Rev.R.Acad.Cien.Exact.Fis.Nat. (Esp)
Vol. 92, N.º 4, pp 387-397, 1998
Monográfico: Problemas complejos de decisión

VALIDEZ, ROBUSTEZ Y ESTABILIDAD EN DECISIÓN MULTICRITERIO. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN EL PROCESO ANALÍTICO JERÁRQUICO

(multicriterio/AHP/validez/robustez/estabilidad)

José María Moreno-Jiménez*, Juan Aguarón Joven*, Francisco Cano Sevilla** y María Teresa Escobar Urmeneta*

* Departamento de Métodos Estadísticos. *Facultad de Económicas. Universidad de Zaragoza.* C/ Gran Vía, 2. 50005 Zaragoza.
** Departamento de Estadística e Investigación Operativa. *Facultad C. Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.* 28040 Madrid

CONTENIDO

RESUMEN

El trabajo aborda el estudio de uno de los tópicos que más interés están despertando durante los últimos tiempos en el campo de la decisión multicriterio: el Análisis del Comportamiento. A continuación, conforme a los tres niveles considerados habitualmente en planificación (estratégico, táctico y operativo), se plantea efectuar este análisis en tres ámbitos: Validez de la Aproximación, Robustez del Modelo y Estabilidad de la Solución. Cada uno de estos ámbitos evaluará, respectivamente, la efectividad, eficacia y eficiencia del proceso de decisión seguido. Tras una breve descripción de algunos de los matices que los distinguen, se presentan los intervalos de estabilidad y se obtienen los intervalos de estabilidad globales de un juicio en dos ámbitos (problemas tipo α y γ). Esta herramienta, utilizada en el análisis de sensibilidad (estabilidad) de las ordenaciones obtenidas con el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), será empleada, bajo el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio, en la detección de los hechos diferenciados y pautas de comportamiento, y en la fijación de caminos de consenso entre los actores implicados en el proceso de toma de decisiones.

ABSTRACT

This paper deals with one of the most interesting topics arisen in the field of multicriteria decision making, namely Behavioral Analysis. According to the levels habitually considered in planning (strategic, tactical and operative), we propose to carry out this analysis within three domains: the Validity of the Approach, the Robustness of the Model and the Stability of the Solution. Each one of these domains will evaluate effectiveness, efficacy and efficiency of the decision making process, respectively. Following a brief description of some of the aspects that distinguish them, we present the stability intervals and obtain the global stability intervals of a judgment in two situations (P.α and P.γ type problems). This tool, used in the sensitivity analysis (stability) of the rankings obtained with the Analytic Hierarchy Process (AHP), will be employed under the paradigm of multicriteria procedural rationality in the detection of the differentiating facts and behavioral patterns and in fixing the consensus paths between the actors involved in the decision making process.

1. INTRODUCCIÓN

La Toma de Decisiones (TD) es una las actividades inherentes al ser humano que da idea de su capacidad, autodesarrollo y grado de libertad. Este carácter intrínseco de la misma ha provocado que su estudio se haya abordado desde muy diversas perspectivas dando lugar a una gran variedad de planteamientos y cuestiones. En lo que sigue, se van a tratar una serie de aspectos relativos a su consideración desde el punto de vista de la teoría de la decisión (investigación operativa).

En el pasado, la TD respondía al binomio Experiencia-Intuicion. A medida que la complejidad de los problemas tratados ha ido aumentando, se ha hecho preciso la aplicación de un enfoque científico y sistematizado que sirviera de apoyo para la misma. Este nuevo planteamiento, que responde al binomio Informacion-Razonamiento, marcó el origen de la Investigación Operativa (IO)[1] y es el que se ha venido empleando durante su época de esplendor (1940-1970). Esta etapa, orientada a la predicción y control, venía caracterizada por la utilización de modelos que buscaban la solución mediante la optimización de una única función objetivo, generalmente evaluada en términos económicos, y el uso de datos precisos. Estos modelos, de gran belleza formal y contenido lógico, respondían a lo que se denomina la resolución de problemas en los «pequeños mundos», esto es, en contextos excesivamente simplificados (se exigen hipótesis muy restrictivas) y altamente estructurados para los que se disponía de información completa sobre los aspectos relevantes del problema (alternativas, consecuencias, principio de optimidad, etc.), y de un conjunto amplio de herramientas analíticas para su resolución (teoría de optimización).

No obstante, esta aproximación normativa basada en el paradigma de racionalidad sustantiva presentaba grandes limitaciones al abordar procesos de decisión reales planteados en un «gran mundo» que difícilmente puede simplificarse obviando las interdependencias e interrelaciones entre los pequeños mundos que lo constituyen (Moreno, 1997; Moreno y otros, 1998). La falta de información completa sobre los aspectos relevantes y la no consideración del problema en su globalidad (múltiples actores, escenarios y criterios), incluyendo el carácter dinámico del mismo, han provocado un velo de seudo acuracidad en los resultados obtenidos, y una falta de realismo, rigor y sentido de las conclusiones extraídas a partir de modelos basados exclusivamente en datos precisos.

Esta seria limitación del optimizador enfoque tradicional (uniobjetivo), ha llegado a invalidar su aplicación en teoría de la decisión, salvo en casos muy estructurados. Es preciso el reconocimiento e incorporación a los modelos de aspectos como la incertidumbre, complejidad, retroalimentación y fundamentalmente de aquellos aspectos intangibles y subjetivos no contemplados explícitamente hasta la década de los 70. Todo ello ha provocado la aparición en el último cuarto de siglo de escuelas de pensamiento, basadas en el binomio Conocimiento[2]-Razonamiento, que plantean un cambio de la racionalidad sustantiva tradicionalmente seguida en la TD (búsqueda de la solución óptima), orientando su esfuerzo hacia un mejor conocimiento del proceso de toma de decisiones seguido por el sistema. En este sentido, la visión de la realidad que tengan los actores participantes en el proceso de decisión va a ser fundamental en el resultado final. Ahora, más que buscar la solución óptima para unos valores fijados de los parámetros, y el rango de valores de éstos para los que la solución sigue siendo válida (análisis postoptimal) como se hacía en el enfoque tradicional, se persigue la detección de hechos diferenciados, pautas de comportamientos, regularidades o tendencias, y el establecimiento de una serie de caminos de consenso que favorezcan el proceso negociador entre los actores implicados.

Lo que tradicionalmente se entendía como un análisis postoptimal de la solución para ligeras modificaciones de unos parámetros tomados como valores precisos ha quedado relegado por la existencia de múltiples criterios y actores, así como por la incertidumbre e imprecisión de los datos. En estos casos se recomienda la realización de un análisis de comportamiento integral que afecte a los tres niveles habitualmente contemplados en planificación (estratégico, táctico y operativo). Este análisis tratará especialmente: (1) la validez de la aproximación (efectividad); (2) la robustez del modelo (eficacia) y (3) la estabilidad de la solución (eficiencia). Todo ello desde el punto de vista de la racionalidad seguida para abordar la resolución de problemas.

En lo que sigue, tras una breve descripción de algunos de los matices que distinguen los tres ámbitos considerados para el Análisis del Comportamiento de los procesos de decisión multicriterio, se presenta los intervalos de estabilidad, una herramienta utilizada en el análisis de sensibilidad (estabilidad) de las ordenaciones obtenidas el Proceso Analítico Jerárquico (AHP). Esta herramienta, asociada al nivel inferior del análisis del comportamiento (más conocido del proceso) será empleada, bajo el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio, en la obtención de los puntos críticos del proceso de toma de decisiones y en la fijación de caminos de consenso entre los participantes en el mismo.

