Disonancia, escalas y Matemáticas

Marco Castrillón López y Manuel Domínguez

Dept. Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
mcastri@mat.ucm.es

Dept. Matemática Aplicada
ETS Arquitectura
Universidad Politécnica de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
mdrmanuel@gmail.com

Dedicado al profesor Juan Tarrés.

ABSTRACT

El objetivo de esta nota es el de dar una sencilla formulación matemática de algunos principios de la construcción de escalas musicales y de las leyes de la consonancia clásicas.

The goal of this article is to give a simple formulation of some aspects about the construction of musical scales and the classical laws of consonance.

Key words: Consonancia, escalas musicales, suma de armónicos.

2010 Mathematics Subject Classification: 00A65.

1. Introducción

Como la mayoría de las artes, la música contiene una maravillosa mezcla de subjetividad y de un deseo de escribir sus propias reglas objetivas. Del lado subjetivo, el refranero dice que hay tantas opiniones o gustos como personas y que una misma pieza musical puede despertar la mayor admiración o la peor crítica. La consonancia, como cualidad de los sonidos que al oírlos simultáneamente producen un efecto agradable, está sujeta a estas decisiones caprichosas. Sin embargo, la composición musical ha contado a lo largo de la historia con diversas y precisas reglas que aportan a la música un valor objetivo de peso. Así, si se tocan en un piano simultáneamente las notas Do y Do#, o Si y Do, la mayoría de los asistentes a este pobre concierto dirían que el sonido resultante es menos consonante que, por ejemplo, el par Do y Sol. Es por ello que la composición clásica occidental no incluía los primeros pares en sus obras o los reservaba a momentos en los que se quería despertar sentimientos encontrados en el oyente. Las Matemáticas, como inseparable compañera de viaje de la Música desde las construcciones de Pitágoras de Samos, han sido el lenguaje con el que se han descrito las leyes de la composición a lo largo de la historia. El objetivo de este trabajo es el de presentar algunos de los ingredientes de dicho acompañamiento, con especial énfasis en la modelización de los fenómenos que, apelando a sencillas propiedades matemáticas, permite dar explicación a la consonancia de los instrumentos de cuerda o viento y, en particular, a la comparación de los pares de notas citados anteriormente. La música occidental, heredera de la música pitagórica, hunde sus raíces en la tradición de viento y cuerda de la cultura mediterránea. La modelización que se muestra permite pensar que nuestra música hubiera sido muy distinta si Pitágoras hubiese trabajado fundamentalmente con instrumentos de percusión.

2. Nociones fundamentales

2.1. Las escalas musicales

Un sonido es una variación de la presión del aire perceptible por nuestro sentido auditivo. Atendiendo a la naturaleza de la ecuación de ondas que modeliza el comportamiento del fluido aéreo, esta función presión es localmente (tanto en sentido espacial como temporal) en buena medida periódica. En un desarrollo de Fourier, podemos por tanto realizar una descomposición de dicha onda en sus frecuencias elementales. De las cuatro características fundamentales del sonido, a saber, la intensidad, el timbre (asociado a los coeficientes de Fourier de la onda), la duración y la altura (frecuencia de la contribución de Fourier dominante), vamos a atender fundamentalmente a la última, es decir, vamos a trabajar con tonos. Los sonidos producidos por los instrumentos musicales tiene una frecuencia fundamental (su timbre) muy definida. Más aun, algunos instrumentos y especialmente si trabajamos con instrumentos electrónicos, pueden producir sonidos sinusoidales prácticamente puros. Pensemos por un momento que trabajamos con estos sonidos puros.

Son pocos oídos afortunados los que pueden describir de forma exacta una frecuencia determinada. Sin embargo, sí es normal el poder distinguir, una vez que se tiene dos sonidos, cuál es más agudo (tiene un tono mayor) que el otro. Por ello, al hablarse de los tonos de un sonido, se suele hacer partiendo de una referencia. En la música occidental se suele escoger la frecuencia de 440 Hz (La) como frecuencia fundamental, aunque cualquier otra f_0 es igualmente válida. Igualmente, como se puede comprobar experimentalmente, a partir de una frecuencia aproximada de unos 500 Hz el oído aprecia las distancias entre dos tonos no por la diferencia de frecuencias sino por la razón entre las mismas (Ley de Weber-Fechner para el oído). Eso quiere decir que dentro del espectro auditivo humano (20 Hz - 20.000 Hz), la percepción de los tonos menores de 500 Hz es lineal, pero a partir de ahí es logarítmica. Así se habla de razones (o intervalos) de frecuencia como una aplicación del conjunto de frecuencias $\mathcal{F}$ del cual podemos olvidar en qué unidades se mide, a la semirecta real como

