

Calibración euclídea a partir de longitudes de segmentos

José I. RONDA y Antonio VALDÉS

Grupo de Tratamiento de Imágenes
Universidad Politécnica de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
jir@gti.ssr.upm.es

Departamento de Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
avaldes@mat.ucm.es

En homenaje al Prof. Juan Tarrés Freixenet, con motivo de su jubilación.

ABSTRACT

En este trabajo se trata el problema de la recuperación de la estructura euclídea de un espacio n -dimensional distorsionado proyectivamente usando únicamente el conocimiento de las longitudes de una colección de segmentos. Este problema es de interés, en particular, para la reconstrucción euclídea con cámaras no calibradas, extendiendo resultados previos en el marco afín. La idea central se basa en que el conjunto de segmentos de una longitud fija está dado por una cuádrica de un espacio proyectivo de dimensión mayor, la cuádrica de los segmentos (QoS), a partir de la cual puede recuperarse la estructura euclídea mediante expresiones explícitas. Hemos intentado hacer un estudio detallado de las propiedades de la QoS, incluyendo el cálculo del mínimo número de segmentos de longitud arbitraria que la determinan y su relación con los objetos geométricos usuales asociados con la estructura euclídea del espacio. Se dan fórmulas explícitas para obtener la cuádrica dual del absoluto y el complejo cuadrático absoluto a partir de la QoS. Se incluyen experimentos con imágenes reales y sintéticas que evalúan el rendimiento de las técnicas propuestas.

We address the problem of the recovery of Euclidean structure of a projectively distorted n -dimensional space from the knowledge of the, possibly diverse, lengths of a set of segments. This problem is relevant, in particular, for Euclidean reconstruction with uncalibrated cameras, extending previously known results in the affine setting. The key concept is the Quadric of Segments (QoS), defined in a higher-dimensional space by the set of segments of a fixed length, from which Euclidean structure can be obtained in closed form. We have intended to make a thorough study of the properties of the QoS, including the determination of the minimum number of segments of arbitrary length that determine it and its relationship with the standard geometric objects associated to the Euclidean structure of space. Explicit formulas are given to obtain the dual absolute quadric and the absolute quadratic complex from the QoS. Experiments with real and synthetic images evaluate the performance of the techniques.

Key words: Calibración de cámaras, actualización euclídea, reconstrucción 3D; Camera calibration, Euclidean upgrading, 3D reconstruction.

2010 Mathematics Subject Classification: 68T45, 51N15.

1. Introducción

Una estrategia estándar para la reconstrucción tridimensional a partir de imágenes cuando los parámetros internos de la cámara son desconocidos comienza con el cálculo de una reconstrucción proyectiva de la escena, es decir, una reconstrucción tridimensional distorsionada mediante una homografía espacial desconocida. Este paso debe ser seguido de una actualización euclídea, para la cual es necesario tener algunos datos adicionales. Esto ha hecho que el problema de la recuperación de la estructura euclídea de un espacio proyectivamente distorsionado haya recibido una atención considerable [10, 22, 20, 11, 7, 12, 6, 2, 8].

La actualización euclídea puede ser obtenida a partir de las propiedades geométricas de objetos físicos o de entidades geométricas que se hayan podido identificar en la escena. Los métodos de autocalibración se basan en el uso de objetos geométricos que pueden ser determinados en el caso de que las cámaras satisfagan ciertas restricciones. Por ejemplo, cada cámara con punto principal y oblicuidad (skew) conocida proporciona tres planos ortogonales dos a dos que pueden usarse para calcular la estructura euclídea del espacio [19], o cada cámara con oblicuidad y razón de aspecto conocida proporciona dos rectas que pasan por el centro óptico que se intersecan en la cónica del absoluto y que pueden usarse para el mismo propósito [12].

Otras aproximaciones a la reconstrucción 3D a partir de imágenes hacen uso de diferentes objetos de calibración para calcular los parámetros extrínsecos e intrínsecos de las cámaras a fin de obtener la reconstrucción. El método más clásico para calibrar cámaras utiliza de un patrón de calibración [23] que consiste en un objeto del cual se conocen con precisión respecto a un sistema de referencia asociado al objeto las coordenadas 3D de ciertos puntos. Existen diferentes técnicas que intentan relajar las condiciones impuestas al objeto 3D, tales como el método de calibración de Zhang [28], en el cual solamente son necesarias dos vistas diferentes de un tablero de ajedrez para calcular los parámetros intrínsecos de la cámara. Otras alternativas hacen uso de una varilla móvil con tres puntos marcados en posiciones relativas conocidas, uno de ellos fijo [29], o de tres varillas ortogonales con marcas [14]. También se ha propuesto el uso de esferas [1, 27] o superficies de revolución [26].

En este artículo suponemos que son conocidas las longitudes de un conjunto de segmentos de la escena. Un ejemplo importante es el de un conjunto de cámaras que graban uno o más segmentos rígidos. Esta es una situación de interés práctico, por ejemplo en escenas en las que aparecen extremidades de cuerpos humanos [21].

Este problema ha sido considerado anteriormente en el marco afín [9], en el cual se supone conocida una reconstrucción afín de la escena. El caso proyectivo, más general, no ha sido considerado en la literatura de visión por ordenador. En este trabajo suponemos que existe una reconstrucción proyectiva y mostramos cómo la geometría euclídea puede ser completamente recuperada a partir del conocimiento de longitudes de segmentos. Este problema es más complicado, incluso en el caso bidimensional, dada la alta no linealidad de las ecuaciones que relacionan los puntos circulares del infinito con la métrica [15, Eq. 22].

Hemos optado por hacer un tratamiento n -dimensional más general, que unifica los casos plano y espacial. Primero introducimos un espacio geométrico adecuado para representar los segmentos, identificando un segmento con una cuádrica dual degenerada de rango ≤ 2 . Por tanto, los segmentos resultan ser una variedad algebraica de

\mathbf{P}^N , $N = (n + 1)(n + 2)/2 - 1$. Veremos que los segmentos de longitud fija d están determinados por una única cuádrlica \mathbf{C} de \mathbf{P}^N , que llamaremos *cuádrlica de segmentos* (QoS) la cual se descompone naturalmente como una suma $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \frac{d^2}{2}\mathbf{C}_2$, en la cual la cuádrlica \mathbf{C}_2 codifica la geometría afín del espacio, mientras que \mathbf{C}_1 determina la geometría euclídea, salvo un factor de escala. El par $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ determina también la escala, salvo un signo, es decir, la geometría euclídea salvo una simetría especular.

El espacio de cuádrlicas de \mathbf{P}^N veremos que se descompone en dos subespacios ortogonales, uno generado por las posibles matrices \mathbf{C}_1 y el otro por las posibles \mathbf{C}_2 . Esta descomposición permite optimizar el número de segmentos necesarios para calcular la QoA en el algoritmo lineal que proponemos, de forma que

$$(N + 1)(N + 2)/2 - 1$$

segmentos de longitud conocida serán suficientes.

Proporcionamos fórmulas explícitas para recuperar el hiperplano del infinito a partir de \mathbf{C}_2 y para recuperar al cuádrlica absoluta dual \mathbf{Q}_∞^* a partir de \mathbf{C}_1 . Finalizamos las contribuciones teóricas del artículo estudiando la relación entre la QoS y la cuádrlica absoluta dual (AQC) [13, 16, 24], mostrando que \mathbf{C}_1 y la AQC son objetos esencialmente equivalentes.

El trabajo concluye con los resultados experimentales, tanto para imágenes reales como sintéticas, evaluando el rendimiento de las técnicas propuestas y mostrando la viabilidad de este enfoque. Este artículo es una versión en castellano de [18].

2. Preliminares y notaciones

Suponemos que las cámaras están modeladas [4] mediante la ecuación $\mathbf{q} \sim P\mathbf{Q}$, donde $\mathbf{Q} = (x, y, z, t)^T$ denota las coordenadas euclídeas homogéneas de un punto espacial, $\mathbf{q} = (u, v, w)^T$ denota las coordenadas homogéneas de un punto en la imagen, y P es una matriz 3×4 . Recordemos que es posible obtener una calibración proyectiva con tan solo correspondencias entre puntos de las imágenes (véase [4]). Esto significa que, dado un conjunto de puntos proyectados \mathbf{q}_{ij} obtenidos con N cámaras, $N \geq 2$, podemos obtener un conjunto de matrices \hat{P}_i y un conjunto de coordenadas de puntos $\hat{\mathbf{Q}}_j$ tales que $\mathbf{q}_{ij} \sim \hat{P}_i \hat{\mathbf{Q}}_j$, donde $\hat{P}_i = P_i H^{-1}$ y $\hat{\mathbf{Q}}_j = H \mathbf{Q}_j$ para cierta matriz no singular 4×4 , H .

La *calibración euclídea* puede ser definida como la obtención de una matriz H que cambia las coordenadas proyectivas de una calibración proyectiva a algún sistema de coordenadas euclídeo. El objetivo de este trabajo es obtener una calibración euclídea a partir del conocimiento de longitudes de segmentos. Es bien conocido que la calibración euclídea, salvo un factor de escala, es equivalente a la recuperación de la cónica absoluta del infinito Ω_∞ o cualquiera de los objetos geométricos equivalentes, tales como la cuádrlica absoluta dual \mathbf{Q}_∞^* [22] o el complejo cuadrático absoluto Σ [13, 16, 24].

Análoga a la calibración euclídea es la noción de *calibración afín*. En el caso de que la estructura de la escena es conocida salvo una transformación afín. Las calibraciones afines se obtiene, en particular, cuando tenemos *cámaras afines* [4, p. 173].

Supongamos que conocemos las longitudes d_i de un conjunto de segmentos $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i\}$ en una reconstrucción proyectiva del espacio sin otra estructura particular. Deseamos

determinar una actualización euclídea a partir de este conocimiento. Este problema ha sido resuelto en el caso afín mediante el cálculo de un *ajuste afín*, consistente en la determinación que transforma el conjunto de segmentos de forma que sus longitudes son tan cercanas como sea posible, en el sentido de mínimos cuadrados, a los valores dados [9]. La matriz de una afinidad U es obtenida a partir de la matriz $U^T U$ resolviendo el problema mínimos cuadrados mediante factorización de Cholesky.

3. Representación geométrica de segmentos

Dado un segmento $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ definimos la matriz simétrica

$$S = S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{y}^T + \mathbf{y}\mathbf{x}^T = (x_i y_j + x_j y_i) = (z_{ij}). \tag{1}$$

La matriz S puede ser interpretada como la cuádrica dual dada por todos los hiperplanos que pasan por \mathbf{x} o por \mathbf{y} . Su rango es dos en tanto que \mathbf{x} y \mathbf{y} sean puntos diferentes, siendo uno en otro caso. Nótese que esta construcción es la contrapartida simétrica de la inmersión de Segre para la representación de pares ordenados [3, p. 25].

