LOS EXPONENTES IDEALISTICOS DE CONTACTO Y SU CALCULO

por

CONCEPCION ROMO SANTOS

RESUMEN

Sea X una variedad algebroide sumergida en K^n, es decir

$$X = V(I) = \text{Spec.}\,(K\,[[Z_1, \ldots, Z_n]]\,/\,I)$$

con I ideal radical. En estas condiciones llamamos primer exponente característico de la variedad algebroide X, al número

$$\delta(X) = \sup.\,\{\,\delta(X, W')\,\},\ \text{con } W' \text{ curva algebroide regular}$$

donde $\delta(X, W')$ es el exponente de contacto de las variedades W' y X. Con el fin de estudiar mejor estos exponentes de contacto introduciremos el concepto de exponente idealístico, de importancia esencial en el proceso de desingularización.

El objetivo de este trabajo es el estudio de la caracterización, propiedades y construcción de los exponentes idealísticos en las distintas variedades algebroides.

§ 1. Definición y caracterización de los exponentes idealísticos

1.1. Definición.—Sea W un esquema noetheriano regular. Consideraremos pares del tipo (J, b), donde J es un haz coherente de ideales y b es un entero positivo.

Dados dos pares (J_1, b_1), (J_2, b_2) definiremos una relación de equivalencia entre ellos de la siguiente manera:

$$(J_1, b_1) \sim (J_2, b_2) \Longleftrightarrow \forall\ \Lambda$$

anillo de valoración y $\forall\, h$ morfismo

$$h:\ \text{Spec}\,(\Lambda) \longrightarrow W$$

se verifique

$$\frac{\operatorname{val}(J_1 \wedge)}{b_1} = \frac{\operatorname{val}(J_2 \wedge)}{b_2}$$

(donde val ( ) representa el valor (aditivo) con respecto a la valoración y $J_i \wedge$ se define por medio de h).

1.2. PROPOSICIÓN.—Las condiciones siguientes son equivalentes:

(1) $(J_1, b_1) \sim (J_2, b_2)$.

(2) Existe una transformación birracional

$$g: W' \longrightarrow W$$

tal que

$$(J_1\, 0_{W'})^{b_2} = (J_2\, 0_{W'})^{b_1}.$$

(3) Sea $\pi_1: \tilde{W}_1 \longrightarrow W$ (resp. $\pi_2: \tilde{W}_2 \longrightarrow W$) la explosión normalizada de J_1 (resp. J_2). Entonces se verifica que

$$(J_1\, 0_{\tilde{W}_1})^{b_2} = (J_2\, 0_{\tilde{W}_1})^{b_1}$$

(resp. $(J_1\, 0_{\tilde{W}_2})^{b_2} = (J_2\, 0_{\tilde{W}_2})^{b_1}$).

(4) $J_1^{b_2}$ y $J_2^{b_1}$ poseen el mismo cierre íntegro de Zariski en W.

DEMOSTRACIÓN.—Probaremos

$$3 \Longrightarrow 1 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 3 \Longleftrightarrow 2.$$

$3 \Longrightarrow 1$. Si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{W}_1 \arrow[r, "\pi_1"] & W \\ \operatorname{Spec}(\wedge) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

pueden ocurrir los dos casos siguientes:

CASO 1.—Imagen $(h) \subseteq$ subesquema definido por J_1. En este caso

$$\frac{\operatorname{val}(J_1 \wedge)}{b_1} = \infty$$

Caso 2.—Existe un h' único que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{W}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & W \\ \nwarrow h' & & \nearrow h \\ & \mathrm{Spec}\,(\Lambda) & \end{array}$$

y tal que

$$\frac{\mathrm{val}\,(J_1\,\Lambda)}{b_1} = \frac{\mathrm{val}\,((J_1\,\theta_{\tilde{W}_1})\,\Lambda)}{b_1}\,;$$

$$\frac{\mathrm{val}\,(J_2\,\Lambda)}{b_2} = \frac{\mathrm{val}\,((J_2\,\theta_{\tilde{W}_1})\,\Lambda)}{b_2}\,;$$

por la condición (3)

$$\frac{\mathrm{val}\,((J_1\,\theta_{\tilde{W}_1})\,\Lambda)}{b_1} = \frac{\mathrm{val}\,((J_2\,\theta_{\tilde{W}_1})\,\Lambda)}{b_2}$$

y entonces

$$\frac{\mathrm{val}\,(J_1\,\Lambda)}{b_1} = \frac{\mathrm{val}\,(J_2\,\Lambda)}{b_2}$$