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto \frac{f}{f_0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Se dice que dos tonos f_1 y f_2 están separados una *octava* si $f_2 = 2f_1$. Los sonidos separados por una o varias octavas son percibidos por el oído humano como prácticamente indistinguibles si son escuchados simultáneamente. Por esta razón, la aplicación

(1) se puede describir de forma más ajustada al oído humano como

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \log_2 \frac{f}{f_0} \end{aligned}$$

que además podemos simplificar si consideramos la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ "estar separado por una octava" de forma que la proyección al conjunto cociente es

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ f &\mapsto \left(\log_2 \frac{f}{f_0}\right)_{\mathcal{R}} \end{aligned} \tag{2}$$

donde $(x)_{\mathcal{R}}$ es la clase de x. Si identificamos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con el intervalo $[0,1)$, entonces $(x)_{\mathcal{R}}$ no es más que $\{x\}$, es decir, tomar la parte fraccionaria de x. Si en cambio identificamos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con la circunferencia unidad S^1 de complejos unitarios, la aplicación queda por tanto definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow S^1 \\ f &\mapsto \exp\left(i2\pi \left\{\log_2 \frac{f}{f_0}\right\}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

es decir, el análisis de tonos puede analizarse de forma geométrica como puntos de la circunferencia.

De los infinitos elementos de S^1 con las que un compositor puede trabajar a la hora de elegir los tonos que formen parte de su obra, se suele tomar tonos que formen parte de un subconjunto discreto (y por tanto finito) de S^1 elegido de antemano. Estos subconjuntos se denominan *escalas*, y el cómo elegirlos constituye toda una disciplina musical que ha vivido a lo largo de los siglos múltiples interpretaciones y teorías. Vamos, sin embargo, a centrarnos en la construcción de la escala de la escuela de Pitágoras. Si, como hemos dicho antes, las potencias de dos (las octavas) definen sonidos de naturaleza similar, parece natural estudiar que sucede cuando se toman potencias del siguiente número natural, es decir, el tres. Así, partiendo de la nota fundamental f_0 que hayamos escogido, se toma el conjunto $(3^k f_0)_{k\in\mathbb{Z}}$. La imagen de estos puntos por medio de las aplicaciones (2) o (3) representan un conjunto denso de $[0,1)$ o S^1. Si consideramos las K primeras notas $\{\log_2 3^k\}$, $k = 0, ..., K-1$, partiendo de 0, dado que 2 y 3 son primos entre sí, nunca podremos volver a ese valor inicial. Sin embargo hay valores concretos de K para los que nos acercamos mucho a 0. Este es el caso de 3^7. En efecto, tenemos

$$\begin{array}{lll} \left\{\log_2(3^0)\right\} = 0, & \left\{\log_2(3^1)\right\} = 0'5949..., & \left\{\log_2(3^2)\right\} = 0'1699..., \\ \left\{\log_2(3^3)\right\} = 0'7649..., & \left\{\log_2(3^4)\right\} = 0'3398..., & \left\{\log_2(3^5)\right\} = 0'9248..., \\ \left\{\log_2(3^6)\right\} = 0'5098..., & \left\{\log_2(3^7)\right\} = 0'0947..., & \end{array}$$

en el que el último elemento dista menos de una décima del 0. Si ahora consideramos las primeras 7 notas y los ordenados de menor a mayor obtenemos los números

$$0 \quad 0'1699... \quad 0'3398... \quad 0'5098... \quad 0'5949... \quad 0'7649... \quad 0'9248... \tag{4}$$

que son las 7 notas de la escala pitagórica, inicialmente etiquetadas con letras del alfabeto griego. Nótese que el valor $\{\log_2(3^1)\} = 0'5849...$ ocupa el quinto puesto en el reordenamiento dado en (4). Es por esta razón que la frecuencia asociada al número 3 con el que se ha construido esta escala es denominada *quinta* (o *quinta pitagórica*). Igualmente, el octavo valor de la escala corresponde (salvo la pequeña desviación comentada anteriormente y que se conoce como *coma pitagórica*) al 1 o 0 de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y que justifica que la potencia 2 se conozca como octava. Como nota histórica, hay que esperar hasta el siglo XI cuando, a partir de la música añadida por Guido de Arezzo a unos versos dedicados a San Juan Bautista, se asignó a las correspondientes notas la primera sílaba de dichos versos, a saber: *Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La* y *Si*. La primera nota fue posteriormente cambiada a *Do*, apócope del *Dominus* latino.