El trabajo ha quedado estructurado como sigue: la sección segunda plantea la necesidad del paradigma multicriterio desde un punto de vista procedimental; la tercera incluye la discusión sobre la validez de la aproximación, la robustez del modelo y la estabilidad de la solución en la toma de decisiones multicriterio; la cuarta recoge un estudio de sensibilidad de las ordenaciones obtenidas al aplicar el proceso analítico jerárquico (AHP), centrándose en la obtención de los intervalos de estabilidad globales; y la quinta resalta las conclusiones más destacadas.

2. DECISIÓN MULTICRITERIO

Características de los problemas de decisión como son: (1) el desconocimiento de los factores relevantes del entorno; (2) la intervención de múltiples actores y criterios, generalmente en conflicto; (3) la ocurrencia de sucesos con poca verosimilitud pero con un gran impacto (efectos irreversibles); (4) la consideración conjunta de aspectos tangi-

[1] Se entiende por Investigación Operativa la aplicación del método científico en la resolución de problemas complejos relacionados con el control de las organizaciones o sistemas en estudio con el fin de proporcionar las soluciones óptimas de dichos problemas a los encargados de su gestión (Churchman, Ackoff y Arnoff, 1957).

[2] Se entiende por Información, a los datos dotados de una estructura y un contenido que los hace apropiados para una tarea específica, y por Conocimiento, las creencias, ideas, reglas y procedimientos generalmente ciertos en un dominio particular (Moreno y Mata, 1993).

bles e intangibles; (5) la inexistencia de información cierta sobre las consecuencias de las acciones; y (6) la posibilidad de retroalimentación debida al proceso de aprendizaje conceden a las situaciones tratadas un grado de complejidad que hace casi imposible la utilización de un principio optimizador uniobjetivo y el establecimiento de distribuciones de probabilidad ex-ante (O'Connor y otros, 1995). La racionalidad sustantiva empleada tradicionalmente en la toma de decisiones requiere, entre otras cosas, el conocimiento (a priori) de las alternativas, de los estados de la naturaleza, de las consecuencias de las acciones, así como sus probabilidades y utilidades; y la aplicación del principio de maximización de la utilidad esperada, por lo que los problemas de decisión complejos no suelen ser los más apropiados para la aplicación de la misma (Froger y Munda, 1994; Hanley, Spash y Walker, 1995; Vercelli, 1995).

Todo ello obliga a la búsqueda de aproximaciones que capturen la noción de complejidad, no como imperfección del conocimiento, sino como indeterminación del mundo que nos rodea. Hay que abandonar el concepto de determinación subyacente, propio de las aproximaciones laplacianas y válido en casos muy particulares, y utilizar nuevas aproximaciones que permitan abordar la resolución científica (decisiones analíticas frente a intuitivas) de los problemas planteados de una manera más flexible, abierta y realista que la racionalidad sustantiva (Dean y Sharfman, 1993; Faucheaux y Froger, 1995, Moreno, 1997). Es preciso establecer una serie de principios o postulados que permitan organizar el pensamiento, estructurar el proceso mental interno y sistematizar el proceso de resolución seguido. Para ello, se deben combinar aspectos tangibles e intangibles en una escala válida para la toma de decisiones que sea (Saaty, 1996): a) simple en su construcción; b) adaptable a decisiones en grupo e individuales; c) acorde con nuestras intuiciones, valores y pensamiento en general; d) que potencie el compromiso y el consenso, y e) que no exija una especialización suprema.

Al margen de las características citadas anteriormente, existen una serie de aspectos como el contexto o macroentorno donde está inmerso el problema (estructura de poder, organización del sistema, situación política, necesidades), y la visión del mundo desde la que se aborda su resolución (filosofía, época, cultura, ética) que condicionan la resolución del problema, y con ello, «la racionalidad» seguida en el proceso de toma de decisión. El concepto de racionalidad es uno de los más tratados en la literatura científica (véase Hargreaves Heap y otros, 1992), de ahí que existan numerosas definiciones e interpretaciones que dan lugar a las diferentes escuelas de pensamiento o aproximaciones seguidas en la toma de decisiones. Nosotros, frente a las tres escuelas más extendidas en la resolución de problemas de decisión (priorización y selección de las actuaciones), a saber, la racionalidad sustantiva (decisor racional), la racionalidad acotada (decisor satisfactorio) y la racionalidad procedimental (decisor descriptivo), vamos a seguir la denominada racionalidad procedimental multicriterio (decisor cognitivo).

Esta aproximación está basada en el paradigma de racionalidad procedimental multicriterio (Moreno, 1996, 1997; Moreno y otros, 1998), esto es, combina el soporte metodológico de la racionalidad procedimental con el potencial operativo y calculista de las técnicas de decisión multicriterio (AHP). El nuevo enfoque, de carácter descriptivo, cognitivo, adaptativo, sistémico y general, trata de ayudar en la toma de decisiones mediante un mejor conocimiento de su proceso de decisión, esto es, un mejor conocimiento de las etapas, escenarios, elementos, factores, interdependencias, actores, interrelaciones y procedimientos que incluye. En esencia, busca mejorar la calidad integral del proceso de toma de decisiones seguido por el sistema considerado, dotando de rigor científico cada una de las etapas y fases seguidas en el proceso de resolución. Este cambio de mentalidad está siendo recomendado, especialmente, en aquellos casos, como sucede en los problemas de selección globales, en los que lo conocido del problema es mucho menor que lo desconocido. Cuando la incertidumbre y complejidad del problema tratado condicionan totalmente los resultados obtenidos en la resolución del mismo, es preferibe, en vez de un estudio normativo fuertemente dependiente del contexto, un estudio descriptivo orientado hacia la comprensión, el aprendizaje y el diálogo, intentando extraer tendencias, regularidades, puntos críticos y oportunidades de decisión, que permitan integrar las diferentes visiones de la realidad y favorecer el proceso negociador entre los actores implicados.

En resumen, el análisis se dirigirá hacia: (1) la comprensión del proceso de decisión seguido; (2) el aumento del valor añadido del conocimiento alcanzado en la resolución del problema, esto es, la mejoría del conocimiento de las diferentes etapas, factores, elementos y actores, profundizando en el aprendizaje y justificación del mismo; (3) la detección de oportunidades de decisión que faciliten el aprendizaje y la formulación de nuevas alternativas; (4) el descubrimiento de las preferencias y gustos de los actores implicados, tan necesario en la fase de retroalimentación y (5) la potenciación del proceso de negociación y diálogo.

Para conseguir todos estos objetivos la metodología empleada (aproximación procedimental multicriterio) consta de los siguientes pasos: (P1) Formulación y Descripción; (P2) Modelización; (P3) Incorporación de las preferencias: Emisión de juicios; (P4) Priorización, Agregación y Síntesis; (P5) Robustez, Estabilidad y Retroalimentación; y (P6) Explotación del modelo: Aprendizaje y Negociación. Destacar que esta metodología complementa las etapas propuestas en la técnica multicriterio considerada como soporte operativo de nuestra aproximación (el proceso analítico jerárquico) con la incorporación de los dos últimos pasos o etapas que se refieren, fundamentalmente, al tratamiento de la incertidumbre y retroalimentación (paso 5), y a la explotación del modelo (paso 6).

En el paso quinto (P5) se trata la incertidumbre existente en las diferentes etapas de la planificación. Se debe validar la aproximación seguida teniendo en cuenta que en el caso multicriterio no existe un enfoque que domine a los demás, dependiendo en gran parte su adecuación al problema concreto que se pretende resolver. Así mismo, hay que estudiar la robustez del modelo empleado ante cambios estructurales y analizar la estabilidad de la solución ante ligeras modificaciones en los valores considerados para los parámetros. Esta última etapa suele denominarse análisis de sensibilidad, y en ella se estudia el comportamiento de la solución ante pequeñas modificaciones en los juicios que incorporan las preferencias de los actores participantes en el proceso de decisión. Así mismo, permite realizar las correcciones pertinentes para capturar las modificaciones en las preferencias ocurridas durante el proceso de resolución.

