

# Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1984-2001.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

\*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

\*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

\*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

\*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [reutilisation@bnf.fr](mailto:reutilisation@bnf.fr).

## Sur la réductibilité de la variété des algèbres de Lie nilpotentes complexes

Yu B. HAKIMJANOV, José Maria ANCOCHEA BERMUDEZ et Michel GOZE

*Résumé* — On montre, dans cette Note, que les variétés algébriques des lois d'algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension supérieure ou égale à 7 sont réductibles.

### On the reducibility of the varieties of nilpotent complex Lie algebras

*Abstract* — In this Note we prove that the variety of nilpotent complex Lie algebras of dimension more than seven is reducible.

INTRODUCTION ET NOTATIONS. — Soit  $N^n$  la variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension  $n$ . Elle est fibrée par les orbites correspondant à l'action naturelle du groupe linéaire  $Gl(n, \mathbb{C})$  (définie par les changements de base). Cette variété est irréductible pour  $n \leq 6$  (voir [3], [7], [8]). Dans [10], M. Vergne démontre l'existence d'au moins deux composantes algébriques irréductibles dès que  $n \geq 11$  sans toutefois les déterminer explicitement.

Si  $\mu \in N^n$ , on notera  $\mathfrak{g} = (\mu, \mathbb{C}^n)$  l'algèbre de Lie de loi  $\mu$  et  $\mathcal{O}(\mu)$  ou  $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$  l'orbite de  $\mu$ .

THÉORÈME. — Si  $n \geq 7$ , la variété  $N^n$  est réductible.

I. SUITE CARACTÉRISTIQUE. CONTRACTIONS. DÉTERMINATION DES COMPOSANTES IRREDUCTIBLES. — Soient  $\mathfrak{g} = (\mu, \mathbb{C}^n)$  une algèbre de Lie complexe nilpotente de dimension  $n$  et  $\mathcal{D}\mathfrak{g}$  son idéal dérivé. Soient  $X$  un vecteur non nul dans  $\mathfrak{g} - \mathcal{D}\mathfrak{g}$  et  $s_\mu(X) = (s_1(X), \dots, s_k(X), 1)$  la suite ordonnée ( $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k \geq 1$ ) des exposants de similitude de l'opérateur nilpotent  $\text{ad}_\mu(X)$ . Ordonnons l'ensemble de ces suites par l'ordre lexicographique et notons :

$$s(\mu) = \sup \{ s_\mu(X) \mid X \in \mathfrak{g} - \mathcal{D}\mathfrak{g} \}.$$

C'est un invariant à isomorphisme près de l'algèbre  $\mathfrak{g} = (\mu, \mathbb{C}^n)$ .

PROPOSITION. — Si  $\mu'$  est une perturbation de  $\mu$  dans  $N^n$ , alors  $s(\mu') \geq s(\mu)$ .

La notion de perturbation est définie dans [6]. Soit  $X \in \mathbb{C}^n$  tel que  $s_\mu(X) = s(\mu)$ . Comme  $\mu' \simeq \mu$ , si  $X' \simeq X$  et  $X' \in \mathfrak{g}' - \mathcal{D}\mathfrak{g}'$  où  $\mathfrak{g}'$  est l'algèbre de Lie associée à  $\mu'$ , l'opérateur nilpotent  $\text{ad}_{\mu'}(X')$  est une perturbation de  $\text{ad}_\mu(X)$ . Posons  $s_{\mu'}(X') = (s_1, \dots, 1)$  et considérons le premier espace caractéristique  $E_1$  (resp.  $E'_1$ ) de  $\text{ad}_\mu(X)$  [resp. de  $\text{ad}_{\mu'}(X')$ ] de dimension  $s_1$ . Si  $(e_1, \dots, e_{s_1})$  est une base de Jordan de  $E_1$ , alors  $\text{ad}_{\mu'}(X')(e_i) \simeq e_{i+1}$  et  $\dim E'_1 \geq \dim E_1$ . En cas d'égalité on compare les espaces caractéristiques suivants. D'où la proposition.