2.2. El teorema de los tres pasos

Si inspeccionamos los valores de frecuencias ajustadas por los logaritmos dados en (4) podemos ver que las diferencias entre notas consecutivas (considerando la última diferencia con el valor 1) toman los valores

$$0 \quad 0'1699... \quad 0'1699... \quad 0'1699... \quad 0'0850... \quad 0'1699... \quad 0'1699... \quad 0'0850...$$

es decir, recordando que tomamos el tono inicial f_0 como el La (440 Hz), el intervalo entre dos notas consecutivas de la escala pitagórica toma un valor constante (un tono) salvo entre Si-Do y Mi-Fa en donde se tiene un valor distinto aproximadamente la mitad de un tono (y llamado hemitono). La existencia de dos tipos distintos de intervalos en la escala pitagórica es una propiedad esencial de la misma y es piedra angular de su riqueza musical. Sin embargo, al hilo de esta propiedad, cabe preguntarse si la elección de la quinta pitagórica ha sido determinante en la existencia de exactamente dos intervalos distintos. Esta cuestión está estrechamente relacionada con una conocida conjetura de Steinhaus (demostrada simultáneamente por Sós y Świerczkowski en 1958) que enunciamos a continuación (véase [8]).

Teorema 2.1 (de los tres pasos)**.** *Para cualquier $\theta \in \mathbb{R}^+$ y cualquier entero positivo K, la sucesión de puntos $\exp(2\pi k\theta i)$, $k = 0, \ldots, K-1$, divide la circunferencia unidad en subintervalos de, a lo sumo, tres longitudes distintas.*

En concreto, si $\theta = p/q$ es un número racional (escrito de forma irreducible) y $K \geq q$, tenemos exactamente un polígono regular y por tanto un único paso. Si θ es irracional, siempre habrá dos o más pasos. Ése es el caso de la escala pitagórica en donde $\theta = \log_2 3$. Para distinguir cuándo se tienen dos o tres pasos distintos hay que recurrir a la teoría de números de la mano de las fracciones simples. Recordemos que todo número real (positivo) θ se puede escribir como

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

en donde los a_i, $i \geq 1$ son enteros positivos. La secuencia $[a_0; a_1 a_2 a_3 ...]$ acaba con una división exacta únicamente si θ es racional. En caso contraro, la secuencia de θ es infinita y única. Se denomina *convergente* de θ al número racional que se obtiene truncando su desarrollo en fracciones contínuas simples $[a_0; a_1 a_2 ... a_r]$ en cualquier orden r. Se denomina *semiconvergente* a la fracción $[a_0; a_1 a_2 ... n]$, $0 < n < a_r$ (si $a_r \geq 2$). Los convergentes y semiconvergentes gozan de propiedades muy interesantes. Referimos al clásico manual [3] para estas y otras muchas propiedades.

En relación con las escalas, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Dado un número θ irracional positivo, la sucesión de puntos* $\exp(2\pi k\theta i)$, $k = 0, \dots, K-1$, *divide la circunferencia unidad en arcos de exactamente dos longitudes distintas si y sólo si K es el denominador de un convergente o de un semiconvergente de θ.*

Por ejemplo, para $\theta = \log_2 3 = [1; 1, 1, 2, 2...]$, el denominador del semiconvergente $[1; 1, 1, 2, 1]$ es precisamente 7, lo que nos da la escala pitagórica construida anteriormente.