En el último paso (P6) se analizan las diferentes estructuras de preferencias que se pueden presentar y se efectúa un estudio probabilístico de las mismas, buscando los puntos críticos del proceso de decisión y las modificaciones oportunas, en cuanto a criterios, alternativas y dependencias relevantes, para la resolución efectiva del problema. En este apartado se detectan diferentes oportunidades de decisión, también denominadas hechos diferenciados o regularidades, obtenidas en la fase de explotación del modelo que constituyen uno de los aspectos destacados del proceso negociador que llevan a cabo las partes implicadas para la búsqueda de una solución consensuada. Esta filosofía o actitud negociadora es imprescindible para abordar la resolución de problemas complejos en los que intervienen diversos actores con su particular (subjetiva) visión de la realidad y no se dispone de datos precisos.

3. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO: VALIDEZ, ROBUSTEZ Y ESTABILIDAD

El enfoque tradicional (normativo) en teoría de la decisión indica qué hacer y cuándo hacerlo, así como qué procedimiento emplear en la búsqueda del óptimo de una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones. Todo ello suponiendo que se dispone de información perfecta sobre las alternativas, el principio de optimidad o criterio que guía la elección y las consecuencias de las mismas. Obviamente, estas hipótesis tan restrictivas sólo se cumplen en situaciones altamente estructuradas que nada tienen que ver con la mayoría de los problemas reales a los que nos enfrentamos, en los que la existencia de múltiples criterios en conflicto recomienda la detección del conjunto de soluciones eficientes en lugar de la determinación de la solución óptima.

La incertidumbre en los datos, procedimientos y enfoques empleados para su resolución sugieren realizar un estudio del comportamiento del proceso de toma de decisiones lo más completo posible. En este sentido, el análisis del comportamiento debe efectuarse en tres niveles que responden, respectivamente, a la efectividad, eficacia y eficiencia del proceso de decisión[3] (1) la aproximación (validez); (2) la modelización (robustez); y (3) la solución (estabilidad). En el caso multicriterio es difícil analizar la validez teórica de las distintas aproximaciones, pues el resultado final no sólo dependerá del problema en concreto sino del procedimiento empleado para comparar los diferentes enfoques seguidos. Edward y otros (1984) y Ozernoy (1992) dudan de la existencia de un procedimiento válido para evaluar la calidad integral de un proceso de decisión debido fundamentalmente a los numerosos aspectos que se solapan en los mismos. Guitouni y Martel (1998) proponen un marco para la selección entre los procedimientos de decisión multicriterio discretos. En cuanto a la robustez de los modelos, suele efectuarse un análisis del comportamiento que evalúe la posibilidad de cambio de rango entre las alternativas cuando se añaden o eliminan aspectos relevantes (alternativas, criterios, dependencias, etc.). En la práctica, la mayoría de los estudios de comportamiento realizados se refieren al estudio de la estabilidad (análisis de sensibilidad) de la solución ante pequeñas modificaciones en los valores tomados para los parámetros.

A pesar del interés despertado por el análisis de sensibilidad (Myers y Alpert, 1968; Alpert, 1971) no se ha producido un estudio sistemático del mismo hasta mediados de los 80 (Evans, 1984; Von Winterfelt y Edwards, 1986; French, 1989; Weber, Eisenfuhr y Von Winterfeldt, 1988; Alexander, 1989). Barron y Schmidt (1988) recomiendan dos procedimientos para efectuar un análisis de sensibilidad en modelos con funciones valor multiatributo. Estos procedimientos están basados en la entropía y en mínimos cuadrados. French y Rios-Insua (1989) utilizan una aproximación basada en la minimización de distancias para determinar los competidores de una solución óptima de partida. Rios-Insua (1990) describe una metodología para el análisis de sensibilidad en decisión multiobjetivo. Masuda (1990) estudia cómo afectan los cambios simultáneos en los vectores de las matrices de decisión en las ordenaciones obtenidas para las alternativas. Sin embargo, no ofrece un estudio de los cambios que provoca la modificación de un juicio. Hansens y otros (1989), Wendel (1992) y Marmol y Puerto (1997) utilizan una aproximación basada en la tolerancia para tratar las modificaciones conjuntas en varios de los parámetros de modelos multiobjetivo. Armacost y Hosseini (1994) tratan de determinar el criterio más crítico. Triantaphyllou y Sanchez (1997) se centran en el análisis individual de los juicios, presentando una metodología para alcanzar un análisis de sensibilidad de los pesos de los criterios, y planteando una serie de tópicos destacados del mismo.

Durante el primer semestre de 1998 se ha suscitado un amplio debate en la comunidad científica multicriterio sobre el significado y diferencias entre los distintos términos empleados en el estudio del comportamiento como se ha podido apreciar en la lista de discusión multicriterio (List-MC). Por el momento, no existe ni tan siquiera unanimidad a la hora de definir los conceptos básicos de este tipo de estudios (comportamiento). En general se ha podido

[3] Se entiende por Efectividad la fijación de los objetivos (criterios) apropiados para la resolución del problema, por Eficacia la consecución de los objetivos (metas) marcados, y por Eficiencia su obtención con la mejor asignación de recursos (Moreno, 1996).

apreciar una significativa diferencia en la interpretación que a validez, robustez y sensibilidad o estabilidad conceden los autores de los dos grandes grupos de técnicas multicriterio existentes (continuas o discretas). Dentro de los autores que trabajan con espacios de soluciones continuas (multiobjetivo), James Ignizio define la Estabilidad como una medida de lo fácil y rápido que una solución llega o «se degenera» hasta un nivel determinado fijado con antelación. Cuanto más difícil y lento sea ese proceso, más estable es la solución. Para Ignizio la estabilidad es un concepto distinto y más general que el clásico análisis de sensibilidad en el que no se suelen considerar dos aspectos especialmente relevantes: tiempo y facilidad de degeneración. Experimentalmente ha apreciado que las soluciones óptimas tienden a degenerarse más rápido y fácil que ciertos tipos de soluciones dominadas. Teo Stewart utiliza el término robusto como sinónimo de estable y propone, en la línea de la racionalidad procedimental multicriterio, que ante problemas complejos (multicriterio) el estudio debe orientarse a la identificación de algunas regularidades en los procesos de ayuda a la decisión y al establecimiento de medidas que permitan valorar si la información y los procesos son correctos. Dentro de los «autores discretos», Philippe Vincke define una solución estable como aquella cuyo comportamiento no cambia «demasiado» cuando los valores de los parámetros del modelo se modifican ligeramente, y una solución robusta como aquella que su comportamiento es «bueno» para escenarios diferentes de los valores de los parámetros del modelo. De alguna forma es un «buen compromiso» para las diferentes representaciones plausibles para el problema.

4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN AHP

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es una técnica de decisión multicriterio propuesta por Tomas L. Saaty (1977, 1980) que permite trasladar la realidad percibida por el individuo a una escala de razón en la que se reflejan las prioridades relativas de los elementos considerados. Además de la utilización de conglomerados, de una modelización jerárquica y del uso de comparaciones pareadas para incorporar las preferencias, hay dos características que la diferencian de otras técnicas multicriterio como son la posibilidad de trabajar con aspectos intangibles y la de evaluar la consistencia de los juicios emitidos por el decisor.