Conséquences. — 1. Soit  $\mathfrak{g}_0 = (\mu_0, \mathbb{C}^n)$  une algèbre de Lie se contractant sur  $\mathfrak{g}_1 = (\mu_1, \mathbb{C}^n)$ . Alors  $\mu_0$  est dans l'adhérence de  $\mathcal{O}(\mu_1)$  et elle est donc isomorphe à une perturbation  $\mu$  de  $\mu_1$ . Ainsi  $s(\mu_0) \geq s(\mu_1)$ .

2. Soit  $N_s = \{ \mu \in N^n \mid s(\mu) \geq s \}$ . D'après la proposition ci-dessus, c'est un ouvert de  $N^n$ . Le cas particulier où  $s$  est maximal et égal à  $(n-1, 1)$  correspond à l'ouvert des lois filiformes. Il est clair que la réductibilité de l'ouvert  $N_{(n-1, 1)}$  implique la réductibilité de  $N^n$ . Supposons  $N_{(n-1, 1)}$  irréductible. La proposition précédente conduit la recherche

Note présentée par Jean-Louis KOSZUL.

d'une deuxième composante irréductible dans l'ouvert  $N_{(n-2,1,1)}$ . Plus généralement si  $N_s$  est contenu dans l'adhérence de Zariski de  $N_{(n-1,1)}$  et ceci pour tout  $s \geq s_0$ , on cherche une éventuelle deuxième composante dans  $N_{s_1}$  où  $s_1$  est le prédécesseur de  $s_0$ .

II. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — II.1. *Cas de la dimension 7.* — L'ouvert  $N_{(6,1)}$  est irréductible. Il s'identifie à l'orbite de la famille à un paramètre définie par :

$$\begin{aligned} \mu(X_1, X_i) &= X_{i-1}, & i &= 3, 4, \dots, 7 \\ \mu(X_4, X_7) &= \alpha X_2; & \mu(X_5, X_6) &= X_2; & \mu(X_5, X_7) &= (1 + \alpha) X_3; & \mu(X_6, X_7) &= (1 + \alpha) X_4. \end{aligned}$$

L'adhérence de Zariski de cette orbite est une composante irréductible.

L'ouvert  $N_{(5,1,1)}$  n'est pas irréductible. Les algèbres suivantes :

$$\begin{aligned} \mu(X_1, X_i) &= X_{i-1}, & i &= 4, 5, 6, 7 \\ \mu(X_2, X_6) &= X_3; & \mu(X_2, X_7) &= X_3 + X_4; & \mu(X_5, X_7) &= \alpha X_3; & \mu(X_6, X_7) &= \alpha X_4 + X_2 \end{aligned}$$

ne sont pas dans la composante définie précédemment (on ne peut perturber ces algèbres sur une algèbre filiforme); l'adhérence de l'orbite de cette famille à un paramètre détermine une deuxième composante irréductible de  $N^7$  (en fait  $N^7$  est réunion de ces deux composantes [6]).

II.2. *Cas de la dimension 8* [6]. — L'ouvert des filiformes n'est pas irréductible. Il est contenu dans les deux composantes définies par l'adhérence des orbites des deux familles suivantes :

$$\begin{aligned} \mu(X_1, X_i) &= X_{i+1}, & 3 \leq i \leq 8; & & \mu(X_4, X_8) &= \alpha X_2; \\ \mu(X_5, X_7) &= X_2; & \mu(X_5, X_8) &= (1 + \alpha) X_3 + X_2 \\ \mu(X_6, X_7) &= X_3; & \mu(X_6, X_8) &= (2 + \alpha) X_4 + X_3; & \mu(X_7, X_8) &= (2 + \alpha) X_5 + X_4. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu(X_1, X_i) &= X_{i+1}, & 3 \leq i \leq 8; & & \mu(X_4, X_7) &= X_2; \\ \mu(X_4, X_8) &= X_2 + X_3; & \mu(X_5, X_6) &= -X_2; \\ \mu(X_5, X_7) &= (-2/5) X_2; & \mu(X_5, X_8) &= X_4 + (3/5) X_3; & \mu(X_6, X_7) &= (2/5) X_3; \\ \mu(X_6, X_8) &= X_5 + (1/5) X_4 + \alpha X_2; & \mu(X_7, X_8) &= X_6 + (1/5) X_5 + \alpha X_3. \end{aligned}$$

*Remarque.* — Récemment G. Ceeley a mis en évidence une troisième composante de  $N^8$  ne rencontrant pas l'ouvert des filiformes [9].