2.3. Los instrumentos musicales

Consideremos una cuerda tensa de longitud L, densidad lineal λ y tensión (es decir, la fuerza que tira de la cuerda en cualquiera de sus extremos fijos) de valor T. Supongamos que la cuerda es considerada infinitesimalmente delgada, de tal manera que pueda ser modelizada como un segmento al cual se le aplica la ecuación de ondas unidimensional. Se puede probar entonces que la cuerda en vibración tiene una frecuencia fundamental de valor

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \tag{5}$$

que es acompañada por todos sus múltiplos $f_n = nf_1$, $n \in \mathbb{N}$. Estos valores f_n son conocidos como *armónicos* de la vibración de la cuerda y simplemente quieren decir que cualquier estado vibracional de la misma se puede escribir como suma infinita de vibraciones sinusoidales de frecuencia f_n, $n \in \mathbb{N}$. Aunque con la técnica adecuada puede conseguirse que, cuando se pulsa una cuerda de un instrumento, la misma vibre predominantemente con una frecuencia f_2 o f_3, lo general es que al tocar un instrumento de cuerda, el sonido predominante de cada cuerda sea el asociado a la vibración fundamental f_1. Sin embargo, dicho sonido contendrá contribuciones de los armónicos superiores f_n, $n > 1$, cuya aportación determina el timbre del instrumento. Como primera aproximación, se puede considerar que la intensidad de cada aportación f_n, $n > 1$, decrece geométricamente por un factor 0'7 a medida que crece n.

En el caso de una columna hueca de longitud L con un gas (ideal) en su interior, el sonido producido por la vibración de dicho gas tiene un comportamiento muy parecido. Se cuenta con una frecuencia fundamental

$$f_1 = \frac{c}{2L}, \tag{6}$$

siendo c la velocidad del sonido en ese gas, que es acompañada por sus múltiplos $f_n = nf_1$, $n > 1$, presentes en la descomposición de cualquier sonido.

Como se ve, el comportamiento de los instrumentos de cuerda y viento es a grandes rasgos bastante similar. Sin embargo la familia de percusión tiene características diferentes. Se puede acudir a monografías de organología o de acústica musical para analizar más detalladamente el complejo análisis del tambor, la campana o el xilófono. Por ejemplo, la vibración de un paralelepípedo sólido (en particular, las láminas de un xilófono sencillo) contiene una frecuencia fundamental f_1 y los siguientes primeros armónicos

$$f_2 \simeq 2,75 f_1, \quad f_3 \simeq 5,40 f_1, \quad f_4 \simeq 8,93 f_1, \quad f_5 \simeq 13,34 f_1, ... \tag{7}$$

El lector interesado puede encontrará un excelente manual sobre la física de los instrumentos musicales en [5].

3. Algunos capítulos históricos de la consonancia musical

Es ingente la cantidad de trabajos y teorías alrededor de la armonía y la consonancia musical. Damos a continuación tres brevísimas pinceladas de algunos momentos de relevancia en dicho desarrollo desde un punto de vista matemático.

La construcción de la escala de 7 notas a partir de la tercera pitagórica forma parte de una entera concepción musical basada en los números naturales. La escuela de Pitágoras concedía al *número* un valor de marcado carácter ontológico en el cosmos. El número, como origen de toda explicación del mundo, era también la pieza fundamental de la perfecta composición musical y de las reglas que determinan el carácter consonante y disonante de varios sonidos coincidentes. Si bien se exploraban todas las familias de instrumentos, la tradición pitagórica escribía sus conclusiones generalmente por medio de experimentos de instrumentos de cuerda y de viento. Así, con dos cuerdas tensas de la misma tensión, la ley pitagórica de los números sencillos afirma que el sonido simultáneo de ambas resulta agradable (consonante) si las longitudes de las cuerdas están relacionadas por números naturales pequeños. Por ejemplo, una cuerda de longitud L y otra de longitud $L' = L/2$ suenan perfectamente consonantes. En efecto, las frecuencias fundamentales (véase (5)) son una el doble de la otra, es decir, el intervalo definido por ambas frecuencias es exactamente una octava. Si $L' = 2L/3$ o $L' = L/3$ estamos tratando con sonidos separados por una quinta o por una quinta más una octava. En el caso $L' = 3L/4$ tenemos la llamada *cuarta* (un intervalo de cuatro notas). Heredera de la cultura helénica, en la música occidental medieval (en particular, en la polifonía inicial, aproximadamente entre el 900 y el 1.300 d.C.) se consideraban consonantes únicamente los intervalos octava (2:1), quinta (3:2), cuarta (4:3), octava más quinta (3:1), octava más cuarta (8:3) y doble octava (4:1). Este conjunto de consonancias es aumentado con las terceras (4:5) y las sextas (3:5) en el contrapunto.