Teorema 3.1. *La aplicación $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \mapsto S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ identifica los segmentos no orientados con matrices simétricas $(n + 1) \times (n + 1)$ de rango ≤ 2 .*

Demostración. Es suficiente con definir la aplicación inversa de $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \mapsto S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, así que sea S una matriz simétrica de rango dos y comprobemos que existen \mathbf{x}, \mathbf{y} únicos tales que $S = S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Suponemos que $\text{rango } S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2$, siendo el caso de rango uno trivial. Como S es de rango dos y simétrica, existe un cambio de coordenadas H tal que $H^T S H = \text{diag}(1, 1, 0, \dots, 0)$. Definamos $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 = (1, \pm i, 0, \dots, 0)^T$. Es inmediato comprobar que $\mathbf{x} = H\mathbf{x}_0, \mathbf{y} = H\mathbf{y}_0$ son los vectores buscados. Respecto a su unicidad, notemos primero que $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ son, salvo escala, los únicos vectores tales que $\mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0^T + \mathbf{y}_0 \mathbf{x}_0^T \sim \text{diag}(1, 1, 0, \dots, 0)$, como puede probarse fácilmente. Por tanto \mathbf{x}, \mathbf{y} son también únicos, dado que la existencia de otro par \mathbf{x}', \mathbf{y}' con $S(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = S$ nos llevaría a la existencia de $\mathbf{x}'_0 = H^{-1}\mathbf{x}'$ y $\mathbf{y}'_0 = H^{-1}\mathbf{y}'$ con $S(\mathbf{x}'_0, \mathbf{y}'_0) = S_0$. \square

Será útil dotar al espacio de matrices simétricas con el producto dado por

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{trace}(AB). \tag{2}$$

Usando la definición de S y la igualdad $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ puede ser comprobado fácilmente que este producto escalar satisface

$$\langle S(\mathbf{u}, \mathbf{v}), S(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \tag{3}$$

Dada una matriz simétrica $A = (z_{ij})$ definimos

$$\nu(A) = \left(\frac{z_{00}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{11}}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{z_{nn}}{\sqrt{2}}, z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0n}, z_{12}, \dots, z_{1n}, z_{23}, \dots, z_{2n}, \dots, z_{n-1,n} \right). \tag{4}$$

Por ejemplo, si $n = 2, 3$,

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{A}) &= \left(\frac{z_{00}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{11}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{22}}{\sqrt{2}}, z_{01}, z_{02}, z_{12} \right), \\ \nu(\mathbf{A}) &= \left(\frac{z_{00}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{11}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{22}}{\sqrt{2}}, \frac{z_{33}}{\sqrt{2}}, z_{01}, z_{02}, z_{03}, z_{12}, z_{13}, z_{23} \right), \end{aligned}$$

respectivamente. Por tanto, tenemos un sistema de coordenadas euclídeo en el espacio de las matrices simétricas, ya que satisface

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \nu(\mathbf{A})^\top \nu(\mathbf{B}) = \langle \nu(\mathbf{A}), \nu(\mathbf{B}) \rangle. \tag{5}$$

Finalmente, definimos

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu(\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \tag{6}$$

asociando así un punto de \mathbf{P}^N a un segmento $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, donde

$$N = \binom{n+2}{2} - 1. \tag{7}$$

Por ejemplo, si $n = 2$ entonces $N = 5$ y si $n = 3$ entonces $N = 9$.

4. La cuádrlica de segmentos de longitud d .

La ecuación de una esfera de centro \mathbf{Y} y radio $d \geq 0$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)^2 - d^2 = 0 \tag{8}$$

puede ser interpretada como la del conjunto de segmentos no orientados $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ de longitud d . De ahora en adelante, usaremos el sistema de coordenadas homogéneas $(x_i), (y_i)$, de forma que con $X_i = x_i/x_0, Y_j = y_j/y_0$ la ecuación previa se convierte en

$$\sum_{i=1}^n (x_i y_0 - y_i x_0)^2 - d^2 x_0^2 y_0^2 = 0. \tag{9}$$

Observación 4.1. *La homogeneización de la ecuación (8) introduce nuevas soluciones. Denotemos por $\mathcal{V}_d \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ la variedad dada por los pares (\mathbf{x}, \mathbf{y}) que satisfacen la ecuación (9). Si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{V}_d$ y, digamos \mathbf{x} , yace en el hiperplano del infinito $x_0 = 0$, entonces o bien \mathbf{x} yace en la cuádrlica del absoluto¹ Ω_∞*

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0, x_0 = 0, \tag{10}$$

o ambos \mathbf{x} e \mathbf{y} yacen en el plano del infinito.

¹En dimensión tres la cuádrlica del absoluto es llamada normalmente “cónica del absoluto en el infinito”

Observación 4.2. *Puesto que estamos considerando coordenadas complejas, las esferas de radio 0 no son simplemente puntos, sino conos complejos. De hecho, suponemos que $d = 0$ y sea \mathbf{x} un punto que satisface la ecuación (9). Entonces, es fácil comprobar que todos los puntos de la recta a través de \mathbf{x} e \mathbf{y} también satisfacen dicha ecuación, de forma que representa un cono a través del vértice \mathbf{y} . La intersección de este cono con el hiperplano del infinito es la cuádrlica del absoluto.*

Puesto que \mathcal{V}_d es una variedad simétrica de bigrado $(2, 2)$, su ecuación es de la forma

$$\sum a_{ijkl} x_i x_j y_k y_l = 0 \tag{11}$$

donde los coeficientes a_{ijkl} satisfacen las simetrías $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$. Puesto que hay $\binom{n+1}{2}$ productos no ordenados $x_i x_j$ (o $y_k y_l$), hay un total de $\binom{N+1}{2}$ coeficientes independientes, salvo un factor común de escala, donde N está dado por (7).

Un marco más adecuado para tratar variedades de este tipo permitirá tratar el problema de forma más compacta y extraer eficientemente la información codificada por \mathcal{V}_d . Para este propósito, introducimos las $N + 1$ variables

$$z_{ij} = x_i y_j + x_j y_i, \quad i \leq j, \tag{12}$$

de forma que la ecuación (9) se transforma en

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (x_i y_0 - y_i x_0)^2 - d^2 x_0^2 y_0^2 \\ &= \sum_{i=1}^n ((x_i y_0 + y_i x_0)^2 - 4x_i y_0 y_i x_0) - d^2 x_0^2 y_0^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (z_{0i}^2 - z_{ii} z_{00}) - d^2 z_{00}^2 / 4 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

De esta forma, \mathcal{V}_d se puede ver como una cuádrlica de \mathbf{P}^N la cual se llamará *cuádrlica de los segmentos* (QoS) de longitud d .

5. Propiedades básicas de la QoS

La QoS definida en (13) puede escribirse en forma matricial como

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C}^{\text{euc}} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \tag{14}$$

para una cierta matriz

$$\mathbf{C}^{\text{euc}} = \mathbf{C}_1^{\text{euc}} + \frac{d^2}{2} \mathbf{C}_2^{\text{euc}}, \tag{15}$$

donde

$$\mathbf{C}_1^{\text{euc}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & & \\ & \mathbf{I}_n & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

la matriz \mathbf{A} , de orden $n + 1$, está dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \\ -1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

y la única coordenada no nula de $\mathbf{C}_2^{\text{euc}}$ es la de la esquina superior izquierda, que toma el valor -1 . Obsérvese que $\text{rango } \mathbf{C}^{\text{euc}} = \text{rango } \mathbf{C}_1^{\text{euc}} = n + 2$, mientras que $\text{rango } \mathbf{C}_2^{\text{euc}} = 1$. En particular, en dimensión $n = 2$ tenemos que

$$\mathbf{C}^{\text{euc}} = \begin{pmatrix} -d^2/2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

y en dimensión $n = 3$

$$\mathbf{C}^{\text{euc}} = \begin{pmatrix} -d^2/2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Un cambio de coordenadas $\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x}$ induce un cambio en \mathbf{P}^N

$$\mathbf{s}' = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{s}$$

donde $\tilde{\mathbf{H}}$ está definido mediante la ecuación

$$\sigma(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \tilde{\mathbf{H}}\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{20}$$

Denotando por \mathbf{e}_i los elementos de la base canónica de \mathbf{C}^{n+1} y por \mathbf{E}_k los de la base canónica de \mathbf{C}^{N+1} , tenemos que $\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sqrt{1 + \delta_{ij}}\mathbf{E}_{k(i,j)}$, siendo δ_{ij} los símbolos de Kronecker y $k(i, j)$ es la posición de z_{ij} en el vector $\nu(\mathbf{A})$ en (4) si $i \leq j$, y en otro caso $k(i, j) = k(j, i)$. ν . Substituyendo en (20) $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$ obtenemos la expresión explícita

$$\tilde{\mathbf{H}} = \left(\frac{\sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0)}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{\sigma(\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n)}{\sqrt{2}}, \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1), \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2), \dots, \sigma(\mathbf{h}_{n-1}, \mathbf{h}_n) \right)$$

(cf. ecuación (4)). Por tanto, en los casos $n = 2, 3$ tenemos que

$$\tilde{\mathbf{H}} = \left(\frac{\sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0)}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2)}{\sqrt{2}}, \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1), \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2), \sigma(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \right)$$

y

$$\tilde{\mathbf{H}} = \left(\frac{\sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0)}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_2)}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_3)}{\sqrt{2}}, \right. \\ \left. \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1), \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2), \sigma(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_3), \sigma(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2), \sigma(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_3), \sigma(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3) \right),$$

respectivamente.

La siguiente propiedad de $\tilde{\mathbf{H}}$ tendrá importancia más adelante.

Teorema 5.1. *Para cualquier matriz \mathbf{H} tenemos que*

$$\widetilde{\mathbf{H}^\top} = \tilde{\mathbf{H}}^\top. \quad (21)$$

Demostración. Por definición de $\tilde{\mathbf{H}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \tilde{\mathbf{H}}^\top \sigma(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \rangle &= \langle \tilde{\mathbf{H}} \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \sigma(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \rangle = \langle \sigma(\mathbf{H}\mathbf{u}, \mathbf{H}\mathbf{v}), \sigma(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{S}(\mathbf{H}\mathbf{u}, \mathbf{H}\mathbf{v}), \mathbf{S}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \rangle = \langle \mathbf{H}\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{H}\mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{H}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{H}^\top \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{H}^\top \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{H}^\top \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{H}^\top \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{S}(\mathbf{H}^\top \mathbf{w}, \mathbf{H}^\top \mathbf{z}) \rangle \\ &= \langle \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \sigma(\mathbf{H}^\top \mathbf{w}, \mathbf{H}^\top \mathbf{z}) \rangle = \langle \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \widetilde{\mathbf{H}^\top} \sigma(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Puesto que la imagen de σ genera el espacio total, tenemos el resultado deseado. \square

Si $\mathbf{x}^{\text{euc}} = \mathbf{H}\mathbf{x}$ es el cambio de coordenadas entre un sistema euclídeo y un sistema proyectivo arbitrario, la matriz de la QoS en este último sistema es

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{H}}^\top \mathbf{C}^{\text{euc}} \tilde{\mathbf{H}} \quad (23)$$

y

$$\mathbf{C}_i = \tilde{\mathbf{H}}^\top \mathbf{C}_i^{\text{euc}} \tilde{\mathbf{H}}. \quad (24)$$

Teorema 5.2 (Interpretación geométrica de \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2).

1. $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C}_1 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si y sólo si la recta $\mathbf{x}\mathbf{y}$ interseca la cuádrlica del absoluto Ω_∞ .
2. $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C}_2 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si y sólo si o bien \mathbf{x} o bien \mathbf{y} están en el hiperplano del infinito π_∞ .

Demostración. Para demostrar el primer enunciado, usemos un sistema de coordenadas euclídeo y notemos que la intersección de la recta $\mathbf{x}\mathbf{y}$ con el hiperplano del infinito (y no contenida en el mismo) es el punto $y_0\mathbf{x} - x_0\mathbf{y}$, que yace en la cuádrlica del absoluto Ω_∞ si y sólo si

$$0 = \sum_{i=1}^n (x_i y_0 - y_i x_0)^2 = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C}_1 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

El segundo enunciado se prueba fácilmente en un sistema de coordenadas euclídeo, puesto que

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C}_2 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_0^2 y_0^2.$$

\square

Estamos ahora en condiciones de ver cómo \mathbf{C}_2 está relacionado con el plano del infinito:

Teorema 5.3. *Sean $\boldsymbol{\pi}_\infty$ las coordenadas del plano del infinito. Entonces*

$$\mathbf{C}_2 \sim \sigma(\boldsymbol{\pi}_\infty, \boldsymbol{\pi}_\infty) \sigma(\boldsymbol{\pi}_\infty, \boldsymbol{\pi}_\infty)^\top. \quad (25)$$

Demostración. Denotemos por \mathbf{k}_i , $i = 0, 1, 2, 3$, las filas de \mathbf{H} . Puesto que

$$\mathbf{C}_2 = \tilde{\mathbf{H}}^\top \mathbf{C}_2^{\text{euc}} \tilde{\mathbf{H}},$$

usando (21) y la expresión de $\mathbf{C}_2^{\text{euc}}$ tenemos que

$$\mathbf{C}_2 = -(\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)/\sqrt{2})(\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)/\sqrt{2})^\top = -\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)^\top. \quad (26)$$

Siendo $\mathbf{k}_0 \sim \boldsymbol{\pi}_\infty$, se sigue el resultado. \square

Observación 5.4. *Usando el resultado 5.3 vemos que la expresión*

$$\mathbf{C}_2(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top$$

parametriza todas las posibles matrices \mathbf{C}_2 según variamos el sistema de coordenadas proyectivo.