II.3. *Cas de la dimension 9.* — L'ouvert des filiformes est irréductible [1]. Il est contenu dans l'orbite de la famille à deux paramètres donnée par :

$$\begin{aligned} \mu(X_1, X_i) &= X_{i-1}, & 3 \leq i \leq 9; & & \mu(X_5, X_8) &= X_2; \\ \mu(X_5, X_9) &= X_3 + \alpha X_2; & \mu(X_6, X_7) &= X_2; \\ \mu(X_6, X_8) &= 2 X_3; & \mu(X_6, X_9) &= 3 X_4 + \alpha X_3 + \beta X_2; & \mu(X_7, X_8) &= 2 X_4; \\ \mu(X_7, X_9) &= 5 X_5 + \alpha X_4 + \beta X_3; & \mu(X_8, X_9) &= 5 X_6 + \alpha X_5 + \beta X_4. \end{aligned}$$

Considérons à présent la famille dont les lois sont dans  $N_{(7,1,1)}$  qui est définie par :

$$\begin{aligned} \mu(X_1, X_i) &= X_{i-1}, & 4 \leq i \leq 9; & & \mu(X_2, X_8) &= -2 X_3; \\ \mu(X_2, X_9) &= -2 X_4 - 5 \alpha X_3; & \mu(X_5, X_8) &= X_3; \\ \mu(X_5, X_9) &= X_4 + \beta X_3; & \mu(X_6, X_8) &= X_4 + \alpha X_3; & \mu(X_6, X_9) &= 2 X_5 + (\alpha + \beta) X_4 + X_2; \\ \mu(X_7, X_8) &= X_5 + \alpha X_4 + \gamma X_3 - X_2; & \mu(X_7, X_9) &= 3 X_6 + (\beta + 2 \alpha) X_5 + \gamma X_4; \\ \mu(X_8, X_9) &= 3 X_7 + (\beta + 2 \alpha) X_6 + \gamma X_5 + \gamma X_5 + \delta X_2. \end{aligned}$$

Aucune de ces lois ne peut se perturber sur une loi filiforme; l'adhérence de l'orbite de cette famille constitue une deuxième composante de  $N^9$ .

II.4. *Cas de la dimension 10.* — L'ouvert des lois filiformes  $N_{(9,1)}$  est contenu dans la réunion de trois composantes algébriques irréductibles.

En effet, toute loi filiforme de dimension 10 est isomorphe à l'une des lois données par :

$$\begin{aligned} \mu(X_1, X_i) &= X_{i-1}, \quad 3 \leq i \leq 10; & \mu(X_4, X_9) &= a_1 X_2; & \mu(X_4, X_{10}) &= a_1 X_3 + a_2 X_2; \\ \mu(X_5, X_8) &= -a_1 X_2; & \mu(X_5, X_9) &= b_2 X_2; & \mu(X_5, X_{10}) &= a_1 X_4 + (b_2 + a_2) X_3 + b_3 X_2; \\ \mu(X_6, X_7) &= a_1 X_2; & \mu(X_6, X_8) &= c_2 X_2; & \mu(X_6, X_9) &= (b_2 + c_2) X_3 + c_3 X_2; \\ \mu(X_6, X_{10}) &= a_1 X_5 + (a_2 + 2b_2 + c_2) X_4 + (c_3 + b_3) X_3 + c_4 X_2; & \mu(X_7, X_8) &= c_2 X_3 + d_1 X_2; \\ & & \mu(X_7, X_9) &= (b_2 + 2c_2) X_4 + (c_3 + d_1) X_3 + d_2 X_2; \\ \mu(X_7, X_{10}) &= a_1 X_6 + (a_2 + 3b_2 + 3c_2) X_5 + (2c_3 + b_3 + d_1) X_4 + (c_4 + d_2) X_3 + d_3 X_2; \\ \mu(X_8, X_9) &= (b_2 + 2c_2) X_5 + (c_3 + d_1) X_4 + d_2 X_3 + e_1 X_2; \\ \mu(X_8, X_{10}) &= a_1 X_7 + (a_2 + 4b_2 + 5c_2) X_6 + (3c_3 + b_3 + 2d_1) X_5 \\ & & & & + (c_4 + 2d_2) X_4 + (e_1 + d_3) X_3 + e_2 X_2; \\ \mu(X_9, X_{10}) &= a_1 X_8 + (a_2 + 4b_2 + 5c_2) X_7 + (3c_3 + b_3 + 2d_1) X_6 \\ & & & & + (c_4 + 2d_2) X_5 + (e_1 + d_3) X_4 + e_2 X_3 + f X_2 \end{aligned}$$