Galileo y Mersenne dan un primer avance matemático a la relación entre frecuencias, consonancia y la ley de los números pequeños de Pitágoras. En concreto Galileo afirma, dentro de su concepción matematizante de la Naturaleza, que si dos notas tienen sus frecuencias relacionadas por un entero pequeño, la onda resultante presentará una regularidad o simetría no presente para otras razones más complejas y tendrá, por tanto, más armonía. Es sin embargo Rameau quien primero pensó en la escala musical a partir de consideraciones vibracionales.

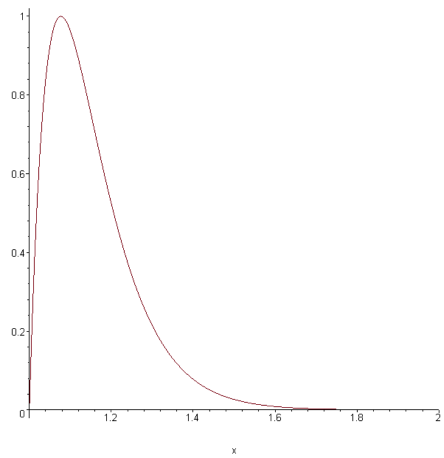
De cualquier manera hay que esperar al descubrimiento de la estructura de los armónicos (5) y (6) para poder elaborar teorías más elaboradas. En el siglo XIX, Helmholtz explota esa idea en dos direcciones. Primeramente, partiendo de la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} f_1 + \operatorname{sen} f_2 = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) \cos\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right),$$

tenemos que el sonido resultante de la suma de dos frecuencias f_1 y f_2 tiene dos comportamientos periódicos acoplados, con frecuencias respecticas la semisuma y la semidiferencia de f_1 y f_2. Si nos centramos en la segunda, y atendiendo a la sensación del oído humano, ésta provoca unos pulsos lentos cuando f_1 o f_2 son próximos. Helmoltz afirmaba que alrededor de una diferencia de 30 ó 40 Hz se tenía la máxima sensación de desasosiego. A partir de ahí, esta sensación desaparece y se recupera la consonancia. En segundo lugar, Helmholtz aplicaba esta idea a las relaciones entre los distintos armónicos del instrumento con el que se tocase las correspondientes notas. De esta manera Helmholtz trazó unas curvas de "aspereza" que presenta unos mínimos precisamente en las notas construídas de la forma pitagórica.

4. La teoría de Plomp y Levelt

Parece ser que fueron los americanos Plomp y Levelt (véase [4]) quienes elaboraron el primer análisis experimental de consonancia y disonancia de ondas sinusoidales puras. A los sujetos del experimento se les hacía oir sonidos puros a distintas relaciones de frecuencias quienes tenían que además valorar el grado de consonancia y disonancia. Los datos así obtenidos promediados proporcionaron una curva similar a la siguiente



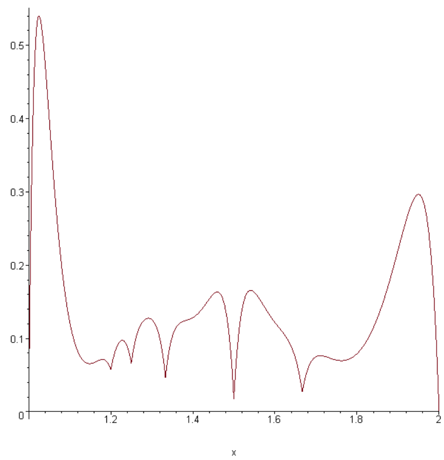
en donde el eje de ordenadas va de 0 (consonancia total) a 1 (disonancia total) y el de abscisas parametriza la razón entre las frecuencias f y f' confrontadas, es decir $f' = xf$. Esta aportación está relacionada con la idea de *banda crítica*, es decir la mínima banda de frecuencias alrededor de una frecuencia determinada que activan la misma zona de la membrana basilar en el caracol del oído. Podemos dar varias funciones que definan una gráfica con un perfil similar al anterior. Por ejemplo, en [1] se opta por la función