Parece natural preguntarse si el conocimiento de los ceros de la QoS a lo largo de la variedad de segmentos

$$\text{im } \sigma = \{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{P}^n\} \subset \mathbf{P}^N,$$

determina la QoS completamente, puesto que podría existir una cuádrica diferente en \mathbf{P}^N que intersecase $\text{im } \sigma$ en el mismo lugar geométrico. En esta sección, veremos que este no es el caso, lo cual es relevante para nosotros ya que nos permitirá obtener la QoS simplemente por observaciones de segmentos de longitud d .

Teorema 5.5. *Sean \mathbf{C} y \mathbf{C}' dos cuádricas de \mathbf{P}^N teniendo los mismos ceros a lo largo de $\text{im } \sigma$, i.e.,*

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C}' \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Entonces $\mathbf{C} = \lambda \cdot \mathbf{C}'$ para algún $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

La demostración de este resultado será dada en el apéndice.

6. Espacios lineales generados por las matrices \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2

Con el objetivo de obtener parametrizaciones lineales de las matrices \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2 , en esta sección estudiamos los espacios lineales que dichas matrices generan. El siguiente resultado será una de las claves para el cálculo lineal de la QoS que enfrentaremos en la sección 9.

Teorema 6.1. *El espacio de matrices simétricas de orden $N + 1$ puede ser descompuesto como*

$$\text{Sym}(N + 1) = S_1 \oplus S_2 \tag{27}$$

en donde cada S_i está definido como el subespacio vectorial $\text{Sym}(N + 1)$ generado por todas las posibles matrices C_i obtenidas de C_i^{euc} usando cambios admisibles de coordenadas (24). Además, S_1 y S_2 son ortogonales con respecto de la métrica natural definida en (2) y sus dimensiones son

$$\begin{aligned} \dim S_1 &= \frac{1}{12} n(n + 1)^2(n + 2), \\ \dim S_2 &= \binom{n + 4}{4}. \end{aligned} \tag{28}$$

Finalmente, dada una longitud d el espacio que generan linealmente todas las posibles matrices C es el espacio total $\text{Sym}(N + 1)$.

La demostración del resultado será dada en el apéndice.

7. Extrayendo la estructura afín y euclídea de la cuádrlica de los segmentos.

La QoS está determinada por el par de matrices (C_1, C_2) definidas salvo un factor de escala común. Cambiando el par (C_1, C_2) por $(C_1, \lambda C_2)$ supone cambiar la unidad de longitud, dado que de (14,15) se tiene que

$$d^2 = -2 \frac{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top C_1 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top C_2 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \tag{29}$$

Por tanto, la QoS determina no solamente el grupo de semejanzas, tal y como hace la cuádrlica del absoluto, sino también el grupo de isometrías del espacio. El siguiente resultado describe la relación entre la QoS y la geometría estratificada del espacio usual.

Teorema 7.1. *Una matriz regular H de dimensiones $(n + 1) \times (n + 1)$ representa*

1. *una semejanza si y sólo si $\tilde{H}^\top C_1 \tilde{H} \sim C_1$.*
2. *una afinidad si y sólo si $\tilde{H}^\top C_2 \tilde{H} \sim C_2$.*
3. *una isometría si y sólo si $(\tilde{H}^\top C_1 \tilde{H}, \tilde{H}^\top C_2 \tilde{H}) \sim (C_1, C_2)$ o, equivalentemente, si y sólo si $\tilde{H}^\top C \tilde{H} \sim C$.*

Demostración. El hecho de que \tilde{H} deja invariante C_1 (resp. C_2, C) es, debido al resultado 5.5, equivalente al hecho de que el conjunto de segmentos $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ tales que $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ (resp. $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \infty, \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d$), es H -invariante. En el primer caso, esto es equivalente a la H -invariancia del conjunto de conos que pasan a través de la cuádrlica del absoluto Ω_∞ , lo cual es a su vez equivalente a la invariancia de Ω_∞ misma.

La H -invariancia de $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \infty$ es equivalente a la H -invariancia del hiperplano del infinito, es decir, a que H sea una afinidad. Finalmente, la invariancia de los segmentos de longitud d caracteriza las isometrías, lo que es equivalente a $(\tilde{H}^\top C_1 \tilde{H}, \tilde{H}^\top C_2 \tilde{H}) \sim (C_1, C_2)$. \square

Veamos ahora varias técnicas para extraer la geometría afín y euclídea de la QoS. Primero, escribamos

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}_y \mathbf{x}.$$

Siendo \mathbf{A}_y la matriz de la esfera de radio d centrada en \mathbf{y} . Las coordenadas de \mathbf{A}_y son polinomios de grado dos en las coordenadas de \mathbf{y} :

$$(\mathbf{A}_y)_{ij} = \sum_{k,l=0}^n \mathbf{C}_{ik}^{jl} y_k y_l$$

donde los coeficientes \mathbf{C}_{ik}^{jl} fueron definidos mediante (48).

El plano del infinito puede ser recuperado como el hiperplano polar del centro de la esfera, es decir,

$$\pi_\infty = \mathbf{A}_y \mathbf{y}. \tag{30}$$

La geometría euclídea puede ser recuperada también, por ejemplo obteniendo la cuádrca absoluta dual (DAQ). Como es bien conocido, la DAQ puede ser definida como la aplicación que asigna a cada hiperplano π su punto ortogonal en el infinito $\mathbf{Q}_\infty^* \pi$. Teniendo en cuenta que el punto ortogonal del infinito de π puede ser obtenido como la intersección de π_∞ con la recta definida por \mathbf{y} y el polo del hiperplano π con respecto a la esfera centrada en \mathbf{y} y con radio d , no es difícil llegar a la siguiente expresión para la DAQ:

$$\mathbf{Q}_\infty^* = (\mathbf{y}^\top \mathbf{A}_y \mathbf{y}) \mathbf{A}_y^* - \det(\mathbf{A}_y) \mathbf{y} \mathbf{y}^\top. \tag{31}$$

Tanto (30) como (31) no son completamente satisfactorias, debido a su dependencia en \mathbf{y} ; de hecho (30) tiene grado 3 y (31) tiene grado $2(n + 2)$. En esta sección proporcionamos soluciones alternativas sin esta desventaja.

7.1. Extrayendo el plano del infinito a partir de \mathbf{C}_2

Expresiones cerradas del plano del infinito a partir de los coeficiente de \mathbf{C}_2 pueden ser obtenidas mediante el siguiente resultado:

Teorema 7.2. *El plano del infinito puede ser obtenido a partir de \mathbf{C}_2 como sigue: tómense cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, n\}$, entonces*

$$\pi_\infty \sim \begin{pmatrix} \sigma(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_\alpha)^\top \mathbf{C}_2 \sigma(\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma) \\ \vdots \\ \sigma(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_\alpha)^\top \mathbf{C}_2 \sigma(\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma) \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sean \mathbf{x} las coordenadas del plano del infinito. Usando de nuevo el resultado 5.3 tenemos que

$$\mathbf{C}_2(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top.$$

Entonces

$$\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha)^\top \mathbf{C}_2 \sigma(\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma) = \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha)^\top \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top \sigma(\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma),$$

y usando (2,5,6)

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha)^\top \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \langle \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha), \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{S}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha), \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \text{trace}((\mathbf{e}_i \mathbf{e}_\alpha^\top + \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_i^\top)(2\mathbf{x}\mathbf{x}^\top)) \\ &= 2x_i x_\alpha, \end{aligned}$$

luego

$$\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha)^\top \mathbf{C}_2 \sigma(\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma) = 4x_i x_\alpha x_\beta x_\gamma,$$

y se sigue el resultado deseado. \square

7.2. Extrayendo la DAQ a partir de \mathbf{C}_1

Puesto que \mathbf{C}_1 proporciona todos los conos con base la cuádrca del absoluto, debería ser posible recuperar la DAQ a partir de ella. El siguiente resultado y la discusión subsiguiente muestra que esta tarea puede ser llevada a cabo de una forma algebraicamente eficiente.

Teorema 7.3. *Supongamos que el punto coordenado \mathbf{e}_α no yace en π_∞ . Entonces los planos de la cuádrca absoluta dual \mathbf{Q}_∞^* que pasan por el punto de coordenadas \mathbf{e}_α están definidos por la matriz*

$$\mathbf{Q}_\alpha^* = \left((\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha)^\top \mathbf{C}_1 \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_\alpha))_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i, j \neq \alpha}} \right)^*$$

en el siguiente sentido: un hiperplano π pertenece a $\mathbf{Q}_\infty^* \cap \{\pi_\alpha = 0\}$ si y sólo si

$$\pi_\alpha = 0, \text{ y } \pi_\alpha^\top \mathbf{Q}_\alpha^* \pi_\alpha = 0$$

donde $\pi_\alpha = (\pi_0, \dots, \pi_{\alpha-1}, \pi_{\alpha+1}, \dots, \pi_n)^\top$.

Demostración. La ecuación del cono $V_{\mathbf{y}}$ de vértice \mathbf{y} que contiene a la cuádrca del absoluto es $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C}_1 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Por tanto la intersección $V_{\mathbf{e}_\alpha} \cap \{x_\alpha = 0\}$ está dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_\alpha &= 0, \\ \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\alpha)^\top \mathbf{C}_1 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\alpha) &= \sum_{\substack{i, j=0 \\ i, j \neq \alpha}}^n x_i x_j \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha)^\top \mathbf{C}_1 \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

Usando $(x_0, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_n)^\top$ como coordenadas en el hiperplano $x_\alpha = 0$ vemos que la matriz

$$\mathbf{Q}_\alpha = (\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha)^\top \mathbf{C}_1 \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_\alpha))_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i, j \neq \alpha}}$$

define una cuádrca $V_{\mathbf{e}_\alpha} \cap \{x_\alpha = 0\}$ la cual, puesto que suponemos $\mathbf{e}_\alpha \notin \pi_\infty$, resulta ser no degenerada. En consecuencia su matriz adjunta \mathbf{Q}_α^* determina sus espacios tangentes $\pi_\alpha = (\pi_0, \dots, \pi_{\alpha-1}, \pi_{\alpha+1}, \dots, \pi_n)^\top$. Los hiperplanos definidos por dichos

espacios tangentes y \mathbf{e}_α son hiperplanos de \mathbb{Q}_∞^* pasando a través de \mathbf{e}_α , i.e., aquellos $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \dots, \pi_{\alpha-1}, 0, \pi_{\alpha+1}, \dots, \pi_n)^\top$ tales que

$$\boldsymbol{\pi}_\alpha^\top \mathbb{Q}_\alpha^* \boldsymbol{\pi}_\alpha = 0.$$

□

Sea M una matriz y denotemos por $\Lambda_\alpha(M)$ la submatriz resultante de suprimir su fila y columna α . Como consecuencia del último resultado, vemos que si ninguno de los puntos $\mathbf{e}_\alpha \notin \boldsymbol{\pi}_\infty$ entonces existen constantes no nulas λ_α tales que

$$\Lambda_\alpha(\mathbb{Q}_\infty^*) = \lambda_\alpha \mathbb{Q}_\alpha^*, \quad \alpha = 0, \dots, n.$$

Es inmediato recuperar la DAQ a partir de estos sistemas sobredeterminados obtenidos a partir de \mathbb{C}_1 . Nótese que si cualquiera de los $\mathbf{e}_\alpha \in \boldsymbol{\pi}_\infty$, lo cual puede ser detectado mediante el menor rango de \mathbb{Q}_α , un cambio de coordenadas proyectivo llevaría todo a una posición no singular genérica.