Luego en ambos casos se verifica

$$\frac{\mathrm{val}\,(J_1\,\Lambda)}{b_1} = \frac{\mathrm{val}\,(J_2\,\Lambda)}{b_2}$$

$1 \Longrightarrow 4$. Si $x \in W$, llamaremos I_1, I_2 a los ideales localizados $(J_1^{b_2})_x$, $(J_2^{b_1})_x$ respectivamente. La condición (1) nos dice que para toda valoración

$$\mathrm{val}\,(I_1) = \mathrm{val}\,(I_2)$$

y además, para todo $f \in I_1$ tenemos

$$\mathrm{val}\,(f) \geqslant \mathrm{val}\,(I_1) = \mathrm{val}\,(I_2)$$

desigualdad que se deduce obviamente de la definición de val (I_1) como el mínimo de los valores.

Probaremos que si $f \in \mathrm{I}_1$ entonces f es Z-íntegro sobre I_2. Consideremos el ideal

$$\mathrm{L} = (\mathrm{I}_2 \,/\, f)\, 0_{\mathrm{W},\, x}\, [\mathrm{I}_2 \,/\, f].$$

Para toda valoración finita en $0_{\mathrm{W},\, x}$ tenemos

$$\mathrm{val}\,(\mathrm{L}) \leqslant 0.$$

Entonces $\mathrm{L} = 0_{\mathrm{W},\, x}\, [\mathrm{I}_2 \,/\, f]$ y, si $\mathrm{I}_2 = (m_1, \ldots, m_s)\, 0_{\mathrm{W},\, x}$, se tendrá

$$1 = \sum_{i=1}^{s} (m_i \,/\, f)\, g_i\, (m_1 \,/\, f, \ldots, m_s \,/\, f)\,; \quad g_i\, (m_1 \,/\, f, \ldots, m_s \,/\, f) \in 0_{\mathrm{W},\, x}\, [\mathrm{I}_2 \,/\, f]$$

y entonces para N suficientemente grande se tendrá

$$f^{\mathrm{N}} = \sum_{i=1}^{s} m_i\, (f^{\mathrm{N}-j_i} \cdot g_i\, (m_1 \,/\, f, \ldots, m_s \,/\, f)),$$

y por lo tanto

$$f^{\mathrm{N}} + a_1 f^{\mathrm{N}-1} + \ldots + a_n = 0 \quad \text{donde} \quad a_i \in \mathrm{I}'_2.$$

Por simetría podemos probar que todo elemento de I_2 es Z-íntegro sobre I_1. Por lo tanto se verifica (4).

4 $\Longrightarrow$ 3. Se deduce trivialmente de las propiedades de las explosiones.

3 $\Longrightarrow$ 2. Sea W_0 la unión de las componentes irreducibles de W en las que $\mathrm{J}_1\, \mathrm{J}_2$ no es idénticamente nulo. Entonces $\pi_i : \tilde{\mathrm{W}} \longrightarrow \mathrm{W}_0$ es birracional y propio, $\mathrm{W} = \mathrm{W}_0 \cup \mathrm{W}'_0$ disjunto, donde $\mathrm{W}'_0 = \mathrm{W} - \mathrm{W}_0$. En estas condiciones sean $p_0 : \tilde{\mathrm{W}}_0 \longrightarrow \mathrm{W}_0$ la unión de los π_i, $i = 1, 2$; $p'_0 : \mathrm{W}'_0 \longrightarrow \mathrm{W}'_0$ la identidad; $\mathrm{W}' = \tilde{\mathrm{W}}_0 \cup \mathrm{W}'_0$, unión disjunta y $g : \mathrm{W}' \longrightarrow \mathrm{W}$ la aplicación dada por p_0 y p'_0. Se verifica que g posee la propiedad (2).