En cuanto al comportamiento de AHP, mencionar que existen diversos trabajos sobre su idoneidad como aproximación multicriterio (Vargas, 1991, 1994; %Dyer, 1990; Zanakis y otros, 1998) y sobre su robustez ante cambios estructurales que provoquen un cambio de rango en la ordenación de las alternativas. Por último, indicar que el estudio de las ordenaciones aparecidas ante ligeras modificaciones de los juicios (análisis de sensibilidad) ha sido al que más atención se le ha prestado.

En general se pueden seguir tres vías para contrastar la sensibilidad de las prioridades ante ligeras modificaciones de los juicios: (1) obtener expresiones matemáticas de las fluctuaciones; (2) utilizar métodos de simulación y (3) combinar las dos vías anteriores, en especial cuando no se puedan lograr expresiones cerradas para las fluctuaciones.

Por el momento (Saaty, 1994), no se dispone de las herramientas matemáticas necesarias para ligar el análisis de sensibilidad y la diferenciación en las formas multilineales utilizadas en el AHP convencional. La ausencia de resultados matemáticos que permitan determinar los cambios en las ordenaciones cuando se emplea el método del autovector principal por la derecha (método de Saaty) como procedimiento de priorización, ha generalizado el uso de la simulación como vía para efectuar el análisis de sensibilidad.

La dificultad calculista asociada al método de Saaty, y, fundamentalmente, la filosofía del paradigma de racionalidad procedimental multicriterio seguida en la resoluión de los problemas de decisión, esto es, la búsqueda de lo esencial (hechos diferenciados) frente a lo anecdótico (valores concretos), nos llevan a no darle tanta importancia al procedimiento de priorización utilizado, y a emplear el método de la media geométrica por filas (Crawford y Williams, 1985; Barzilai, 1997), pues proporcionando prioridades próximas al método del autovector (Saaty y Vargas, 1993; Aguarón, 1998) es mucho más fácil de manejar.

Para incorporar la incertidumbre en los juicios se sugieren dos herramientas (Moreno y Vargas, 1993; Aguarón y Moreno, 1998; y Aguarón, Escobar y Moreno, 1998): estructuras de preferencia e intervalos de estabilidad. Las primeras corresponden a las diferentes ordenaciones que se presentan cuando se consideran intervalos de juicio en AHP. Por su parte los intervalos de estabilidad proporcionan un análisis de sensibilidad inverso, esto es, a partir de la ordenación correspondiente a los datos iniciales se obtiene el intervalo de variación (relativo o absoluto) en el que pueden oscilar los juicios sin que se produzca cambio de rango en la ordenación. El estudio local de este problema (una matriz) en dos ámbitos (problemas tipo α y γ) y tres situaciones diferentes (un juicio, los juicios asociados a un elemento de la matriz de comparaciones pareadas, y todos los juicios de la matriz) puede verse en Aguarón y Moreno (1998).

A continuación se extiende este estudio, para un juicio, al caso global, esto es, se determina el intervalo de variación de un juicio de cualquier matriz de la jerarquía considerada en la modelización del problema, en los dos ámbitos anteriores: problema tipo α (selección de la mejor alternativa) y problema tipo γ (ordenación de todas ellas).

4.1. Conceptos y Resultados Previos

Sea $\mathcal{H}$ una jerarquía con h niveles. Cada uno de estos niveles L_k, $k = 0, ..., h$ tiene un total de m_k elementos. En el nivel superior (L_0) se coloca exclusivamente ($m_0 = 1$) la meta u objetivo global (G). En el primer nivel se colocan sus sucesores o descendientes directos $\{G_j, j = 1, ..., m_1\}$. En el segundo nivel se encuentran los los sucesores de cada uno de los m_1 nodos situados en el primer nivel, hasta un total de m_2 elementos, y así sucesivamente. En el penúltimo nivel (L_{h-1}) se sitúan los «atributos» de la jerarquía:

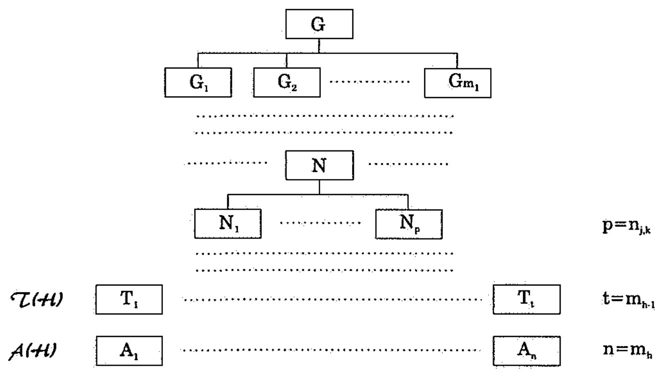
$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \{T_j,\ j = 1, \ldots, t = m_{h-1}\}$$

y en el último nivel (L_h) las alternativas de la jerarquía:

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \{A_l\ l = 1, \ldots, n = m_h\}$$

Definición 1 Dado un nodo $N \in L_k$, $k < h - 1$, llamaremos *atributos del nodo N,* y lo representaremos como $\mathcal{T}(N)$, al conjunto de atributos $T_i \in L_{h-1}$ que son descendientes de N. Es evidente que $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}(\mathcal{H})$.

Consideremos ahora un nodo cualquiera de la jerarquía, $N_{j,k}$, que supondremos se encuentra en el nivel k-ésimo y en la posición j-ésima ($j = 1, \ldots, m_k$). En lo sucesivo, y por simplificar la notación, denotaremos por $N = N_{j,k}$ al nodo en concreto considerado, por $p = n_{j,k}$ el número de sucesores de este nodo, y por $N^+ = \{N_i,\ i = 1, \ldots, p\}$ al conjunto de sucesores de un nodo cualquiera N donde cada $N_i = N_{j,k/i}$.



Definición 2. Dado un nodo cualquiera, $N \notin \mathcal{A}(\mathcal{H})$, denotamos por $\omega(N)$ la prioridad local de dicho nodo (prioridad respecto al nodo del que cuelga), y por $\omega^G(N) = \omega(N|G)$ su prioridad global (producto de las prioridades locales de los nodos que forman el camino que une G con N).

De una forma mas general, denotaremos por $\omega(N|M)$ al producto de las prioridades locales de los nodos que forman el camino que une M con N (N descendiente de M). Si $M, X_1, \ldots, X_r, N$ es dicho camino: $\omega(N|M) = \omega(X_1)\ \omega(X_2) \ldots \omega(X_r)\ \omega(N)$. Con esta notación se pueden representar las prioridades locales de un nodo $N_i \in N^+$ como $\omega(N_i) = \omega(N_i|N)$, y su prioridad global como $\omega^G(N_i) = \omega(N_i|G)$.

Lema 1. *Dados tres nodos Q, M, N en una trayectoria pero en niveles diferentes ($L_Q < L_M < L_N$), se tiene*

$$\omega(N|Q) = \omega(N|M)\ \omega(M|Q)$$

en particular, si N es descendiente de M ($M, N \in \mathcal{H}$) se verifica:

$$\omega^G(N) = \omega(N|G) = \omega(N|M)\ \omega(M|G)$$

DEMOSTRACIÓN: Inmediata por el Principio de Composición Jerárquica.

Definición 3. Dada una alternativa $A_l \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ denotamos por $\omega(A_l)$ su prioridad total, o prioridad respecto al nodo G. Su valor viene dado por

$$\omega(A_l) = \sum_{T_i \in \mathcal{T}(\mathcal{H})} \omega(A_l|T_i)\,\omega^G(T_i)$$

donde $\omega(A_l|T_i)$ es su prioridad local respecto al atributo $T_i (T_i \in \mathcal{T}(\mathcal{H}))$.