En el caso tridimensional, tendríamos cuatro matrices \mathbb{Q}_α^* . Denotando por

$$\mathbb{C}_{ij}^{kl} = \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha)^\top \mathbb{C}_1 \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_\alpha),$$

resultan explícitamente dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_0^* &= \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{10}^{10} & \mathbb{C}_{10}^{20} & \mathbb{C}_{10}^{30} \\ \mathbb{C}_{20}^{10} & \mathbb{C}_{20}^{20} & \mathbb{C}_{20}^{30} \\ \mathbb{C}_{30}^{10} & \mathbb{C}_{30}^{20} & \mathbb{C}_{30}^{30} \end{pmatrix}^*, & \mathbb{Q}_1^* &= \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{01}^{01} & \mathbb{C}_{01}^{21} & \mathbb{C}_{01}^{31} \\ \mathbb{C}_{21}^{01} & \mathbb{C}_{21}^{21} & \mathbb{C}_{21}^{31} \\ \mathbb{C}_{31}^{01} & \mathbb{C}_{31}^{21} & \mathbb{C}_{31}^{31} \end{pmatrix}^* \\ \mathbb{Q}_2^* &= \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{02}^{02} & \mathbb{C}_{02}^{12} & \mathbb{C}_{02}^{32} \\ \mathbb{C}_{12}^{02} & \mathbb{C}_{12}^{12} & \mathbb{C}_{12}^{32} \\ \mathbb{C}_{32}^{02} & \mathbb{C}_{32}^{12} & \mathbb{C}_{32}^{32} \end{pmatrix}^*, & \mathbb{Q}_3^* &= \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{03}^{03} & \mathbb{C}_{03}^{13} & \mathbb{C}_{03}^{23} \\ \mathbb{C}_{13}^{03} & \mathbb{C}_{13}^{13} & \mathbb{C}_{13}^{23} \\ \mathbb{C}_{23}^{03} & \mathbb{C}_{23}^{13} & \mathbb{C}_{23}^{23} \end{pmatrix}^* \end{aligned}$$

7.3. Núcleos de \mathbb{C} , \mathbb{C}_1 y \mathbb{C}_2

El núcleo de una cuádrica es un invariante proyectivo de la misma que es fácil de calcular. A continuación, proporcionamos una interpretación geométrica de los núcleos de \mathbb{C} , \mathbb{C}_1 y \mathbb{C}_2 .

Teorema 7.4. *Los segmentos del núcleo de la cuádrica \mathbb{C}_1 son aquellos cuyos extremos son puntos del infinito correspondientes a direcciones ortogonales, mientras que los segmentos del núcleo de \mathbb{C}_2 son aquellos que tienen al menos uno de sus extremos en el plano del infinito. Finalmente, el núcleo de \mathbb{C} coincide con el de \mathbb{C}_1 .*

Demostración. Usando coordenadas euclídeas, es inmediato comprobar que

$$\mathbb{C}_1^{\text{euc}} \sigma(\mathbf{x}^{\text{euc}}, \mathbf{y}^{\text{euc}}) = 0$$

es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^{\text{euc}} y_i^{\text{euc}} &= 0, \\ x_0^{\text{euc}} y_0^{\text{euc}} &= 0, \\ x_0^{\text{euc}} y_j^{\text{euc}} + y_0^{\text{euc}} x_j^{\text{euc}} &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

del cual se desprende fácilmente el primer enunciado. La demostración del segundo se sigue inmediatamente, puesto que $C_2^{\text{euc}}\sigma(\mathbf{x}^{\text{euc}}, \mathbf{y}^{\text{euc}}) = 0$ si y sólo si $x_0y_0 = 0$. Finalmente, es inmediato comprobar que el núcleo de C tiene las mismas ecuaciones que el de C_1 . \square

Nótese que una consecuencia particular de el último resultado es que las ecuaciones

$$C_1\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$$

son las de la cuádrlica del absoluto.

8. La cuádrlica de círculos y el complejo cuadrático del absoluto

De acuerdo con el resultado 5.2, es equivalente para que dos puntos definan un segmento de longitud cero y que se encuentren en una recta que interseca la cónica del absoluto. En el caso bidimensional, esto proporciona un método directo de recuperar los puntos cíclicos conjugados del infinito \mathbf{i} y \mathbf{j} a partir de C_1 . De hecho, la mencionada equivalencia puede ser escrita como

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})^\top (\mathbf{ij}^\top + \mathbf{ji}^\top) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top C_1 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Suponiendo sin pérdida de generalidad que ambas expresiones son idénticas e igualando los coeficientes, obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales que dan lugar a la expresión de $Q_\infty^* = \mathbf{ij}^\top + \mathbf{ji}^\top$ en términos de los coeficientes de la matriz de la cónica dual degenerada $C_1 = (c_{i,j})$ como

$$Q_\infty^* = \begin{pmatrix} -2c_{1,2} - c_{5,5} & \sqrt{2}c_{2,3} + c_{4,5} & \sqrt{2}c_{1,4} + c_{3,5} \\ \sqrt{2}c_{2,3} + c_{4,5} & -2c_{0,2} - c_{4,4} & \sqrt{2}c_{0,5} + c_{3,4} \\ \sqrt{2}c_{1,4} + c_{3,5} & \sqrt{2}c_{0,5} + c_{3,4} & -2c_{0,1} - c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

El caso tridimensional no es tan sencillo. Recordemos la representación de rectas mediante coordenadas de Plücker [4, p. 70]. La recta definida por \mathbf{x} e \mathbf{y} proporciona los números p_{ij} dados por

$$p_{ij} = x_iy_j - x_jy_i.$$

La identidad

$$p_{ij}p_{kl} = z_{il}z_{jk} - z_{ik}z_{jl}$$

muestra que cualquier cuádrlica en las coordenadas de Plücker puede ser escrita en términos de las coordenadas simétricas z_{ij} , i.e., una cuádrlica en el espacio de segmentos. Un cuádrlica en coordenadas de Plücker relevante para la reconstrucción euclídea es el complejo cuadrático absoluto (AQC) [12, 17], dado por las rectas que intersecan la cuádrlica del infinito. El siguiente resultado muestra que la AQC puede ser escrita en términos de C_1 de forma particularmente satisfactoria. Nótese que, dado que la teoría de la AQC ha sido desarrollada solo en dimensión 3, algunos resultados se restringirán a este caso particular.

Teorema 8.1. *La cuádriga \mathbf{C}_1 coincide con el complejo cuadrático absoluto Σ en el siguiente sentido: dados vectores cualesquiera \mathbf{x}, \mathbf{y} tenemos que*

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})^\top \Sigma (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C}_1 \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (32)$$

Además, los coeficientes de \mathbf{C}_1 pueden ser obtenidos a partir de los coeficientes de Σ de acuerdo con la ecuación

$$\mathbf{C}_{ij}^{kl} = \Sigma_{ik}^{lj} + \Sigma_{il}^{kj}, \quad (33)$$

donde \mathbf{C}_{ij}^{kl} está definido por la ecuación (48) y, análogamente,

$$\Sigma_{ij}^{kl} = (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j)^\top \Sigma (\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l).$$

Recíprocamente, suponiendo $n = 3$, la AQC puede ser recuperada a partir de la QoS como sigue:

$$\Sigma_{ij}^{kl} = \frac{1}{3} (\mathbf{C}_{il}^{jk} - \mathbf{C}_{ik}^{jl}). \quad (34)$$

Demostración. Puesto que la identidad que queremos probar es geométrica, es decir, invariante bajo cambios lineales del sistema de coordenadas, es suficiente con comprobarla para un sistema de coordenadas euclídeo:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}^{\text{euc}}, \mathbf{y}^{\text{euc}})^\top \mathbf{C}_1^{\text{euc}} \sigma(\mathbf{x}^{\text{euc}}, \mathbf{y}^{\text{euc}}) &= \sum_{i=1}^n (x_i^{\text{euc}} y_0^{\text{euc}} - y_i^{\text{euc}} x_0^{\text{euc}})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_{i0}^2 \\ &= (\mathbf{x}^{\text{euc}} \wedge \mathbf{y}^{\text{euc}})^\top \Sigma^{\text{euc}} (\mathbf{x}^{\text{euc}} \wedge \mathbf{y}^{\text{euc}}) \end{aligned}$$

La ecuación (33) puede ser demostrada calculando la derivada $\frac{\partial^4}{\partial x_i \partial y_j \partial x_k \partial y_l}$ de ambos lados de (32), lo cual da lugar a la relación

$$\mathbf{C}_{ij}^{kl} + \mathbf{C}_{il}^{kj} = \Sigma_{ij}^{kl} + \Sigma_{il}^{kj}. \quad (35)$$

Permutando cíclicamente los índices j, k, l en esta ecuación, resulta que

$$\mathbf{C}_{ik}^{lj} + \mathbf{C}_{ij}^{lk} = \Sigma_{ik}^{lj} + \Sigma_{ij}^{lk}, \quad (36)$$

$$\mathbf{C}_{il}^{jk} + \mathbf{C}_{ik}^{jl} = \Sigma_{il}^{jk} + \Sigma_{ik}^{jl}, \quad (37)$$

y calculando (35) - (36) + (37), teniendo en cuenta las simetrías de \mathbf{C}_{ij}^{kl} y Σ_{ij}^{kl} , se obtiene la identidad (33).

Para demostrar la identidad (34), recordamos primero que la AQC satisface la condición lineal adicional dada por [25, teorema 5.3]. No es difícil ver que esta restricción es equivalente a

$$\Sigma_{ij}^{kl} + \Sigma_{il}^{jk} + \Sigma_{ik}^{jl} = 0 \quad (38)$$

para cualesquiera $i, j, k, l = 0, \dots, 3$. Ahora definimos el espacio lineal Σ dado por todos los tensores (Σ_{ij}^{kl}) que satisfacen (38) junto con las simetrías

$$\Sigma_{ij}^{kl} = -\Sigma_{ji}^{kl} = -\Sigma_{ij}^{lk} = \Sigma_{kl}^{ij}. \quad (39)$$

Nótese que estos tensores constituyen un espacio vectorial de dimensión $21 - 1 = 20$, el cual coincide con la dimensión de S_1 dada por (6.1). Por tanto tenemos que comprobar que (33) define un isomorfismo lineal $\phi : \Sigma \rightarrow S_1$. Primero demostremos que ϕ está bien definido, i.e., $\mathbf{C} = \phi(\Sigma) \in S_1$ para cualquier $\Sigma \in \Sigma$. Usando el resultado (6.1) es suficiente con ver que \mathbf{C} definida por (33) satisface $\langle \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \mathbf{C} \rangle = 0$ para cualesquiera \mathbf{x} . Pero tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \mathbf{C} \rangle &= \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \\ \sum_{i,j,k,l=0}^3 x_i x_j x_k x_l \mathbf{C}_{ij}^{kl} &= \sum_{i,j,k,l=0}^3 x_i x_j x_k x_l (\Sigma_{ik}^{lj} + \Sigma_{il}^{kj}) = 2(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}) \Sigma (\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

y por tanto ϕ está efectivamente bien definida.

