figura 24: Serie de las estimaciones de las primeras tres mil innovaciones estandarizadas del modelo de volatilidad estocástica con las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02

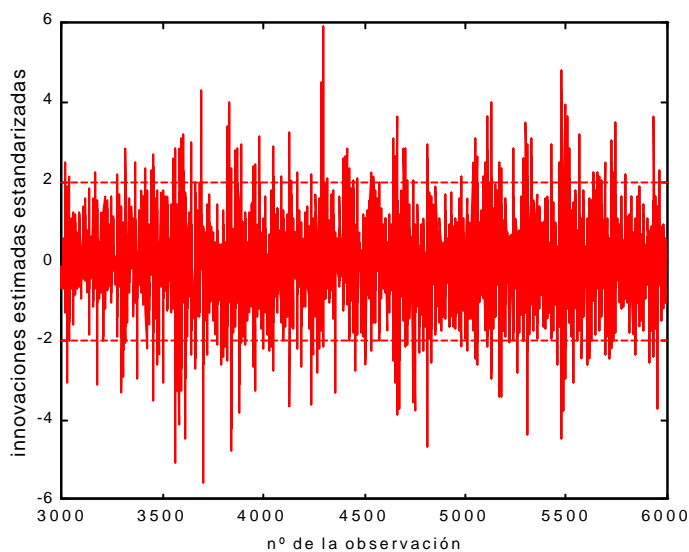


Figura 25: Serie de las estimaciones de las segundas tres mil innovaciones estandarizadas del modelo de volatilidad estocástica con las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02

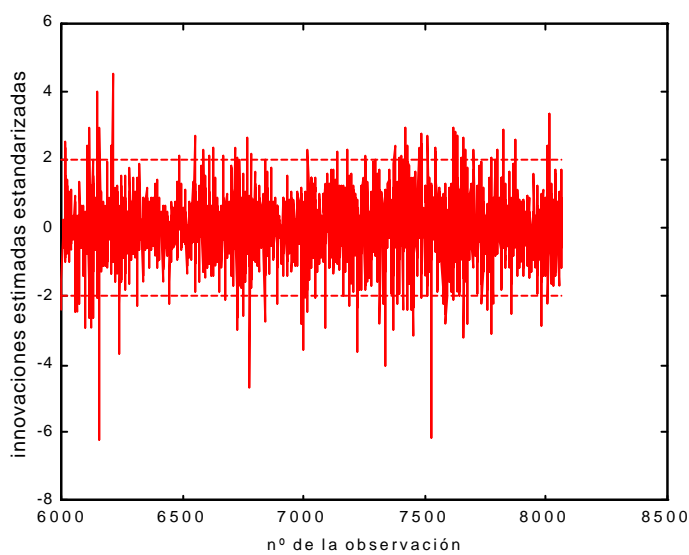


Figura 26: Serie de las estimaciones de las innovaciones estandarizadas entre la seis mil y la última del modelo de volatilidad estocástica con las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02

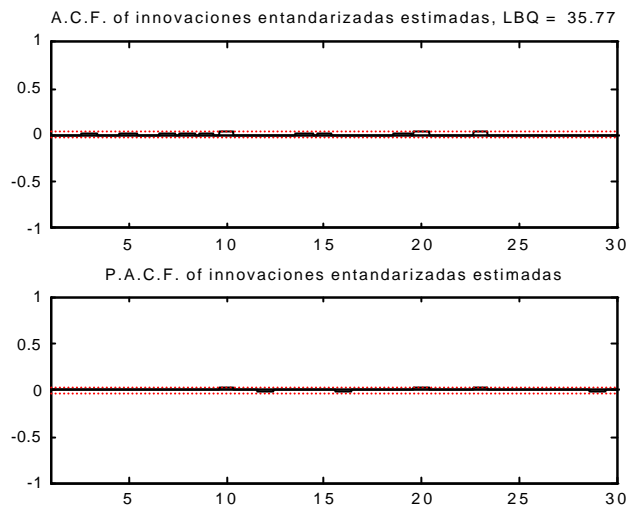


Figura 27: Funciones de autocorrelación simple y parcial de las innovaciones estimadas estandarizadas en el modelo de volatilidad estocástica con las tasas de variación logarítmicas de las observaciones del tipo de cambio marco/dólar diarias al cierre entre el 4-1-71 y el 22-10-02.