Definición 4. Llamaremos *prioridad total de la alternativa A_l respecto al nodo N ($N \in L_k$, con $k < h$)* y lo representaremos como $\omega(A_l|N)$ a la prioridad total de dicha alternativa considerando exclusivamente la subjerarquía con nodo superior N:

$$\omega(A_l|N) = \sum_{T_i \in \mathcal{T}(N)} \omega(A_l|T_i)\,\omega(T_i|N)$$

A partir de esta definición la prioridad total de una alternativa A_l, $\omega(A_l)$, la podemos expresar también como $\omega(A_l|G)$.

Lema 2. *Dada $A_l \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, $N \in \mathcal{H}$ y $N_i \in N^+$ ($N, N_i \notin \mathcal{A}(\mathcal{H})$), se verifica*

$$i)\quad \omega(A_l|N) = \sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\ \omega(N_i|N)$$

$$ii)\quad \omega(A_l|G) = \omega(A_l|G,\ N) + \omega(A_l|G,\ N^c)$$

$$iii)\quad \omega(A_l|G,\ N) = \omega(A_l|N)\ \omega(N|G)$$

$$iv)\quad \omega(A_l|G,\ N) = \sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\ \omega(N_i|G)$$

$$v)\quad \omega(A_l|G) = \sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\ \omega(N_i|G) + \omega(A_l|G,\ N^c)$$

donde $\omega(A_l|G, N)$ es la prioridad total de la alternativa A_l a través de todas las trayectorias que van desde A_l hasta G pasando por el nodo N, y $\omega(A_l|G, N^c)$ es la prioridad (total) de la alternativa A_l a través de todas las trayectorias que van desde A_l hasta G sin pasar por N.

DEMOSTRACIÓN. Inmediata por el Principio de Composición Jerárquica.

NOTA 1. Si el nodo N corresponde con el nodo superior de la jerarquía (G) (meta del problema), el término $\omega(A_k|G, N^c)$ es nulo. Además consideramos $\omega(N|N) = 1$.

Lema 3. *Sea N un nodo cualquiera de la jerarquía ($N \notin \mathcal{A}(\mathcal{H})$), $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, p$ la matriz de comparaciones pareadas obtenida al comparar sus p descendientes (N_i, $i = 1, \ldots, p$) entre sí y $\omega = (\omega_i)$, $i = 1, \ldots, p$ el vector* *de prioridades locales obtenido al aplicar algún método de priorización sobre la matriz A. Si consideramos una modificación de la matriz A, A', y el correspondiente vector de prioridades* $\omega' = (\omega_i')$ *se verifica:*

$$\omega'(A_l|G, N) = \frac{s}{s'}\sum_{i=1}^{p} \rho_i \omega(A_l|N_i)\omega^G(N_i) \qquad (1)$$

donde $\rho_i = \frac{\omega_i'}{\omega_i}$, $s = \sum_j \omega_j$ *y* $s' = \sum_j \omega_j'$.

DEMOSTRACIÓN. A partir del Lema 2 (i), tenemos:

$$\omega'(A_l|G, N) = \sum_{i=1}^{p} \omega'(A_l|N_i)\,\omega'(N_i|G)$$

pero las prioridades $\omega'(A_l|N_i)$ no varían por lo que:

$$\omega'(A_l|G, N) = \sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\omega'^G(N_i) = \omega^G(N)\sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\,\omega'(N_i) =$$
$$= \omega^G(N)\sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\frac{\omega_i'}{s'} = \omega^G(N)\sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\frac{\rho_i\omega_i}{s'} =$$
$$= \omega^G(N)\frac{s}{s'}\sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\frac{\rho_i\omega_i}{s} = \omega^G(N)\frac{s}{s'}\sum_{i=1}^{p} \omega(A_l|N_i)\rho_i\omega(N_i) =$$
$$= \frac{s}{s'}\sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega(A_l|N_i)\omega^G(N_i)$$

Lema 4. *En las mismas condiciones del lema anterior consideremos dos alternativas,* A_k *y* A_l, *tales que* $\omega(A_k) > w(A_l)$. *Para que se mantenga la ordenación relativa de estas dos alternativas debe verificarse:*

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega(N_i)\left[\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{kl}^{N_i}\right] > 0 \qquad (2)$$

donde $\Delta_{kl}^{G,N^c} = \omega(A_k|G, N^c) - \omega(A_l|G, N^c)$ *y* $\Delta_{kl}^{N_i} = \omega(A_k|N_i) - \omega(A_l|N_i)$.

DEMOSTRACIÓN. Al modificar la matriz A, los términos $\omega(A_k|G, N^c)$ y $\omega(A_l|G, N^c)$ no varían por lo que:

$$\omega(A_k|G) = \omega(A_k|G, N^c) + \omega'(A_k|G, N)$$
$$\omega(A_l|G) = \omega(A_l|G, N^c) + \omega'(A_l|G, N) \qquad (3)$$

Aplicando el lema anterior:

$$\omega'(A_k|G, N) = \frac{s}{s'}\sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega(A_k|N_i)\omega^G(N_i)$$
$$\omega'(A_l|G, N) = \frac{s}{s'}\sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega(A_l|N_i)\omega^G(N_i) \qquad (4)$$

Aplicando (3) y (4):

$$\omega'(A_k|G) - \omega'(A_l|G) =$$
$$= \omega(A_k|G, N^c) - \omega(A_l|G, N^c) + \frac{s}{s'}\sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega^G(N_i)\left(\omega(A_k|N_i) - \omega(A_l|N_i)\right) =$$
$$= \Delta_{kl}^{G,N^c} + \frac{s}{s'}\sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega^G(N_i)\Delta_{kl}^{N_i}$$

Y para que $\omega'(A_k|G) > \omega'(A_l|G)$ se debe cumplir:

$$\frac{s'}{s}\Delta_{kl}^{G,N^c} + \sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega^G(N_i)\Delta_{kl}^{N_i} > 0$$

como $s' = \sum_i \rho_i\omega_i$:

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i\frac{\omega_i}{s}\Delta_{kl}^{G,N^c} + \sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega^G(N_i)\Delta_{kl}^{N_i} > 0$$

y al ser $\omega(N_i) = \frac{\omega_i}{s}$ tenemos:

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega(N_i)\Delta_{kl}^{G,N^c} + \sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega^G(N_i)\Delta_{kl}^{N_i} > 0$$

Teniendo en cuenta que $\omega^G(N_i) = \omega^G(N)\,\omega(N_i)$ y agrupando términos:

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega(N_i)\left[\Delta_{kl}^{G,N^c} + \omega^G(N)\Delta_{kl}^{N_i}\right] > 0$$

NOTA 2. En concreto la desigualdad anterior se verifica en el caso trivial en que $\rho_i = 1$ para todo i, es decir, cuando no se han realizado modificaciones en los juicios de la matriz.

Lema 5. *Si en una matriz de comparaciones* $A = (a_{ij})$, *el juicio* a_{rs} $(r \neq s)$ *se convierte en el valor* a'_{rs}, *el nuevo vector de prioridades obtenido empleando el método de la media geométrica es, salvo factor de normalización:*

$$\omega_i' = \omega_i \quad \forall i \neq r, s$$
$$\omega_r' = \omega_r t_{rs}^{1/n} = \omega_r\left(\frac{a_{rs}'}{a_{rs}}\right)^{1/n}$$
$$\omega_s' = \omega_s t_{sr}^{1/n} = \omega_s\left(\frac{a_{rs}}{a_{rs}'}\right)^{1/n}$$

DEMOSTRACIÓN. Inmediata a partir de la expresión del vector media geométrica por filas.