Definamos ahora la inversa de ϕ , $\varphi : S_1 \rightarrow \Sigma$, usando la relación (34). Para demostrar que φ está bien definida, observemos primero que la relación (38) fuerza a \mathbf{C} a satisfacer la ecuación

$$\mathbf{C}_{ij}^{kl} + \mathbf{C}_{il}^{jk} + \mathbf{C}_{ik}^{lj} = 0, \quad (41)$$

(la cual es una consecuencia de (40)). Usando (41) y las simetrías previamente mencionadas es inmediato comprobar que φ está realmente bien definida, es decir, $\Sigma = \varphi(\mathbf{C}) \in \Sigma$. Finalmente probemos que $\phi(\varphi(\mathbf{C})) = \mathbf{C}$. De hecho, puesto que $\mathbf{C}_{ij}^{kl} = \Sigma_{ik}^{lj} + \Sigma_{il}^{kj}$ tenemos que

$$\Sigma_{ik}^{lj} + \Sigma_{il}^{kj} = \frac{1}{3}(\mathbf{C}_{ij}^{kl} - \mathbf{C}_{il}^{kj} + \mathbf{C}_{ij}^{lk} - \mathbf{C}_{ik}^{lj}) = \frac{1}{3}(2\mathbf{C}_{ij}^{kl} + \mathbf{C}_{ij}^{kl}) = \mathbf{C}_{ij}^{kl}, \quad (42)$$

en donde la ecuación (41) ha sido usada de nuevo. Por tanto $\phi \circ \varphi = \text{Id}_\Sigma$ y, siendo ambos espacios vectoriales de la misma dimensión, resulta que ϕ y φ son isomorfismos y $\phi = \varphi^{-1}$, luego la ecuación (34) queda probada. \square

9. Cálculo lineal de la QoS

Cada segmento $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ de longitud d proporciona una ecuación lineal en \mathbf{C}

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (43)$$

Mediante el resultado (28), sabemos que son necesarias

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Sym}(N+1) - 1 = (N+1)(N+2)/2 - 1$$

ecuaciones para determinar \mathbf{C} , dado que no hay ningún subespacio lineal de dimensión menor que pueda contener las cuádricas \mathbf{C} . Además, el resultado 5.5 asegura que una única solución \mathbf{C} será obtenida usando L segmentos de longitud d en posición general.

Ocupémonos ahora del problema de la recuperación de la geometría euclídea a partir del conocimiento de longitudes arbitrarias d_i de un conjunto de segmentos $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}$. Puesto que las correspondientes cuádricas \mathbf{C}_{d_i} se escriben como

$$\mathbf{C}_{d_i} = \mathbf{C}_1 + \frac{d_i^2}{2} \mathbf{C}_2,$$

es suficiente con obtener C_1 y C_2 a partir de las ecuaciones lineales

$$\sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)^\top \left(C_1 + \frac{d_i^2}{2} C_2 \right) \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = 0 \quad (44)$$

lo cual, en principio, supone calcular $2L + 1$ parámetros salvo un factor común de escala. Sin embargo, ahora veremos como, debido al resultado 6.1, L ecuaciones lineales bastan.

De los resultados 5.3 y 6.1 sabemos ya que S_2 es el espacio lineal generado por las matrices de la forma $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top$. Por tanto una base $\{M_\beta^{(2)}\}_{\beta=1}^{\dim S_2}$ de S_2 puede ser fácilmente obtenida a partir de esta parametrización. Nuevamente, usando 6.1, vemos que $S_1 = S_2^\perp$, y por tanto una base $\{M_\alpha^{(1)}\}_{\alpha=1}^{\dim S_1}$ de S_1 puede ser obtenida despejando C_1 del sistema de $\dim S_2$ ecuaciones lineales

$$\langle M_\beta^{(2)}, C_1 \rangle = 0.$$

Una vez obtenidas dichas bases, podemos parametrizar C_1 y C_2 linealmente como sigue

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{\alpha=1}^{\dim S_1} a_\alpha^{(1)} M_\alpha^{(1)} \\ C_2 &= \sum_{\beta=1}^{\dim S_2} a_\beta^{(2)} M_\beta^{(2)} \end{aligned} \quad (45)$$

para ciertos coeficientes desconocidos $a_\alpha^{(1)}, a_\beta^{(2)}$. Ahora las ecuaciones (44) pueden ser escritas como

$$\sum_{\alpha=1}^{\dim S_1} \mu_\alpha^i a_\alpha^{(1)} + \frac{d_i^2}{2} \sum_{\beta=1}^{\dim S_2} \nu_\beta^i a_\beta^{(2)} = 0 \quad (46)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_\alpha^i &= \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)^\top M_\alpha^{(1)} \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), \\ \nu_\beta^i &= \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)^\top M_\beta^{(2)} \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i). \end{aligned} \quad (47)$$

Por tanto, a partir de estas $\dim S_1 + \dim S_2 - 1 = L$ ecuaciones, las $L + 1$ incógnitas $a_j^{(1)}, a_k^{(2)}$ se pueden recuperar salvo un factor común de escala, y por tanto se recupera la QoS.

Objetivo

Dado un conjunto de imágenes de una escena tridimensional conteniendo un conjunto de segmentos $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}$ de longitudes conocidas d_i (posiblemente salvo un factor de escala común), obtener una reconstrucción 3D euclídea.

Suponemos que las bases $\mathbf{M}_\alpha^{(1)}$ y $\mathbf{M}_\beta^{(2)}$ han sido pre-calculadas usando la técnica sugerida bajo la fórmula (44).

Algoritmo

- (i) Obténgase una reconstrucción proyectiva de la escena.
- (ii) Calcúlense los coeficientes $\{\mu_\alpha^i, \nu_\beta^i\}$ de acuerdo con las fórmulas (47).
- (iii) Resuélvase el sistema lineal homogéneo (46), obteniéndose así los coeficientes $\{a_\alpha^{(1)}, a_\beta^{(2)}\}$.
- (iv) Constrúyase el par de matrices $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ de acuerdo con las ecuaciones (45).
- (v) Calcúlese una homografía rectificante \mathbf{H} usando una de las técnicas siguientes:
 - a. Primeramente, obténgase el plano del infinito π_∞ a partir de \mathbf{C}_2 usando el resultado 7.2. Una vez obtenido, calcúlese una reconstrucción afín. Entonces calcúlese la reconstrucción euclídea usando la técnica de ajuste afín recordada en la sección 2.
 - b. Calcúlese la DAQ a partir de \mathbf{C}_1 según se indicó en la subsección 7.2 y obténgase \mathbf{H} de la misma o calcúlese la AQC según se describe en 8.1, y obténgase \mathbf{H} usando [25].

10. Resultados experimentales

10.1. Marco general

El rendimiento de los algoritmos que la teoría expuesta sugiere ha sido evaluado en diferentes marcos experimentales. Algunas de las implementaciones hacen uso de un ajuste afín. Se han considerado cuatro algoritmos:

- Extracción de la homografía rectificante a partir de \mathbf{C}_1 (C1).
- Extracción de la homografía rectificante a partir de \mathbf{C}_1 seguido de un ajuste afín (C1A).
- Calibración afín usando el plano del infinito extraído de \mathbf{C}_2 seguido de un ajuste afín (C2A).
- Ajuste afín puro (A) (incluido simplemente por comparación).

Los experimentos están basados en conjuntos de segmentos de igual longitud, de forma que el principal parámetro de la calidad de cada reconstrucción es la desviación típica de las longitudes de los segmentos corregidas, dividida por su media (parámetro σ/μ). La probabilidades de fallo de los algoritmos también han sido estudiadas: aparte del posible fallo del ajuste afín (si la aproximación calculada de $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$ no es definida (2)) la extracción de la homografía rectificante a partir de \mathbf{C}_1 falla y la matriz AQC de rango tres no es semidefinida.

10.2. Experimentos con datos sintéticos

El primer conjunto de experimentos trata con datos bidimensionales. Se obtienen segmentos aleatorios de longitud uno dentro de un cuadrado con esquinas $\mathbf{v}_i, i = 1, 2, 3, 4$, y una homografía aleatoria se les aplica. La homografía se define como aquella que transforma cada punto \mathbf{v}_i en $\mathbf{v}_i + \mathbf{n}_i$, donde \mathbf{n}_i es un vector aleatorio de componentes de media nula y desviación típica $\sigma=1/8$ del lado del cuadrado. Se añade entonces ruido gaussiano de media nula y componentes independientes a los puntos distorsionados y los algoritmos se aplican a la obtención de la homografía rectificante usando las longitudes originales de los segmentos como dato de entrada. En la figura Figure 1 se muestra un conjunto típico de datos de entrada.

Los algoritmos han sido comprobados de forma similar en el caso tridimensional, empleando segmentos aleatorios de longitud unidad en coordenadas euclídeas que se encuentran dentro de un cubo de vértices $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, 8$. La homografía aleatoria se define como aquella que transforma cinco vértices seleccionados del cubo en los puntos correspondientes $\mathbf{v}_i + \mathbf{n}_i$ con \mathbf{n}_i definidos como en el caso bidimensional. La figura 2 muestra un conjunto de datos de entrada.

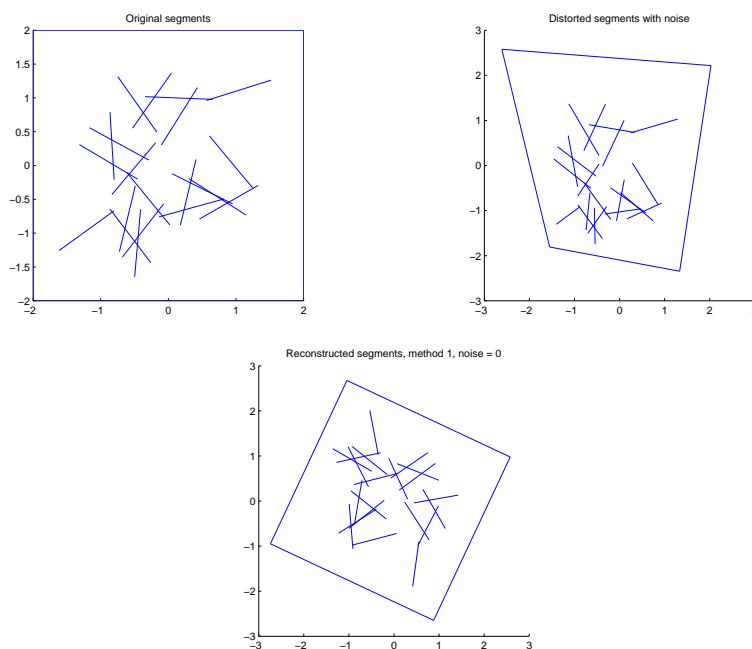


Figura 1: Datos sintéticos bidimensionales

La figura 3 muestra en los casos 2D y 3D el rendimiento de los diferentes algoritmos como una función de la variancia del ruido. La dependencia del rendimiento de los algoritmos en el número de segmentos se ilustra en la figura 4. El algoritmo C1A tiene un rendimiento muy cercano al mejor en términos del parámetro de calidad σ/μ , mientras que la ventaja del algoritmo C2A sobre el C1A en el caso bidimensional se invierte en el caso 3D. El algoritmo C1A tiene también un buen rendimiento en térmi-

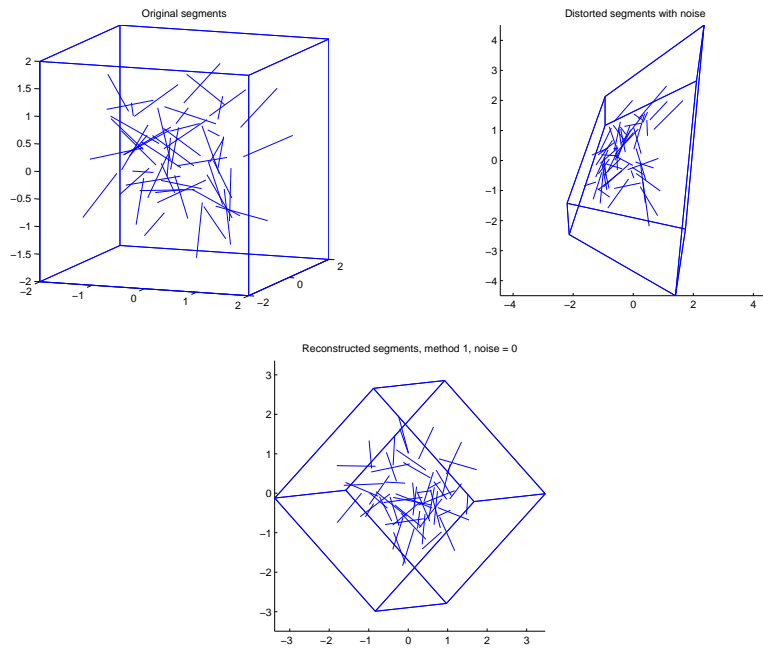


Figura 2: Datos sintéticos tridimensionales

nos de la ratio de fracasos, mientras que el C2A es, en términos de este parámetro, el que se comporta peor.