$$d(x) = a\,|x|\,e^{1-b|x|},$$

en donde a, b son constantes a ajustar y además asumimos un rango de frecuencias superior a 500 Hz para poder aplicar las relaciones de frecuencias por razones y no por diferencias (véase la siguiente sección para un estudio con el segundo caso). Como se puede ver, en esta curva no hay vestigio de las consonancias o disonancias de la construcción pitagórica. Parece que el oído humano (principalmente por el tipo de análisis de Fourier que elabora el órgano de Corti en el caracol), experimenta una sensación desagradable a cierto rango de frecuencias cercanas, mientras que fuera de ese rango (fuera ya de la banda crítica), cualquier par de frecuencias suena "bien". Sin embargo, los instrumentos emiten sonidos compuestos por armónicos, tal y como vimos en §2.3. En la línea sugerida por Hemlholtz, el trabajo de Plomp y Levelt analizó además el grado de consonancia o disonancia total de dos notas de un instrumento de viento o de cuerda sumando el valor de la función $D(x)$ en distintos armónicos de los sonidos confrontados. Es decir, se considera la función

$$D(x) = \sum_{n,n'=1}^{\infty} \nu_n \nu_{n'} d\left(\frac{n}{n'}x\right)$$

que estudia la disonancia de dos notas de frecuencias f_0 y $f = xf_0$, junto con todos sus armónicos, en donde ν_n es la amplitud (relativa) del n-ésimo armónico. Por simplicidad se puede limitar la suma a los primeros 6 armónicos y considerar, como se comentó en §2.3, que la intensidad relativa es $\rho_n = 0'7^n$, por lo que aproximadamente $\nu_n = 0'84^n$, para todo n. En ese caso se obtiene la gráfica



En ella observamos: que la consonancia es máxima (la gráfica tiene mínimo absoluto) para $x = 2$, es decir, notas separadas una octava. El siguiente valor de consonancia máxima (el siguiente mínimo de la gráfica) se da para $x = 3/2$, es decir, para una quinta pitagórica. Los siguientes mínimos locales (ordenados de mayor a menor consosnancia) están ubicados en los valores $x = 4/3$ (una cuarta), $x = 5/4$ (una tercera mayor), $x = 6/5$ (tercera menor) y $x = 5/3$ (una sexta). Se recuperan los valores clásicos de la consonancia polifónica.

5. Consonancia local de Sethares y otras construcciones

Partiendo de los trabajos de Plomp y Levelt, W. Sethares [6] determina la disonancia que produce un timbre completamente arbitrario, en el que la relación entre las frecuencias de los armónicos no tiene por qué ser necesariamente un número racional como ocurre con las notas de los instrumentos de cuerda o de viento. Para este autor la disonancia entre las frecuencias f_1 y f_2 de amplitudes respectivas ν_1 y ν_2 se determina mediante la función:

$$d(f_1, f_2, \nu_1, \nu_2) = \nu_1\nu_2 \left(e^{-3'5\lambda(f_2-f_1)} - e^{-5'75\lambda(f_2-f_1)}\right)$$

siendo $\lambda = 0'24/(0'021 f_1 + 19)$. Obsérvese que en este caso se considera un rango de frecuencias en donde la percepción del oído es considerada lineal (frecuencias bajas).

A partir de esta función es posible determinar la disonancia $D_{\mathfrak{F}}$ de un timbre $\mathfrak{F}$ dado por una colección de n sinusoidales de frecuencias $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ y amplitudes $\nu_1, \ldots, \nu_n$. Esta disonancia viene dada por la suma de las disonancias de todos los pares posibles (f_i, f_j), es decir,

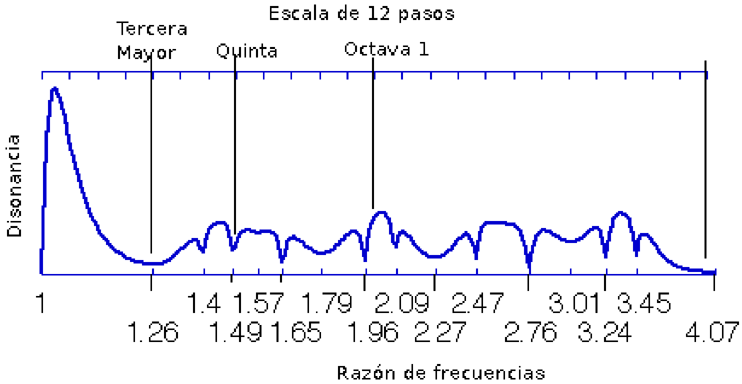
$$D_{\mathfrak{F}} = \sum_{i<j} d(f_i, f_j, \nu_i, \nu_j).$$