4.2. Intervalos de Estabilidad Global de un Juicio

Sea N un nodo de la jerarquía $\mathcal{H}$ con sucesores $N^+=\{N_i, i=1, ..., p\}$. Llamaremos juicio *(r, s)* del nodo N y lo denotaremos como $a_{rs}(N)$ al juicio correspondiente a la comparación de N_r con N_s. Si A es la matriz de comparaciones pareadas de los nodos de N^+, $a_{rs}(N)$ coincide con el juicio a_{rs}. Si no hay lugar a equívocos lo denotaremos indistintamente de las dos maneras.

De forma análoga se hablará de la variación relativa (r, s) del nodo N y lo denotaremos como $t_{rs}(N)$ al cociente entre el juicio modificado y el juicio sin modificar correspondientes a la compración de N_r y N_s:

$$t_{rs}(N) = \frac{a'_{rs}(N)}{a_{rs}(N)} = \frac{a'_{rs}}{a_{rs}}$$

Definición 5. Dada una matriz recíproca positiva $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, ..., p$, correspondiente a las comparaciones pareadas de p elementos N_i, $i = 1, ..., p$, respecto a un nodo N cualquiera de una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas A_k, $k = 1, ..., n$, se denominan:

(5a) *intervalo de estabilidad relativa global del juicio* $a_{rs}(N)$ para un problema $P.\alpha$, al intervalo $\left[\underline{\alpha}^G_{rs}(N), \overline{\alpha}^G_{rs}(N)\right]$ en el que puede oscilar su variación relativa, $t_{rs}(N)$, sin que se produzca cambio de rango en la mejor alternativa del problema.

(5b) *intervalo de estabilidad global del juicio* $a_{rs}(N)$ para un problema P.α, al intervalo en el que puede oscilar el mismo, $\left[\underline{a}^G_{rs}(N), \overline{a}^G_{rs}(N)\right]$, sin que se produzca cambio de rango en la mejor alternativa del problema.

(5c) *índice de estabilidad global del juicio* $a^G_{rs}(N)$ *para un problema* $P.\alpha$ *a*

$$\alpha^G_{rs}(N) = \min\left\{1/\underline{\alpha}^G_{rs}, \overline{\alpha}^G_{rs}\right\}$$

(5d) *Juicio más Crítico o Inestable* de la matriz de juicios de un nodo N en un problema $P.\alpha$, al juicio con menor índice de estabilidd global.

Definición 6. En las mismas condiciones de antes se definen:

(6a) *intervalo de estabilidad relativa global del juicio* $a_{rs}(N)$ para un problema $P.\gamma$, al intervalo $\left[\underline{\gamma}^G_{rs}(N), \overline{\gamma}^G_{rs}(N)\right]$ en el que puede oscilar su variación relativa, $t_{rs}(N)$, sin que se produzca cambio de rango en la ordenación de todas las alternativas del problema.

(6b) *intervalo de estabilidad global del juicio* $a_{rs}(N)$ para un problema $P.\gamma$, al intervalo en el que puede oscilar el mismo, $\left[\underline{g}^G_{rs}(N), \overline{g}^G_{rs}(N)\right]$, sin que se produzca cambio de rango en la mejor alternativa del problema.

(6c) *índice de estabilidad global del juicio* $a^G_{rs}(N)$ para un problema $P.\gamma$ a

$$\gamma^G_{rs}(N) = \min\left\{1/\underline{\gamma}^G_{rs}, \overline{\gamma}^G_{rs}\right\}$$

(6d) *Juicio más Crítico o Inestable* de la matriz de juicio de un nodo N en un problema $P.\gamma$, al juicio con menor índice de estabilidad global.

Teorema 1. *Dado un nodo N cualquiera de la jerarquía, y dos alternativas* A_k, A_l, *tales que* $\omega(A_k) > \omega(A_l)$, *la condición necesaria y suficiente para que al modificar el juicio* a_{rs} *del nodo N no exista cambio de rango entre dichas alternativas es:*

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,s}}^{p} \omega(N_i)\left[\Delta^{G,N^c}_{kl} + \omega^G(N)\Delta^{N_i}_{kl}\right] + \rho\omega(N_r)\left[\Delta^{G,N^c}_{kl} + \omega^G(N)\Delta^{N_r}_{kl}\right] + \frac{1}{\rho}\omega(N_s)\left[\Delta^{GN^c}_{kl} + \omega^G(N)\Delta^{N_s}_{kl}\right] \geq 0$$

donde $\rho = t^{1/p}_{rs}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 4 se tiene:

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i\omega(N_i)\left[\Delta^{G,N^c}_{kl} + \omega^G(N)\Delta^{N_i}_{kl}\right] \geq 0$$

Pero por el Lema 5 sabemos que las únicas prioridades que cambian son las correspondientes a N_r *y* N_s : $\rho_r = \rho = t^{1/p}_{rs}$, $\rho_s = 1/\rho$ y $\rho_i = 1$ para $i \neq r, s$. Sustituyendo estos valores en la expresión anterior se obtiene la condición.

NOTA 3. La condición (5) nos conduce a una inecuación de segundo grado que siempre tendrá soluciones puesto que se verifica para el caso trivial $\rho = 1$. Por lo tanto existirá un intervalo de ρ conteniendo al 1, $\left[\underline{\rho}, \overline{\rho}\right]$, en el cual será válida. En caso de que la desigualdad se cumpla para valores negativos tomaremos $\underline{\rho} = 0$.

Terorema 2. *Sea una jerarquía* $\mathcal{H}$ *con alternativas* A_l, $l = 1, ..., n$, *tales que* $\omega(A_1) \geq ... \geq \omega(A_n)$. *Dado un nodo N cualquiera de la jerarquía, el intervalo de estabilidad relativo global del juicio* a_{rs} *de N para un problema.* $P.\alpha$ *viene determinado por* $\left[\underline{\alpha}^G_{rs}, \overline{\alpha}^G_{rs}\right]$ *donde*

$$\left[\underline{\alpha}^G_{rs}, \overline{\alpha}^G_{rs}\right] = \bigcap_{l>1}\left[\underline{\rho}^p_l, \overline{\rho}^p_l\right]$$

siendo $\left[\underline{\rho}_l, \overline{\rho}_l\right]$ *el intervalo en el que se verifica la desigualdad:*

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,s}}^{p} \omega(N_i)\left[\Delta^{G,N^c}_{1l} + \omega^G(N)\Delta^{N_i}_{1l}\right] + \rho\omega(N_r)\left[\Delta^{G,N^c}_{1l} + \omega^G(N)\Delta^{N_r}_{1l}\right] + \frac{1}{\rho}\omega(N_s)\left[\Delta^{G,N^c}_{1l} + \omega^G(N)\Delta^{N_s}_{1l}\right] \geq 0$$

DEMOSTRACIÓN. Para que la alternativa A_1 se siga manteniendo la primera basta con que se cumpla $\omega'(A_1) \geq \omega'(A_l)$ para $l = 2, ..., n$. Aplicando el Teorema 1 en cada caso se obtiene un conjunto de intervalos $\left[\underline{\rho}_l, \bar{\rho}_l\right]$. El intervalo común $\left[\underline{\rho}, \bar{\rho}\right] = \bigcap_{l>1}\left[\underline{\rho}_l, \bar{\rho}_l\right]$ determina el rango en que puede variar $\rho = t_{rs}^{1/p}$ sin que se produzca cambio de rango en la primera alternativa.