En la figura 4 la comparación de los tres primeros algoritmos con el algoritmo de referencia C2A revela que su rendimiento es muy pobre en cuando el número de segmentos es el mínimo necesario. Sin embargo, los rendimientos mejoran considerablemente cuando el número de segmentos se dobla, mejorando a partir de entonces lentamente los rendimientos.

El segundo experimento con datos sintéticos trata la actualización euclídea de las reconstrucciones proyectivas obtenidas a partir de imágenes. Para cada instancia del experimento, se genera un conjunto aleatorio de segmentos 3D de igual longitud y situados dentro de un cubo, junto con parámetros intrínsecos y extrínsecos aleatorios de un par de cámaras, orientadas de forma que el cubo se sitúa aproximadamente en el centro de la imagen, con puntos que se proyectan a una distancia máxima de 1000 píxeles del centro de la imagen. Se añade ruido gaussiano de media nula a las proyecciones. Una de estas configuraciones aleatorias se muestra en la figura 5. Una reconstrucción proyectiva de la escena se obtiene a partir de las dos imágenes usando los algoritmos 10.1 (cálculo de la matriz fundamental con ocho puntos) y 11.1 (triangulación óptima) de [5], la cual es hecha posteriormente cuasi-afín usando el algoritmo 20.1 de [5]. Las cuatro técnicas comprobadas previamente se aplican de nuevo. Los resultados, que se encuentran en la figura 6, son semejantes a los de los conjuntos previos de experimentos.

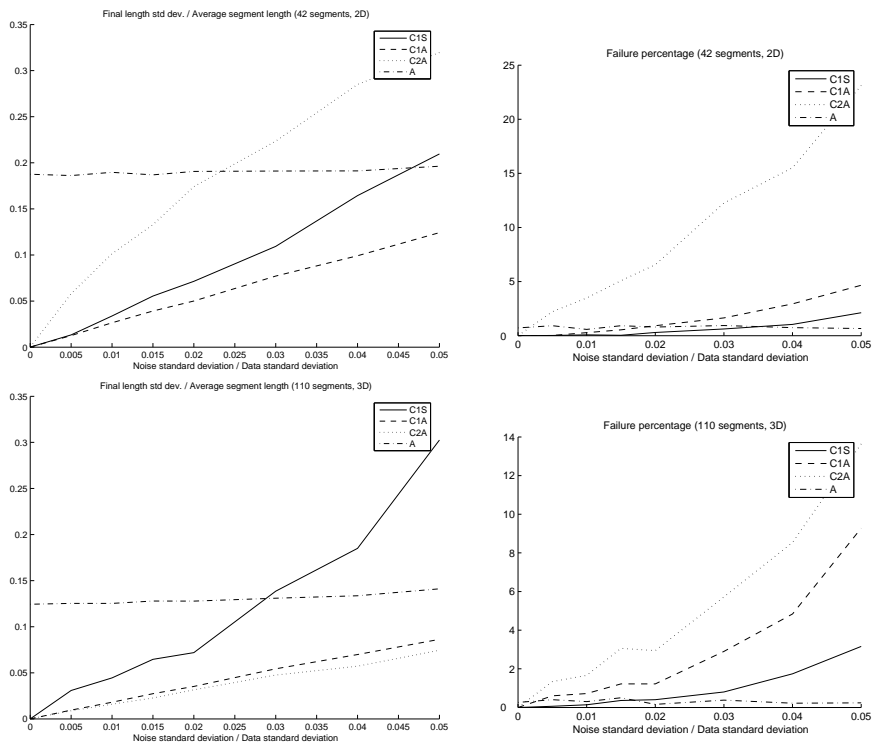


Figura 3: Datos sintéticos: dependencia del rendimiento en la variancia del ruido en 2D (arriba) y 3D (abajo) para 42 y 110 segmentos, respectivamente.

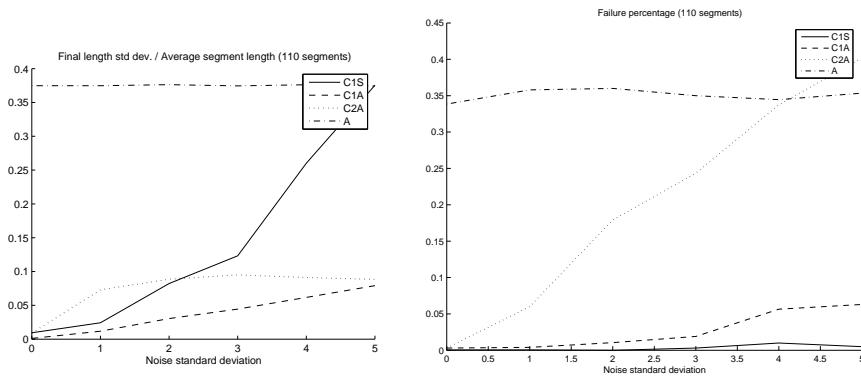


Figura 6: Datos sintéticos: reconstrucción a partir de imágenes. El rendimiento de los algoritmos como función del ruido de la imagen.

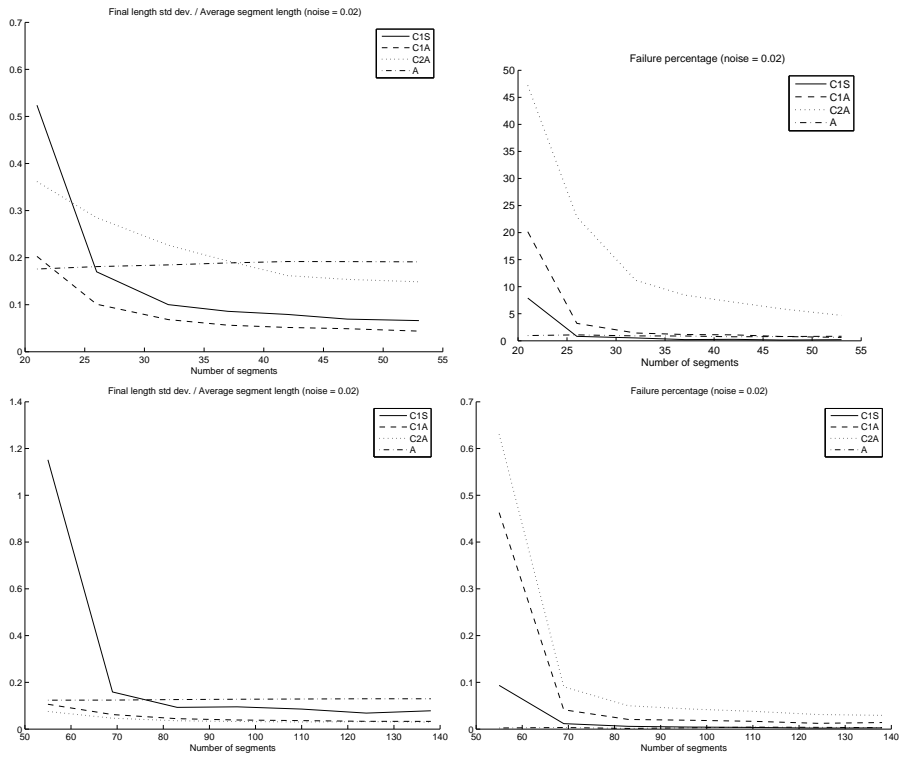


Figura 4: Datos sintéticos: dependencia del rendimiento en el número de segmentos en los casos 2D (arriba) y 3D (abajo) para una desviación típica del ruido 2% de la desviación típica de los datos.

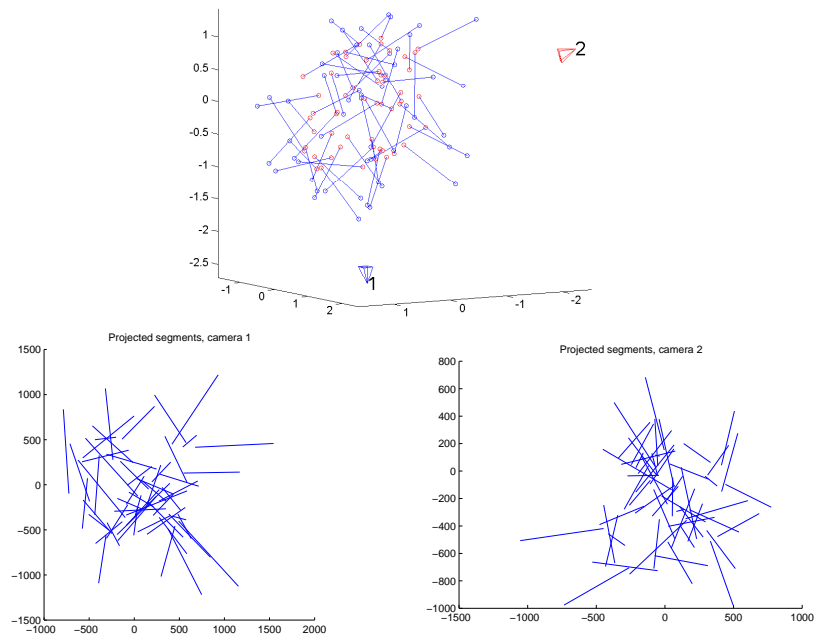


Figura 5: Datos sintéticos: reconstrucción a partir de imágenes. Arriba: un ejemplo de la escena sintética original. Abajo: las vistas correspondientes de los segmentos.

10.3. Experimentos con imágenes reales

Para comprobar el rendimiento de los algoritmos en el caso 2D usando datos reales, se tomó una foto de una hoja de papel en la que se mostraban segmentos aleatorios de la misma longitud. Después de detectar los extremos de los segmentos, se obtuvieron homografías rectificantes usando los cuatro algoritmos comprobados. Los resultados se muestran en la figura 7. Es particularmente satisfactorio el valor σ/μ , igual a 0,014, que se obtiene usando el algoritmo C2A.