où les constantes de structure  $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f)$  vérifient les conditions de Jacobi suivantes :

$$2c_2 a_2 - 3b_2^2 - 3b_2 c_2 = 0$$

$$a_1 (2a_2 + 7b_2 + 7c_2) = 0$$

$$a_1 (2c_4 + 5d_2) - 2a_2 d_1 - (4b_2 + 5c_2)(d_1 - c_3) - (3c_3 + b_3 + 2d_1)(c_2 - b_2) - b_3(b_2 + 2c_2) = 0.$$

La première composante est l'adhérence de Zariski de l'orbite de la famille définie par  $a_1 = c_2 = 1$ ,  $b_2 = -1$ ,  $a_2 = 0$  et  $2c_4 + 5d_2 = 5d_1 + 5c_3 + 3b_3$ .

La deuxième est l'adhérence de l'orbite de la famille correspondant à :  $a_1 = c_2 = 1$ ,  $b_2 = -7/3$ ,  $a_2 = 14/3$  et  $2c_4 + 5d_2 = (35/3)d_1 + (43/3)c_3 + 3b_3$ .

Quant à la troisième, elle est associée à la famille donnée par :  $a_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $2a_2 = 3b_2^2 + 3b_2$ ,  $3b_3 = (7b_2 + 2)c_3 - d_1(3b_2^2 + 5b_2 + 7)$ .

II.5. *Cas de la dimension supérieure ou égale à 11.* — La réductibilité de  $N^n$  pour  $n \geq 11$  est prouvée dans [4]. Le but du paragraphe suivant est de préciser les composantes données par les lois filiformes lorsque la dimension est supérieure à 11.

III. LA RÉDUCTIBILITÉ DE L'OUVERT DES FILIFORMES [5]. — Soit  $l_n$  l'algèbre de Lie de dimension  $n+1$  avec  $n \geq 11$  définie dans la base  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  par  $\mu(e_0, e_i) = e_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ .

A tout couple d'entiers  $(k, s)$  tels que  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $2k+1 \leq s \leq n$  et  $s \geq 4$ , on associe le 2-cocycle (pour la cohomologie de Chevalley)  $\varphi_{k,s} \in Z^2(l_n, l_n)$  défini par

$$\varphi_{k,s}(e_i, e_j) = (-1)^{k-i} \delta_{j-k-1}^{k-i} e_{i+j+s-2k-1} \quad \text{si } 1 \leq i \leq k < j \leq n$$

et égal à 0 dans les autres cas.

Soit  $T$  l'espace vectoriel engendré par d'une part les cocycles  $\varphi_{k,s}$  avec  $2k+1 < s < n$  et d'autre part  $\varphi_{1,n}$  si  $n = 2l+1$ .

LEMME [5]. — L'espace tangent au point  $l_n$  à la variété  $N^n$  est un sous-espace de  $T + B^2(l_n, l_n)$  où  $B^2(l_n, l_n)$  est l'espace des 2-cobords de la cohomologie de Chevalley de  $l_n$  qui s'identifie à l'espace tangent en  $l_n$  à  $\mathcal{O}(l_n)$ .