2 $\Longrightarrow$ 3. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W}' \arrow[d, "g"'] & \tilde{\mathrm{W}}'_1 \arrow[l, dotted] \arrow[d, dash, "\tilde{g}"] \\
\mathrm{W} & \tilde{\mathrm{W}}_1 \arrow[l, dotted]
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{W}'_1$, $\tilde{W}_1$ son las explosiones normalizadas de $J_1\,\theta_{W'}$ y $J_1\,\theta_W$ respectivamente. En esta situación $\tilde{g}$ es birracional y (3) se deduce de la igualdad

$$J_1^{b_2}\,\theta_{W'} = J_2^{b_1}\,\theta_{W'}$$

y de que $J_1^{b_2}\,\theta_W$ es localmente principal en W_1.

1.3. Definición.—Un exponente idealístico ε en W es una $\sim$ clase de equivalencia de pares (J, b). Si ε es la clase de (J, b), escribiremos $\varepsilon = ((J, b))$.

1.4. Consecuencias de la definición de exponente idealístico.

a) Si ν es un entero positivo, se verifica que

$$((J, b)) = ((J^\nu, b\,\nu)).$$

b) Sea $x \in W$. Entonces definimos

$$\mathrm{ord}_x(J_x) = \sup\{\nu \mid \mathfrak{m}^\nu \supseteq J_x\}$$

donde $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal de $\theta_{W,x}$.

Si $\varepsilon = ((J, b))$, definiremos

$$\mathrm{ord}_x(\varepsilon) = \frac{\mathrm{ord}_x(J_x)}{b}$$

Demostraremos que esta definición es independiente de los representantes. De hecho, debido a la regularidad de $\theta_{W,x}$, existe una única valoración v tal que, para todo $f \in \theta_{W,x}$,

$$\mathrm{val}(f) = \mathrm{ord}_x(f\,\theta_{W,x}).$$

Si Λ_v es el anillo de valoración correspondiente se tendrá

$$\mathrm{ord}_x(\varepsilon) = \frac{\mathrm{val}(J\,\Lambda_v)}{b}$$

y por definición de $\sim$ — equivalencia, $\mathrm{ord}_x(\varepsilon)$ es independiente de los representantes.

1.5. PROPIEDADES DEL TRANSFORMADO DE UN EXPONENTE IDEALÍSTICO.—Sea W un esquema regular excelente y X una hipersuperficie en W. Supongamos que $\mathcal{I}$ es el haz de ideales de X y consideremos el exponente idealístico $\varepsilon = (\mathcal{I}, b)$, donde

$$b = \max_{x \in X} \{\operatorname{mult}_x X\}.$$

Entonces definimos

$$\begin{aligned} \operatorname{Sing} \varepsilon &= \{x \in X \mid \operatorname{ord}_x \varepsilon \geqslant 1\} = \{x \in X \mid \operatorname{ord}_{\mathfrak{m}_x} (\mathcal{I}_x) \geqslant b\} = \\ &= \{x \in X \mid \operatorname{mult}_x X \text{ es maximal}\} = \{x \in X \mid \operatorname{mult}_x X = b\}. \end{aligned}$$

Sea ahora D un subesquema cerrado irreducible de W, que es regular en W, supongamos que

$$D \subset \operatorname{Sing} (\varepsilon)$$

y sean π y p las explosiones de W y X con centro D,

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{\pi} & W \\ \cup\!\uparrow & & \cup\!\uparrow \\ X' & \xrightarrow[p]{} & X \end{array}$$

tal que X′ es el transformado estricto de X por medio de π. En estas condiciones si ε' es el transformado de ε por π, $\varepsilon' = ((\mathcal{I}', b))$. Se verificará:

(1) $\mathcal{I}'$ es el ideal correspondiente de X′ en $\mathcal{O}_{W'}$.