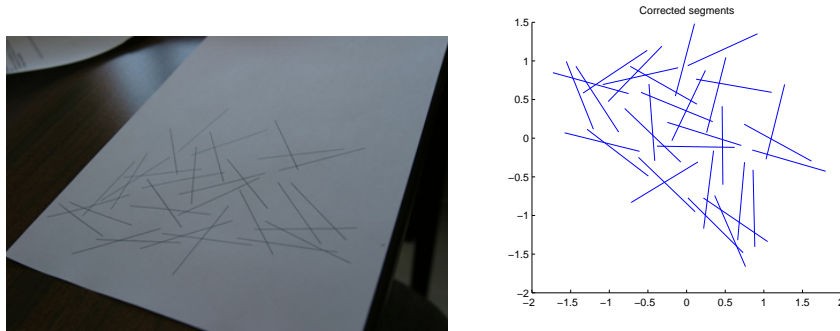


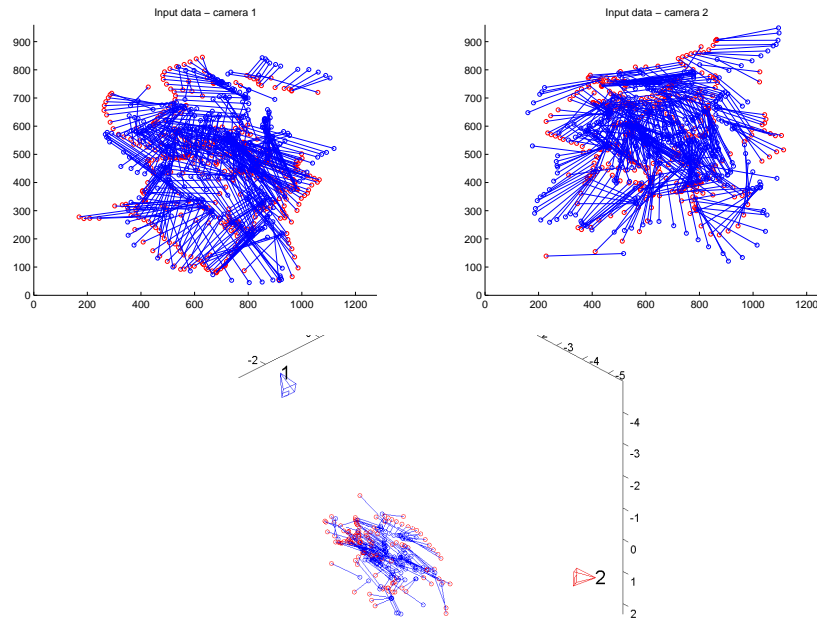
Figura 7: Experimentos con datos reales bidimensionales. A la izquierda, la imagen original. A la derecha, la versión corregida.

Los experimentos de reconstrucciones 3D basadas en imágenes reales se realizaron usando una varilla con tres LEDs equidistantes, cuyo movimiento se grabó usando dos cámaras de vídeo sincronizadas con una resolución de 1280×960 píxeles. La detección de los LEDs se llevó a cabo automáticamente y se obtuvo una reconstrucción proyectiva que después se mejoró a una cuasi-afín. El mejoramiento euclídeo se llevó a cabo usando los algoritmos propuestos, empleando exclusivamente el conocimiento de la distancia entre los dos LEDs en los extremos de la varilla. El LED medio se usó para poder tener una medida adicional de la precisión de la reconstrucción.

La figura 8 muestra los puntos detectados en 131 fotogramas válidos y la reconstrucción 3D resultante, calculada con el método C2A a partir de una calibración proyectiva con error de reproyección medio de 0.41 píxeles. En esta reconstrucción las longitudes de los segmentos satisfacen que $\sigma/\mu = 6,6 \cdot 10^{-3}$ y la máxima longitud es 4% mayor que la longitud mínima. Las ratios de las distancias entre el LED medio y los extremos de la varilla tienen un valor medio de 0.992 y un valor máximo un 8% mayor que el mínimo. Los parámetros intrínsecos calculados incluyen los ángulos de oblicuidad de los píxeles y las razones de aspecto: $\theta_1 = 0,96 \frac{\pi}{2}$, $\tau_1 = 0,99$, $\theta_2 = 0,96 \frac{\pi}{2}$, $\tau_2 = 1,02$, que aproximan los valores exactos de las cámaras de píxeles cuadrados que fueron empleadas en el experimento.

Los resultados fueron refinados usando un ajuste de haces (BA) que forzaba que las cámaras tuvieran píxeles cuadrados y usando una función de coste dada por una combinación lineal del error de reproyección y la desviación típica normalizada de las longitudes de los segmentos σ/μ . Forzar cámaras de píxeles cuadrados implica un incremento inicial del error de reproyección, pero después del ajuste de haces este parámetro se reduce de nuevo a 0,50, y las longitudes de los segmentos 3D recons-

truidos satisfacen $\sigma/\mu = 6,06 \cdot 10^{-5}$, con longitud máxima 1,0003 veces mayor que la mínima. El desplazamiento medio de los puntos 3D de la reconstrucción inicial respecto de la optimizada es 0.084. Los parámetros intrínsecos de la cámara, antes y después el ajuste de haces, se muestran en la figura 8, mostrando la eficacia del algoritmo para la obtención de reconstrucciones 3D.



	Antes BA	Después BA
Longitudes focales	1379.92	1378.50
Puntos principales (hor.)	1375.81	1385.77
Puntos principales (vert.)	605.01	647.42
	707.00	656.07
	448.75	444.79
	434.93	421.15

Figura 8: Experimentos de reconstrucción 3D con datos reales. Arriba: vistas de la varilla con ambas cámaras. Medio: escena 3D reconstruida. Abajo: cálculo de los parámetros intrínsecos de las dos cámaras, antes y después del ajuste de haces (BA).

Apéndice

A. Detalles técnicos

A.1. Demostración del resultado 5.5

Para demostrar 5.5 necesitamos los dos lemas siguientes:

Lema A.1. Sean \mathbf{C} y \mathbf{C}' dos cuádricas de \mathbf{P}^N que toman los mismos valores a lo largo de $\text{im } \sigma$, i.e.,

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C}' \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{P}^N$. Entonces $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$.

Demostración. Escribiendo nuestra hipótesis como

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top (\mathbf{C} - \mathbf{C}') \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

vemos que es suficiente con demostrar que $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ para cualesquiera \mathbf{x}, \mathbf{y} implica que $\mathbf{C} = 0$. Denotemos

$$E = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Denotemos también como $\{\mathbf{e}_i\}$ la base canónica de \mathbf{C}^{n+1} y definamos

$$\mathbf{C}_{ij}^{kl} = \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l). \quad (48)$$

Los coeficientes \mathbf{C}_{ij}^{kl} cumplen las simetrías

$$\mathbf{C}_{ij}^{kl} = \mathbf{C}_{kl}^{ij} = \mathbf{C}_{ij}^{lk} = \mathbf{C}_{ji}^{kl},$$

y, con un sencillo cálculo de la 4ta derivada de E , vemos que

$$\frac{\partial^4 E}{\partial x_i \partial y_j \partial x_k \partial y_l} = 2(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) + \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l)^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j)) = 0,$$

puesto que $E = 0$, y en consecuencia tenemos la simetría adicional

$$\mathbf{C}_{ij}^{kl} = -\mathbf{C}_{il}^{kj},$$

de forma que

$$\mathbf{C}_{ij}^{kl} = -\mathbf{C}_{il}^{jk} = \mathbf{C}_{ik}^{jl} = -\mathbf{C}_{ij}^{lk} = -\mathbf{C}_{ij}^{kl},$$

y entonces $\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \mathbf{C}_{ij}^{kl} = 0$ para cualesquiera i, j, k y l . Puesto que $\{\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) : i \leq j\}$ es una base de \mathbf{C}^{N+1} , concluimos que $\mathbf{C} = 0$. \square

Lema A.2. Si todos los factores irreducibles de

$$E = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

son de grado uno, entonces E es de la forma

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{a}^\top \mathbf{x})(\mathbf{a}^\top \mathbf{y})(\mathbf{b}^\top \mathbf{x})(\mathbf{b}^\top \mathbf{y})$$

para ciertos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{C}^{n+1}$.

Demostración. Sea $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + \mathbf{a}'^\top \mathbf{y})(\mathbf{b}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}'^\top \mathbf{y})(\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbf{c}'^\top \mathbf{y})(\mathbf{d}^\top \mathbf{x} + \mathbf{d}'^\top \mathbf{y})$. Del hecho de que todos los monomios de E son de grado dos tanto en las variables x_i como y_i , deducimos que E debe ser de la forma $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{a}^\top \mathbf{x})(\mathbf{b}^\top \mathbf{x})(\mathbf{c}^\top \mathbf{y})(\mathbf{d}^\top \mathbf{y})$ y, teniendo en cuenta la simetría $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, se sigue que E debe tener la forma requerida. \square

Estamos ahora en condiciones de demostrar el resultado 5.5.

Demostración. Denotemos

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

y

$$E'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \mathbf{C}' \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

y sea

$$\begin{aligned} E &= (E_1)^{a_1} \cdots (E_s)^{a_s}, \\ E' &= (E'_1)^{a'_1} \cdots (E'_{s'})^{a'_{s'}}, \end{aligned}$$

su descomposición en factores irreducibles. Puesto que $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $E'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tienen los mismos ceros, tienen el mismo polinomio reducido R como consecuencia del teorema de los ceros de Hilbert [3, p.49], i.e.,

$$R = E_1 \cdots E_s = E'_1 \cdots E'_{s'}$$

salvo un factor de escala constante λ que suponemos, sin pérdida de generalidad, ser $\lambda = 1$. Reordenando factores si es preciso, obtenemos que $s = s'$ y $E_i = E'_i$ para todo $i = 1, \dots, s$. Tenemos varias posibilidades de acuerdo con que E sea o no reducido:

- Primero, si E es reducido, i.e., $E = R$ entonces se sigue que también $E' = R$, puesto que si algún $a'_i > 1$ entonces $\deg E' > \deg E$, lo que es imposible. Ahora, siendo $E = E'$ el resultado se sigue del lema A.1.
- Si E no es reducido es entonces fácil comprobar que las siguientes son las únicas posibilidades (teniendo en cuenta que $\deg E = \deg E' = 4$). Denotemos $E_i = E_i^{(d)}$ siendo $\deg E_i = d$:
 1. Si $E = (E_1^{(2)})^2$ la comparación de factores irreducibles lleva inmediatamente a que $E' = (E_1^{(2)})^2$ y por tanto $E = E'$ y se sigue el resultado.
 2. De forma similar, si $E = E_1^{(2)}(E_2^{(1)})^2$ entonces necesariamente también $E = E'$.
 3. Si todas las componentes irreducibles son de grado uno entonces, teniendo en cuenta el lema A.2, dado que E no es reducido la única posibilidad es que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ y por tanto

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{a}^\top \mathbf{x})^2 (\mathbf{a}^\top \mathbf{y})^2.$$

Pero en este caso el emparejamiento de las componentes irreducibles fuerza que también $E = E'$ y el resultado queda demostrado.

□

A.2. Demostración del resultado 6.1

Demostración. Usando el resultado 5.3 podemos parametrizar las posibles matrices C_2 como

$$C_2(\mathbf{x}) \sim \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top.$$

Se sigue inmediatamente de la definición de $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que cada coordenada de

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top$$

es proporcional a un monomio de grado cuatro en las variables x_0, \dots, x_n y que ninguno de dichos monomios falta, de forma que S_2 tiene la misma dimensión que el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado cuatro, es decir, $\binom{n+4}{4}$.