Referencias

- [1] Aït-Shalia, Y., [1996]: "Testing continuous-time models of the spot interest rate". review of *Financial Studies* 9 (2), 385-426.
- [2] Amin, K. I. and V. K. Ng, [1993]: "Option Valuation with systematic stochastic volatility". *Journal of Finance* 48 (3), 881-910.
- [3] Andersen, T. G., J. Lund, [1997]: "Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate", *Journal of Econometrics* 77, 343-377.
- [4] Anderson, B. D. O. and J. B. Moore, [1979]. *Optimal Filtering*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [5] Babbs, S. H. and K. B. Nowman, [1999]: "Kalman Filtering of Generalized Vasicek Term Structure Models." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 34, 1, 115-130.
- [6] Ball, C.A. and A. Roma, [1994]: "Stochastic volatility option pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 29 (4), 589-607.
- [7] Ball, C. A. and W. N. Torous, [1996]: "Unit Roots and the Estimation of Interest Rates Dynamics", *Journal of Empirical Finance*, 3(2), 215-238.
- [8] Baxter, M. and A. Rennie, [1996]. *Financial Calculus. An introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press.
- [9] Beaglehole, D. R., and M. S. Tenney, [1991]: "General Solutions of Some Interest Rate-Contingent Claim Pricing Equations", *Journal of Fixed Income*, pp. 69-83.
- [10] Belledin, M. and C. Schlag, [1999]: "An Empirical Comparison of Alternative Stochastic Volatility Models". Working paper. Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main.

- [11] Bergström, A. R., [1984]: "Continuous Time Stochastic Models and Issues of Aggregation over Time" In Handbook of Econometrics, Volume II, Edited by Z. Griliches and M. D. Intriligator eds. Amsterdam: Elsevier Science.
- [12] Black, F. and M. Scholes, [1973]: "The pricing of options and corporate liabilities". Journal of Political Economy, No. 3, pp. 637-654.
- [13] Black, F., [1976]: "Studies of stock price volatility changes". Proc. 1976 Meeting of the Business and Economics Statistics Section. Amer. Stat. Assoc., pp. 177-181.
- [14] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. [1976]. Time Series Analysis, Forecasting and Control, revised edition. San Francisco: Holden Day.
- [15] Brennan, M. J., [1991]. The price of convenience and valuation of commodity contingent claims. In Stochastic Models and Option Models. Elsevier Science Publishers.
- [16] Campbell, J. Y., A. W. Lo and C. MacKinlay [1997]. The econometrics of financial models. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [17] Casals, J; S. Sotoca; M. Jerez, [1999]: "A fast and stable method to compute the likelihood of time invariant state-space models". Economic Letters, 65, 329-397.
- [18] Chan, K. C., F. A. Karolyi, F. A. Longstaff and A. B. Sanders, [1992]: "An empirical comparison of alternative models of the short term interest rates", Journal of Finance 47, 1209-1227.
- [19] Chen B. and P. A. Zadrozny [2002]: "An anticipate feedback solution for the infinite-horizon, linear quadratic, dynamic, Stackelberg game". Journal of Economic Dynamics & Control, No. 26, pp. 1397-1416.
- [20] Christie, A. A., [1982]: "The stochastic behaviour of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects". J. Financial Econometrics 10, pp. 407-432.
- [21] Davis, M. H., [1984]: Lectures on Stochastic Control and Nonlinear Filtering. Tata Institute of Fundamental Research 75. Springer-Verlag.
- [22] Diebold, F. X. and M. Nerlove [1989], "The dynamics of exchange rate volatility: A multivariate latent ARCH models", Journal of Empirical Finance 1 (1989) 89-106.

- [23] Eraker, B., MCMC, [1998]: "Analysis of Diffusion Models with Applications to Finance", Manuscript, NHH, Bergen.
- [24] Gallant, A. R. and Tauchen, [1994]: "Estimation of Stochastic Volatility Models with Diagnostics", (mimeo, Duke University, Durham, NC).
- [25] Gallant, A. R. and Tauchen, [1996]: "Which Moments to Match?", *Econometric Theory* 12, 657-681.
- [26] Geyer, A. L. J., S. Pichler, [1999]: "A state-space approach to estimate and test multifactor Cox-Ingersoll-Ross models of the term structure", *The Journal of Financial Research*, 1, 107-130.
- [27] Ghysels, E. and J. Jasiak, [1995]: "Stochastic volatility and time deformation: and application to trading volume and leverage effects", Manuscript (University of Montréal, Montréal).
- [28] Gibson & Schwartz [1990]: "Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims". *Journal of Finance*, vol. 45, No. 3, pp. 959-976.
- [29] Golub, G. H. and C. F. Van Loan, [1989]. *Matrix Computations*. Second Edition. Baltimore, Maryland: The Johns Hopkins University Press.
- [30] Gouriéroux, G., A. Monfort and E. Renault, [1993]: "Indirect Inference". *Journal of Applied Econometrics* 8, 85-118.
- [31] Harvey, A. C., [1989]. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman filter*. Cambridge, England: Cambridge Univ. Press.
- [32] Harvey, A. C., E. Ruiz and N. Shephard, [1994]: "Multivariate stochastic variance models", *Review of Economic studies* 61, 247-264.
- [33] Heston, S. L., [1993]: "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options". *Review of Financial Studies*, 6 (2), pp. 327-343.
- [34] Hull, J. and A. White, [1987]: "The pricing of options on assets with stochastic volatilities". *Journal of Finance* 42 (2), 281-300.
- [35] Jazwinsky, A. H., [1970]. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York: Academic Press. León, Á., G.