Or, d'après [10], l'étude des composantes irréductibles de l'ouvert  $N_{(n-1,1)}$  se ramène à l'étude des composantes de la sous-variété affine  $M$  de  $T$  définie par les relations  $\varphi \circ \varphi = 0$  (i.e.  $\varphi$  est une loi d'algèbre de Lie). Or tout élément  $\varphi$  de  $T$  est de la forme  $\varphi = \sum a_{k,s} \varphi_{k,s}$  et la variété  $M$  est donnée par les équations :

$$\begin{aligned} -3a_{2,6}^2 + a_{3,8}a_{2,6} + 2a_{1,4}a_{3,8} &= 0 \\ 6a_{3,8}^2 - 4a_{2,6}a_{3,8} - a_{3,8}a_{4,10} + 2a_{1,4}a_{4,10} - a_{2,6}a_{4,10} &= 0 \\ -4a_{3,8}^2 + 3a_{3,8}a_{4,10} + 3a_{2,6}a_{4,10} &= 0. \end{aligned}$$

La solution de ce système est la réunion des trois droites qui dans l'espace vectoriel paramétré par  $(a_{1,4}, a_{2,6}, a_{3,8}, a_{4,10})$  ont pour vecteurs directeurs respectifs  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1)$  et  $(1, 1/10, 1/70, 1/420)$ .

On en déduit le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — Si  $n \geq 12$ , l'ouvert  $N_{(n-1,1)}$  (et par suite  $N^n$ ) contient au moins trois composantes irréductibles si  $n$  est impair, et au moins quatre composantes irréductibles si  $n$  est pair.

*Remarque sur la dimension des composantes.* — Considérons les algèbres filiformes  $r_n$  et  $w_n$  définies par :

$r_n$  :

$$\mu(e_0, e_i) = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1; \quad \mu(e_1, e_i) = e_{i+2}, \quad 2 \leq i \leq n-2.$$

$w_n$  :

$$\begin{aligned} \mu(e_0, e_i) &= e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1; \\ \mu(e_i, e_j) &= [6(i-1)!(j-1)(j-i)/(i+j)!] e_{i+j+1}, \quad \text{si } 1 \leq i, j \leq n-2, \quad i+j+1 \leq n. \end{aligned}$$

Les lois de ces deux algèbres sont des points simples de  $N^{n+1}$  et appartiennent à des composantes distinctes qui sont respectivement de dimension  $n^2 + 2n - [(n+16)/3]$  et  $n^2 + n + 2$ .

Note remise le 25 avril 1991, acceptée le 21 mai 1991.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J.M. ANCOCHEA BERMUDEZ et J. R. GOMEZ MARTIN, *Actes des 15<sup>es</sup> journées Luso-Espanholas*, Evora, 1990.
- [2] J.M. ANCOCHEA BERMUDEZ et M. GOZE, Le rang du système linéaire associé à une algèbre de Lie rigide, *Comm. Algebra* (à paraître).
- [3] R. CARLES et Y. DIAKITE, Sur les variétés d'algèbres de Lie de dimension  $\leq 7$ , *J. Algebra*, 91, 1984, p. 65-82.
- [4] Yu B. HAKIMJANOV, Variétés des lois d'algèbres de Lie nilpotentes, *Ouspekhi Mat. Nauk*, 6, 1990, p. 159-160.
- [5] Yu HAKIMJANOV, *La variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes*, preprint.
- [6] M. GOZE et J.M. ANCOCHEA BERMUDEZ, Varieties of complex nilpotent algebras of dimension 7 and 8, *J. Pure and Applied Algebra* (à paraître).
- [7] F. GRUNEWALD et O'HALLORAN, Varieties of nilpotent algebras of dimension less than six, *J. Algebra*, 112, 1988, p. 315-325.
- [8] A. A. KIRILLOV et Yu. NERETIN, The variety  $A_n$  of  $n$ -dimensional Lie algebra structures, *A.M.S. Transl.*, (2), 1987, p. 137.
- [9] G. SEELEY, *An irreducible component in the variety of 8-dimensional nilpotent algebras* (à paraître).
- [10] M. VERGNE, Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes, *Bull. Soc. Math. France*, 98, 1970, p. 81-116.

Y. H. : Département Math., Université de Tachkent, Tachkent 700095, U.R.S.S.;

J. M. A. B. : Dpto. Geometria-Topologia,  
Fac. de Matematicas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Espagne;

M. G. : F.S.T., Labo. Math., 32, rue Grillenbreit, 68000 Colmar.