Teorema 3. *Sea una jerarquía $\mathcal{H}$ con alternativas A_l, $l = 1, ..., n$, tales que $\omega(A_1) \geq ... \geq \omega(A_n)$. Dado un nodo N cualquiera de la jerarquía, el intervalo de estabilidad relativo global del juicio a_{rs} de N para un problema. P.γ viene determinado por $\left[\underline{\gamma}^G_{rs}, \bar{\gamma}^G_{rs}\right]$ donde*

$$\left[\underline{\gamma}^G_{rs}, \bar{\gamma}^G_{rs}\right] = \bigcap_{l>1}\left[\underline{\rho}^p_l, \bar{\rho}^p_l\right]$$

siendo $\left[\underline{\rho}_l, \bar{\rho}_l\right]$ el intervalo en el que se verifica la desigualdad:

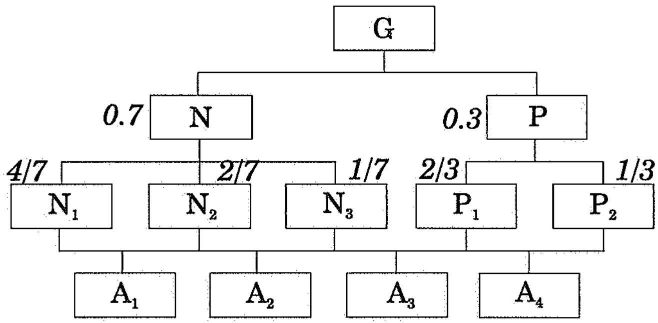
$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,s}}^{p} \omega(N_i)\left[\Delta^{G,N^c}_{l-1l} + \omega^G(N)\Delta^{N_i}_{l-1l}\right] + \rho\omega(N_r)\left[\Delta^{G,N^c}_{l-1l} + \omega^G(N)\Delta^{N_r}_{l-1l}\right] +$$

$$+\frac{1}{\rho}\cdot\omega(N_s)\left[\Delta^{G,N^c}_{l-1l} + \omega^G(N)\Delta^{N_s}_{l-1l}\right] \geq 0$$

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la anterior preservando las ordenaciones $\omega'(A_{l-1}) \geq \omega'(A_l)$ para $l = 2, ..., n$.

4.3. Ejemplo Numérico

Sea la jerarquía



en la que se han indicado las prioridades locales para los nodos *N, P, N_i, P_i*. Vamos a realizar modificaciones en los juicios correspondientes a N_1.

La matriz de comparaciones pareadas para el nodo *N* es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Las prioridades (locales) de las alternativas para cada atributo, así como las prioridades globales de los mismos son:

	0.4 N_1	0.2 N_2	0.1 N_3	0.2 P_1	0.1 P_2	$\omega(A_i\|G,N)$	$\omega(A_i\|G, N^c)$
A_1	0.4	0.3	0.2	0.2	0.4	0.32	0.08
A_2	0.2	0.2	0.4	0.5	0.3	0.29	0.13
A_3	0.3	0.2	0.1	0.2	0.2	0.23	0.06
A_4	0.1	0.3	0.3	0.1	0.1	0.16	0.03

En la siguiente tabla se calculan los términos necesarios para determinar los intervalos en los que se preserva la ordenación de la alternativa A_1:

	Δ^{G,N^c}	Δ^{N_1}	Δ^{N_2}	Δ^{N_3}
A_1–A_2	–0.05	0.2	0.1	-0.2
A_1–A_3	0.02	0.1	0.1	0.1
A_1–A_4	0.05	0.3	0	–0.1

Vamos a determinar el intervalo de estabilidad global relativa del juicio $a_{23}(N)$.

Para las alternativas A_1 y A_2 obtenemos:

$$\frac{4}{7}[-0.05+0.7\times0.2]+\frac{2}{7}\rho[-0.05+0.7\times0.1]+\frac{1}{7}\frac{1}{\rho}[-0.05+0.7\times(-0.2)]\geq 0$$

donde $\rho = t_{23}^{1/3}$.

$$\frac{0.36}{7}+\frac{0.04}{7}\rho+\frac{-0.19}{7\rho}\geq 0$$

$$0.36+0.04\rho-\frac{0.19}{\rho}\geq 0$$

Resolviendo la desigualdad se obtiene:

$$\rho \in (-\infty, -9.5]\bigcup\left[\frac{1}{2}, \infty\right]$$

Siempre nos quedamos con el máximo intervalo positivo que contiene al 1:

$$\rho \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

De forma análoga para A_1 y A_3 se obtiene

$$0.36+0.18\rho+\frac{0.09}{\rho}\geq 0$$

que se verifica para todo valor de ρ, por lo que nos quedamos con el intervalo $(0, \infty)$.

Finalmente, para A_1 y A_4:

$$1.04+01\rho-\frac{0.02}{\rho}\geq 0$$

obteniéndose el intervalo (aproximado) $\left[\frac{1}{52}, \infty\right)$.

En consecuencia el intervalo de estabilidad global relativo de $a_{23}(N)$ para un problema $P.\alpha$ es $[(1/2)3, \infty)=[1/8, \infty)$.

El correspondiente intervalo de estabilidad global de $a_{23}(N)$ para el problema $P.\alpha$ viene dado por: $\left[\underline{a}_{23}^{G}(N), \overline{a}_{23}^{G}(N)\right]$ donde

$$\underline{a}_{23}^{G}(N)=2*\frac{1}{8}=\frac{1}{4} \quad \overline{a}_{23}^{G}(N)=\infty$$

Análogamente se determina el correspondiente intervalo para el problema $P.\gamma$. A partir de la información de la siguiente tabla

	Δ^{G,N^c}	Δ^{N_1}	Δ^{N_2}	Δ^{N_3}
A_1–A_2	–0.05	0.2	0.1	-0.2
A_1–A_3	0.07	–0.1	0	0.3
A_1–A_4	0.03	0.2	–0.1	–0.2

se construyen las correspondientes inecuaciones cuyas soluciones respectivas para ρ son aproximadamente $[0.5, \infty)$, $(0, \infty)$ y $[0.165, 8.33]$. El intervalo intersección es $[0.5, 8.33]$ y el intervalo de estabilidad global para el problema $P.\gamma$ es $[0.5^3, 8.33^3] \approx [0.125, 578]$.

5. CONCLUSIONES

El Análisis del Comportamiento de las aproximaciones multicriterio seguidas en la resolución de problemas complejos es uno de los tópicos que mayor interés está despertando en el campo de la decisión multicriterio. Conforme a los tres niveles habitualmente considerados en planificación (estratégico, táctico y operativo), se plantea efectuar este análisis en tres etapas (validez, robustez y estabilidad) que evalúan, respectivamente, la efectividad de la aproximación, la eficacia del modelo y la eficiencia de la solución obtenida en el proceso de resolución.

Centrándonos en el Análisis de Sensibilidad (estabilidad) de las ordenaciones obtenidas al aplicar el Proceso Analítico Jerárquico, el trabajo determina los intervalos de estabilidad globales de un juicio en dos ámbitos diferentes (problemas tipo α y γ), esto es, se calcula el intervalo en el que puede oscilar un juicio de una matriz cualquiera de la jerarquía sin que se produzca cambio de rango en la selección de la mejor alternativa (problema tipo α) ni cambio de rango en la ordenación de todas las alternativas (problema tipo γ).

Los intervalos de estabilidad, obtenidos utilizando el método de la media geométrica por filas como procedimiento de priorización, permiten, bajo el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio, detectar hechos diferenciados o regularidades y fijar caminos de consenso que favorezcan el proceso negociador entre los actores implicados en la toma de decisiones. Esta filosofía negociadora está siendo especialmente recomendada en la resolución de problemas complejos en los que intervienen múltiples escenarios, actores y criterios.