- [36] Jones, C, [1998]: "A simple Bayesian approach to the analysis of Markov diffusion processes". Technical Report. The Wharton School, University of Pennsylvania.
- [37] Kellerhals, B. P., [2001]. Financial Pricing Models in Continuous Time and Kalman Filtering. Springer Verlag.
- [38] Lo, A. and J. Wang, [1994]: "Implementing option pricing models when asset returns are predictable". NBER Working Paper No. 4720.
- [39] Merton, R. C. [1992]: Continuous-Time Finance. Cambridge: Blackwell, rev. edn.
- [40] Moler, C. and C. Van Loan, [1978]: "Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix", SIAM Review, Vol. 20, No. 4, 801-836.
- [41] Nelson, D. B., [1992]: "ARCH models as diffusion approximations". Journal of Econometrics 52, 61-90.
- [42] Nelson, D. B., [1996]: "Asymptotically optimal smoothing with ARCH models: Getting the right variance with the wrong model".Econometrica 64(3), 561-573 .
- [43] Nielsen , J. and M. Vestergaard, [2000]: "Estimation in Continuous-time Stochastic Volatility Models using Nonlinear Filters". International Journal of theoretical and Applied Finance. Vol. 3, No. 2, 279-308.
- [44] Øksendal, B., [1995]: Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag.
- [45] Pagan, A. R., [1995]: "Modelling the term structure", Working Paper (Australian National University, Canberra).
- [46] Pagan, A. R., A. D. Hall and V. Martin, [1995], Exploring the relations between the finance and econometrics literature on the term structure, Manuscript (Australian National University, Canberra).
- [47] Pedersen, A.R., [1995]: "A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations". Scandianavian Journal of statistics 22, 55-71.
- [48] Priestker, M, [1998]: "Nonparametric density estimation and tests of continuous time interest rate models". Review of Financial Studies 11(3), 449-487.

- [49] Sephard, N., [1993]: "Fitting nonlinear time-series models with applications to stochastic variance models", *Journal of Applied Econometrics* 8, 135-152.
- [50] Schmalensee, R. and R. R. Trippi, [1978]: "Common stock volatility expectations implied by option premia", *J. Finance* 33(1), pp.129-147.
- [51] Scott, L. O., [1987]: "Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22 (4), 419-438.
- [52] Schöbel, R. and J. Zhu, [1998]: "Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: An extension". Technical Report, Eberhard-Karls-Universität Tübingen.
- [53] Schwartz, E. S. [1997]: "The Stochastic Behaviour of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging", *Journal of Finance*, 52(3), 923-973.
- [54] Sundaresan, S. M. [2000]: "Continuous-Time Methods in Finance: A Review and an Assessment", *Journal of Finance*, 55(4), 1569-1622.
- [55] Rubio y G. Serna, [2002]: "Autorregresive Conditional Volatility, Skewness and Kurtosis" Working Paper?
- [56] Terceiro, J., [1990]. *Estimation of Dynamic Econometric Models with Error in Variables*. Springer Verlag.
- [57] Terceiro, J., [2000]: "Comments on "Kalman-Filtering Methods for Computing Information Matrices for Time-Invariant, Periodic, and Generally Time-Varying VARMA Models and Samples". *Computers and Mathematics with Applications*, No.40, pp. 405-411.
- [58] Timmer, J. and A. S. Weigend. "Modeling volatility using state space models", *Int. J. Neural Systems* 8, 385-398.
- [59] Unger, G., [2002]. *Hedging Strategy and Electricity Contract Engineering*. Doctoral Dissertation. Swiss Federal Institute of Technology. Zurich.
- [60] Vacicek, O. A., [1977]: "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177-188.
- [61] Van Loan, C. F., [1978]: "Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix", *SIAM Review*, Vol. 20, No. 4, 801-836.

- [62] Van Loan, C. F., [1978]: "Computing Integrals Involving the Matrix Exponential", IEEE Transactions on Automatic Control 3, Vol. AC-23, 395-404.
- [63] Wiggins, J. B., [1987]: "Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates, J. Financial Econometrics 19, 529-545.
- [64] White, H., [1980]: "A heterokedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heterokedasticity", Econometrica, No. 48, pp. 817-38.
- [65] Zadrozny, Peter, [1988]: "Gaussian Likelihood of Continuous-Time AR-MAX Models when Data are Stocks and Flows at different frequencies". Econometric Theory, 4, 108-124.