Veamos que S_1 es ortogonal a S_2 . Puesto que la distancia de un punto a sí mismo es cero, tenemos la identidad

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top (C_1 + 0 C_2)\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top C_1\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0, \tag{49}$$

que da lugar a un conjunto de ecuaciones lineales que satisfacen las matrices C_1 y por tanto por cualquier elemento de S_1 . Usando (25) y el producto (2) para escribir la ecuación (49) como

$$0 = \text{trace}(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top C_1\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})) = \text{trace}(\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})^\top C_1) \sim \langle C_2(\mathbf{x}), C_1 \rangle, \tag{50}$$

concluimos que $S_1 \perp S_2$. De aquí se deduce una cota superior para $\dim S_1$:

$$\dim S_1 \leq \dim \text{Sym}(N+1) - \dim S_2 = \frac{(N+1)(N+2)}{2} - \binom{n+4}{4} = \frac{1}{12} n(n+1)^2(n+2). \tag{51}$$

Veamos que, de hecho $\dim S_1$ coincide con esta cota. Usando (21) y (16) podemos escribir C_1 como sigue:

$$C_1 = \tilde{H}^\top C_1^{\text{euc}} \tilde{H} = \tilde{H}^\top C_1^{\text{euc}} \tilde{H}^\top = \sum_{i=1}^n (\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_i)\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_i)^\top - \sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)\sigma(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i)^\top - \sigma(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i)\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)^\top),$$

donde \mathbf{k}_i denota las filas de $H = (h_{ij})$. Veamos que los monomios que involucran solo \mathbf{k}_0 y \mathbf{k}_1 son bastantes para alcanzar la dimensión requerida de S_2 . Denotemos

$$E^i = \sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_i)\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_i)^\top - \sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)\sigma(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i)^\top - \sigma(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i)\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)^\top$$

de forma que

$$C_1 = \sum_{i=1}^n E^i.$$

Observemos que, puesto que el cierre topológico de $GL(n+1)$ es el conjunto \mathbf{M}_{n+1} de todas las matrices de orden $n+1$, tenemos que

$$\dim \text{Span} \{C_1(H) : H \in GL(n+1)\} = \dim \text{Span} \{C_1(H) : H \in \mathbf{M}_{n+1}\}.$$

Dado que

$$\{\mathbf{C}_1(\mathbf{H}) : \mathbf{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \supset \{\mathbf{E}^1(\mathbf{H}) : \mathbf{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\},$$

se tiene que

$$\dim \text{Span} \{\mathbf{C}_1(\mathbf{H}) : \mathbf{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \geq \dim \text{Span} \{\mathbf{E}^1(\mathbf{H}) : \mathbf{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \geq \frac{1}{12} n(n+1)^2(n+2),$$

donde la última desigualdad es el contenido del lema A.3.

Finalmente, la demostración de que

$$\text{Span} \{\mathbf{C}(\mathbf{H}) : \mathbf{H} \in \text{GL}(n+1)\} = \text{Sym}(N+1)$$

es enteramente similar al resultado que acabamos de demostrar para \mathbf{C}_1 usando que

$$\mathbf{C} = -\frac{d^2}{4}\mathbf{E}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{E}^i.$$

donde

$$\mathbf{E}^0 = \sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)\sigma(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)^\top$$

y comprobando que las $\binom{n+4}{4}$ derivadas

$$\mathbf{E}_{ijkl}^0 = \frac{\partial^4 \mathbf{E}^0}{\partial h_{i0} \partial h_{j0} \partial h_{k0} \partial h_{l0}}$$

son linealmente independientes de las derivadas (52). □

A.3. Lemas necesarios para la demostración del resultado 6.1

Lema A.3.

$$\dim \text{Span} \{\mathbf{E}^1(\mathbf{H}) : \mathbf{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \geq \frac{1}{12} n(n+1)^2(n+2).$$

Demostración. Definamos

$$\mathbf{E}_{ijkl}^1 = \frac{\partial^4 \mathbf{E}^1}{\partial h_{i0} \partial h_{j0} \partial h_{k1} \partial h_{l1}}. \tag{52}$$

Como todas las derivadas $\mathbf{E}_{ijkl}^1 \in \text{Span} \{\mathbf{E}^1(\mathbf{H}) : \mathbf{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\}$, tenemos que

$$\dim \text{Span} \{\mathbf{E}^1(\mathbf{H}) : \mathbf{H} \in \mathbf{M}_{n+1}\} \geq \dim \text{Span} \{\mathbf{E}_{ijkl}^1(\mathbf{H}) : \mathbf{H} \in \mathbf{M}_{n+1}, 0 \leq i, j, k, l \leq n+1\}.$$

No es difícil comprobar que

$$\mathbf{E}_{ijkl}^1 = -2\mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)) + \mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)) + \mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)),$$

donde \mathbf{S} está definido como en (1). El siguiente lema asegura que las matrices \mathbf{E}_{ijkl}^1 son linealmente independientes:

Lema A.4. *Dos matrices \mathbf{E}_{ijkl}^1 and $\mathbf{E}_{i'j'k'l'}^1$ son ortogonales en tanto que $\{i, j, k, l\} \neq \{i', j', k', l'\}$.*

Demostración. Es una consecuencia directa de que los productos

$$\langle \mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)), \mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}), \sigma(\mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{l'})) \rangle$$

se anulan siempre que $\{i, j, k, l\} \neq \{i', j', k', l'\}$. \square

Denotemos por $\mathcal{P}_r(n+1)$ el subconjunto del conjunto potencia de $\{0, \dots, n\}$ dado por los subconjuntos de cardinal r . Para cada elemento $\alpha \in \mathcal{P}_r(n+1)$, que es un conjunto no ordenado, escojamos un orden dado por una sucesión de orden r concreta. Denotemos tal sucesión como $s^\alpha = (s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha)$, y tenemos que $\{s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha\} = \alpha$. Sea \mathcal{S}_r el conjunto de todas estas sucesiones, una para cada α .

Para cada $s = (i, j, k, l) \in \mathcal{S}_4$ definimos el subespacio vectorial $V_s^{(2)}$ engendrado por \mathbf{E}_{ijkl}^1 y \mathbf{E}_{ikjl}^1 . Además definimos para cada $s = (i, j, k) \in \mathcal{S}_3$ el subespacio vectorial $V_s^{(3)}$ generado por $\mathbf{E}_{iijk}^1, \mathbf{E}_{ijjk}^1$ y \mathbf{E}_{ijkk}^1 . Finalmente, si $s = (i, j) \in \mathcal{S}_2$ definimos $V_s^{(1)}$ como el subespacio vectorial engendrado por \mathbf{E}_{ijj}^1 .

Lema A.5. *La dimensión de cada $V_s^{(h)}$ es h .*

Demostración. Comprobemos que $\dim V_s^{(2)} = 2$, siendo tratados los otros casos de forma similar. Denotando $s = (i, j, k, l)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ijkl}^1 &= -2\mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)) + \mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)) + \mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)), \\ \mathbf{E}_{ikjl}^1 &= -2\mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)) + \mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)) + \mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j)), \end{aligned}$$

Siendo $\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ seis vectores independientes, dado que son proporcionales a vectores distintos de la base canónica de \mathbf{C}^{N+1} , las matrices simetrizadas $\mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \sigma(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)), \mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)), \mathbf{S}(\sigma(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l), \sigma(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k))$ son también independientes. Dado que las coordenadas de \mathbf{E}_{ijkl}^1 y \mathbf{E}_{ikjl}^1 en términos de la base formada por estas matrices $(-2, 1, 1)$ y $(1, -2, 1)$, son linealmente independientes, i.e., $\dim V_s^{(2)} = 2$. \square

Consideremos ahora la suma de subespacios vectoriales

$$\bigoplus_{s \in \mathcal{S}_4} V_s^{(2)} \oplus \bigoplus_{s \in \mathcal{S}_3} V_s^{(3)} \oplus \bigoplus_{s \in \mathcal{S}_2} V_s^{(1)}.$$

Debido al lema A.4 ésta es una suma ortogonal y su dimensión es, debido al lema A.5

$$2 \binom{n+1}{4} + 3 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{1}{12} n(n+1)^2(n+2).$$

Esto prueba que

$$\dim \text{Span} \{ \mathbf{E}^1(\mathbb{H}) : \mathbb{H} \in \mathbf{M}_{n+1} \} \geq \frac{1}{12} n(n+1)^2(n+2).$$

\square

Referencias

- [1] M. Agrawal and L. S. Davis. Camera calibration using spheres: A semi-definite programming approach. In *ICCV '03: Proceedings of the Ninth IEEE International Conference on Computer Vision*, page 782, Washington, DC, USA, 2003. IEEE Computer Society.
- [2] E. Bayro-Corrochano and B. Rosenhahn. A geometric approach for the analysis and computation of the intrinsic camera parameters. *Pattern Recognition*, 35(1):169 – 186, 2002.
- [3] J. Harris. *Algebraic Geometry, A First Course*. Springer, 1995.
- [4] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, second edition, 2003.
- [5] R. I. Hartley. Estimation of relative camera positions for uncalibrated cameras. In *Proc. European Conference on Computer Vision*, pages 579–587, London, UK, 1992. Springer-Verlag.
- [6] R. I. Hartley, E. Hayman, L. de Agapito, and I. Reid. Camera calibration and the search for infinity. *Computer Vision, IEEE International Conference on*, 1:510, 1999.
- [7] A. Heyden and K. Åström. Euclidean reconstruction from image sequences with varying and unknown focal length and principal point. In *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, New York, USA, 1997.
- [8] F. Kahl, B. Triggs, and K. Åström. Critical motions for auto-calibration when some intrinsic parameters can vary. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 13(2):131–146, 2000.
- [9] D. Liebowitz and S. Carlsson. Uncalibrated motion capture exploiting articulated structure constraints. *Int. J. Comput. Vision*, 51(3):171–187, 2003.
- [10] S. J. Maybank and O. D. Faugeras. A theory of self-calibration of a moving camera. *Int. J. Comput. Vision*, 8(2):123–151, 1992.
- [11] M. Pollefeys and L. V. Gool. A stratified approach to metric self-calibration. In *Proc. of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 407–412, June 1997.
- [12] J. Ponce. On computing metric upgrades of projective reconstructions under the rectangular pixel assumption. In *Second European Workshop on 3D Structure from Multiple Images of Large-Scale Environments*, pages 52–67, London, UK, 2001. Springer-Verlag.
- [13] J. Ponce, K. McHenry, T. Papadopoulos, M. Teillaud, and B. Triggs. On the absolute quadratic complex and its application to autocalibration. In *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 1, pages 780–787, Washington, DC, USA, 2005.
- [14] T. Pribanic, P. Sturm, and S. Peharec. Wand-based calibration of 3d kinematic system. *IET-CV*, 3(3):124–129, September 2009.
- [15] E. D. Roe, Jr. On the circular points at infinity. *The American Mathematical Monthly*, 4(5):132–145, May 1897.
- [16] J. I. Ronda, G. Gallego, and A. Valdés. Camera autocalibration using Plücker coordinates. In *International Conference on Image Processing*, volume 3, pages 800–803, Genoa, Italy, 2005.
- [17] J. I. Ronda, A. Valdés, and G. Gallego. Line geometry and camera autocalibration. *J. Math. Imaging Vis.*, 32(2):193–214, 2008.

- [18] Ronda, José I. and Valdés, Antonio. Euclidean Upgrading from Segment Lengths *Int. J. Comput. Vision*, 90(3):350–368, 2010.
- [19] Y. Seo and A. Heyden. Auto-calibration from the orthogonality constraints. In *Proc. International Conference on Pattern Recognition*, volume 01, pages 1067–1071, Los Alamitos, CA, USA, 2000.
- [20] P. Sturm. Critical motion sequences for monocular self-calibration and uncalibrated euclidean reconstruction. *Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Conference on*, 0:1100, 1997.
- [21] P. A. Tresadern and I. D. Reid. Camera calibration from human motion. *Image Vision Comput.*, 26(6):851–862, 2008.
- [22] B. Triggs. Autocalibration and the absolute quadric. In *Proc. of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 609–614, Puerto Rico, USA, June 1997.
- [23] R. Y. Tsai. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3d machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses. In *Radiometry*, pages 221–244, USA, 1992. Jones and Bartlett Publishers, Inc.
- [24] A. Valdés and J. I. Ronda. Camera autocalibration and the calibration pencil. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23(2):167–174, 2005.
- [25] A. Valdés, J. I. Ronda, and G. Gallego. The absolute line quadric and camera autocalibration. *International Journal of Computer Vision*, 66(3):283–303, 2006.
- [26] K.-Y. K. Wong, P. R. Mendonça, and R. Cipolla. Camera calibration from surfaces of revolution. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25:147–161, 2003.
- [27] H. Zhang, K.-Y. K. Wong, and G. Zhang. Camera calibration from images of spheres. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 29(3):499–502, 2007.
- [28] Z. Zhang. A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22:1330–1334, 2000.
- [29] Z. Zhang. Camera calibration with one-dimensional objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26:892–899, 2004.