REFERENCIAS

1. Aguarón, J. (1998) *Aspectos Notables en el Proceso Analítico Jerárquico. Extensiones.* Tesis Doctoral.
2. Aguarón, J.; Escobar, M.T. & Moreno, J.M. (1998) Estructuras de Preferencia e Intervalos de Estabilidad. Dos herramientas de gestión ambiental, En la *XII Reunión ASEPELT-España,* Córdoba. ISBN 84-86785-38-3.
3. Aguarón, J. & Moreno, J.M. (1998) Stability Intervals In The Analytic Hierarchy Process. En evaluación en *European Journal of Operational Research.*
4. Alexander, E.R. (1989) Sensitivity analysis in complex decision models. *APA Journal,* **4,** *323-333.*
5. Alpert, M.I. (1971) Identification of determinant attibutes: A comparison of methods. *Marketing Research,* **8(5),** 184-191.
6. Armacost, R.L. & Hosseini, J.C. (1994) Identification of determinant attributes using the Analytic hierarchy Process. *Journal of the Academy of Marketing Science,* **22(4),** 383-392.
7. Barron H. & Schmidt, C.P. (1988) Sensitivity Analysis of Additive Multiattribute Value Models. *Operations Research,* **36(1),** 122-127.
8. Barzilai, J. (1997) Deriving weights from pairwise comparison matrices. *Journal of the Operational Research Society,* **48,** pp. 1226-1232.
9. Churchman, C.W.; Ackoff, R.L. & Arnoff, E.L. (1957) *Introduction to Operations Research.* John Wiley. New York.
10. Crawford, G. & Williams, C. (1985) A note on the analysis of subjective judgement matrices. *Journal of Mathematical Psychology,* **29,** pp. 387-405.
11. Dean, J.W. Jr. & Sharfman, M.P. (1993) The relation between Procedural Rationality and Political Behavior in Strategic Decision Making. *Decision Sciencie,* **24(6),** pp. 1069-1083.
12. Dyer, J.S. (1990) Remarks on the Analytic Miereschy Process. Manegement. *Science* **36(3),** 249-258.
13. Edwards, W.; Kiss, Y.; Majone, G. & Toda, M. (1984) What constitdes a good decision? *Acta Psychologica,* **56,** pp. 5-27.
14. Evans, J.R. (1984) Sensitivity Analysis in Decision Theory. *Decision Sciences.* **1**(15), 239-247.
15. Faucheaux, S. & Froger, G. (1995) Decision Making under environmental uncertainty. *Ecological Economics,* **15,** pp. 19-42.

16. French, S. (1989) *Readings in decision analysis.* Chapman and Hall. London.

17. French, S. & Rios-Insua, D. (1989) Partial information and sensitivity analysis in multi-objective decision making. In P. Lockett (De.), *Improving decision making in organizations,* 23-41, LNEMS, London, Springer-Verlag.

18. Froger, G. & Munda, G. (1994) Methodology for decision support: procedural rationality and multicriteria decision aid, *Cahier du C3E,* Paris, 94-20.

19. Guitouni, A. & Martel, J.M. (1998) Tentative guidelines to help choosing an appropieate MCDD method. *European Journal of Operational Research* **109,** 501-521.

20. Hanley, N.; Spash, C. & Walker, L. (1995) Problems in Valuating the Benefits of Biodiversity Protection, *Environmetal and Resource Economics,* **5,** 249-272.

21. Hansens, P.; Labbé, M. & Wendell, R.E. (1989) Sensitivity analysis in multiple objetive linear programming: The tolerance approach. *European Journal of Operational Research* **38,** 63-69.

22. Hargreaves Heap, S.; Hollis, M.; Lyons, B.; Sugden, R. & Weale, A. (1992) *The Theory of Choice: A Critical Guide.* Blackwell. Oxford.

23. Masuda, T. (1990) Hierarchical sensitivity analysis of the priorities used in the analytic hierarchy process. *Systems Science,* **21(2),** 415-427.

24. Marmol, A.M. & Puerto, J. (1997) Special cases of the tolerance approach in multiobjetive linear programming. *European Journal of Operational Research* **98,** 610-616.

25. Moreno-Jiménez, J.M. (1996) *Metodología Multicriterio en el Plan Nacional de Regadíos.* (Privado).

26. Moreno-Jiménez, J.M. (1997) Priorización y Toma de Decisiones Ambientales, *Actas del I Encuentro Iberoamericano de Evaluación y Decisión Multicriterio,* Santiago de Chile, pp. 113-145.

27. Moreno, J.M.; Aguarón, J.; Escobar, M.T. & Turón, A. (1998) The Multicriteria Procedural Rationality on Sisdema, aceptado para su publicación en *European Journal of Operational Research.*

28. Moreno-Jiménez, J.M.; Mata, E.J. (1993): Sistemas Decisionales en la Empresa, *Cuadernos Aragoneses de Economía,* **3 (1),** 139-160.

29. Moreno-Jiménez, J.M. & Vargas, L.G. (1993) A Probabilistic Study of Preference Structures in the Analytic Hierarchy Process with Interval Judgment, *Mathematical and Computer Modelling,* **17 (4-5),** 73-81.

30. Myers, D.W. & Alpert, M.I. (1968) Determining buying attributes: Meaning and Measurement. *Marketin,* **321(10),** 13-20.

31. O'connor, M.; Faucheaux, S.; Froger, G.; Funtowicz, S. & Munda, G. (1995) Emergent complexity and procedural rationality: post normal science for sustainability, en R. Constanza y O. Segura (eds.): *Getting Down to Earth.* Island Press. Washington DC.

32. Ozernoy, V.M. (1992) Choosing the best multiple criteria decision making method. INFOR **30(2),** 159-171.

33. Rios-Insua, D. (1990) *Sensitivity analysis in multi-objective decision making.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Berlin, Germany: Springer-Verlag.

34. Saaty, T.L. (1977) A scaling method for priorities in hierarchical structures, *J. Math. Psychol.,* **15,** 234-281.

35. Saaty, T.L. (1980) *Multicriteria Decisión Making: The Analytic Hierarchy Process.* McGraw-Hill. New York.

36. Saaty, T.L. (1994) Perspectives on the Theory and Practice of decision Making with the Analytic Hierarchy Process. *Proceedings of the 3rd International Symposium on the Analytic Hierarchy Process,* Washington, pp. 5-18.

37. Saaty, T.L. (1996) *The Analytic Network Process.* RSW Publications.

38. Saaty, T.L. & Vargas, L.G. (1993) Experiments on Rank Preservation and Reversal in Relative Measurement, *Mathematical and Computing Modelling,* **17 (4-5),** 13-18.

39. Triantaphyllou, E. & Sánchez, P. (1997) A sensitivity Analysis Approach for some Deterministic Multicriteria Decision Making Methods. *Decision Science,* **28(1),** 151-194.

40. Vargas, L.G. (1991) Why the Analytic Hierarchy Process is not like Multiattribute Theory, in P. Korhonen, A. Lewandowsky, y J. Wallenius (eds.) in *Multiplecirteria Decision Support,* Springer-Verlag, 365.

41. Vargas, L.G. (1994) Comparison of Three Multicriteria Decision Making thories: The Analytic Hierarchy Process, Multiattribute Utility and Outranking. *Proccedings of the 3rd International Symporisum on the Analytic Hierarchy Process,* Washington, pp. 19-29.

42. Vercelli, A. (1995) From soft uncertainty to hard environmental uncertainty, *Economie Appliqué,* **48 (2),** 251-269.

43. Von Winterfeldt, D. & Edwards, W. (1986) *Decision Analysis and Behavioral Research.* Cambridge University Press. New York.

44. Weber, M.; Eisenfuhr, F.; Von Winterfeldt, D. (1988) The effects of splitting attributes on weights in multiattribute utility measurement. *Management Science,* **34(4),** 431-445.

45. Wendel, R.E. (1992) Sensitivity analysis revisited and extended. *Decision Sciences,* **23(5),** 1127-1142.

46. Zanakis, S.H.; Solomon, A.; Wishart, N. & Dublish, S. (1998) Multiattribute decision making: A simulation comparison of select methods. *European Journal Operational Research,* **107,** 507-529.