Denotamos por $\alpha\mathfrak{F}$ el timbre determinado por las frecuencias $\alpha f_1 < \alpha f_2 < \cdots < \alpha f_n$ y amplitudes $\nu_1, \ldots, \nu_n$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ cualquiera. La disonancia $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$ que se produce cuando las notas de timbres $\mathfrak{F}$ y $\alpha\mathfrak{F}$ suenan simultáneamente –esto es, la disonancia del intervalo α respecto del timbre $\mathfrak{F}$– será el resultado de sumar la disonancia de $\mathfrak{F}$, la de $\alpha\mathfrak{F}$ y la producida al interactuar los armónicos de $\mathfrak{F}$ con los de $\alpha\mathfrak{F}$. Es decir,

$$D_{\mathfrak{F}}(\alpha) = D_{\mathfrak{F}} + D_{\alpha\mathfrak{F}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d(f_i, \alpha f_j, \nu_i, \nu_j).$$

Por ejemplo, si se toma el timbre dado por $\{1, 2, \ldots, 7\}$ y amplitudes $\nu_i = 0'84^{i-1}$ (el caso de un instrumento de viento o de cuerda) se obtiene una función $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$ que tiene una gráfica similar a la dada en la sección anterior.

Con este modelo W. Sethares encuentra una manera de asociar a cada timbre una escala que le es *particularmente consonante*: una escala $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ y un timbre $\mathfrak{F}$ están asociados si todos los intervalos α_i de la escala son mínimos locales de la función de disonancia $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$. La cuestión depende fuertemente de α y $\mathfrak{F}$. Por ejemplo, si se trabaja con los armónicos del xilófono simple (7) entonces la curva presenta una distribución de mínimos distinta a la de Plomp y Levelt como se ve a continuación (en una imagen de [7] cedida por el autor).



W. Sethares se plantea también el problema inverso: dada una escala de intervalos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, cómo ha de ser el timbre $\mathfrak{F}$ para que cada intervalo α_i de la escala sea una consonancia local de $\mathfrak{F}$, es decir, sea un mínimo local de la función $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$.

El espectacular desarrollo de la música electrónica en el segundo tercio del siglo XX permitió realizar interesantes construcciones a partir de estas ideas. En particular, con un sintetizador, se puede emitir sonidos formados por una frecuencia fundamental y una distribución de armónicos f_n de valores arbitrarios. De esa manera, el compositor puede tener control de los valores para los que se tiene los intervalos de máxima consonancia. Por ejemplo, si se construye un sonido de armónicos

$$f_2 = 2^{5/4} f_1, \quad f_3 = 2^{8/4} f_1, \quad f_4 = 2^{10/4} f_1, \quad f_5 = 2^{11/4} f_1, \quad f_6 = 2^{12/4} f_1,$$

(construcción de Pierce, 1966) se tiene una gráfica de consonancia de tal manera que cualquier par de notas de la escala de temperamento igual (equiespaciadas en la circunferencia) suenen consonantes. En efecto, cuando dos notas de esta escala suenan con los anteriores armónicos, lo que sucede es que estos armónicos o bien coinciden o bien están separados lo suficientemente en la banda crítica. Ésta y otras mucha otras construcciones han permitido crear una nueva concepción de la composición musical dotada de un notable peso matemático (*xentonalidad*, *xenomúsica* y muchas otras). Para algunas reflexiones, véase [2] y [6].

Referencias

[1] D.J. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, 2006.

[2] W. Hutchinson, L. Knopoff, *The acoustic component of western consonance*, Interface **7** (1978), 1–29.

[3] A.Y. Khinchin, *Contiuned Franctions*, Phoenix Books. University of Chicago Press, 1964.

[4] R. Plomp, W. Levelt, *Tonal consonance and critical bandwith*, J. Acoustic Soc. Amer. **38**, 1965.

[5] T.D. Rossing, R.F. Moore, P.A. Wheeler, *The scienc of sound*, Addison-Wesly, 2002.

[6] W. Sethares, *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*, Springer Verlag, 2004.

[7] W. Sethares, *Relating tuning and timbre*, Experimental Musical Instruments IX, No. 2 (1993).

[8] N.B. Slater, *Gaps and steps for the sequence* Nr mod 1, Proc. Camb. Phil Soc. **63**, 1967, 1115–1123.