(2) $\operatorname{Sing} (\varepsilon') = \{x' \in X' \mid \operatorname{mult}_{x'} X' = b\}$.

§ 2. LOS EXPONENTES IDEALÍSTICOS EN LAS VARIEDADES ALGEBROIDES

2.1. TEOREMA DE EXISTENCIA DEL EXPONENTE IDEALÍSTICO EN VARIEDADES ALGEBROIDES.—Sea

$$R = K [[Z_1, \ldots, Z_c, W_1, \ldots, W_d]] = K [[\mathbf{Z}, \mathbf{W}]]$$

con $c + d = n$, el anillo de series de potencias formales en las indeterminadas $Z_1, \ldots, Z_c$, $W_1, \ldots, W_d$ sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado de característica cualquiera. Sea X una variedad algebroide sumergida en K_n, es decir

$$X = V(I) = \operatorname{Spec}(K[[\mathbf{Z}, \mathbf{W}]] / I)$$

con I ideal radical. Sean W una variedad algebroide regular transversal a X y $X = \bigcap_{i=1}^{m} H^{(i)}$ la descomposición de X en una intersección tangencial adecuada de hipersuperficies. En estas condiciones existe un ideal coherente $\mathcal{J}$ de θ_W y un entero positivo b tal que, para toda función de prueba h de W, se tiene

$$\delta(H_h, W_h) = \nu_0(\mathcal{J}\, \theta_D) / b$$

donde $\nu_0(\ )$ es el orden en el origen.

DEMOSTRACIÓN. — Para cada i, $1 \leqslant i \leqslant m$, sea $f_i = 0$ la ecuación de $H^{(i)}$

$$f_i = \sum_{A \in \mathbf{Z}_0^c} (f_i)_A \mathbf{Z}^A, \qquad (f_i)_A \in K[[\mathbf{W}]].$$

En esta situación, sean

$$\text{i)}\quad b = \prod_{i=1}^{m} (\nu_i!) \qquad \text{donde} \qquad \nu_i = \nu_0(f_i).$$

$$\text{ii)}\quad \mathcal{J} = ((f_i)_A^{b/(\nu_i - |A|)})_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ A \in \mathbf{Z}_0^c \\ 0 \leqq |A| \leqq \nu_i - 1}}\, \theta_W.$$

Probaremos que $\mathcal{J}$, b verifican las condiciones del teorema. Sabemos que para toda función de prueba h de W se verifica

$$\delta(X_h, \mathbb{D}_h) = \min_{1 \leqq i \leqq m} \{\delta(H_h^{(i)}, \mathbb{D}_h)\}.$$

Así, si construimos para todo i, $1 \leqslant i \leqslant m$, el polígono de Newton para $H_h^{(i)}$, poniendo los exponentes de la t en el eje horizontal y los exponentes totales de las $\mathbf{z}$ en el eje vertical, tendremos que el primer segmento del polígono estará situado en la línea de mínima pendiente que una (o, ν_i) con un punto de la forma $(\nu_0((f_i)_A), |A|)$. Tendremos

$$\frac{1}{\delta(H_h^{(i)}, \mathbb{D}_h)} = \min_{0 \leq |A| \leq \nu_i - 1} \left\{ \frac{\nu_i - |A|}{\nu_0((f_i)_A)} \right\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

y entonces

$$\delta(H_h^{(i)}, \mathbb{D}_h) = \min_{\substack{0 \leq |A| \leq \nu_i - 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \left\{ \frac{1}{\nu_i - |A|} \nu_0((f_i)_A) \right\}$$

Finalmente se tendrá

$$\frac{1}{\nu_i - |A|} \nu_0((f_i)_A) = (1 / b) \, \nu_0 \left[((f_i)_A)^{b / (\nu_i - |A|)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 0 \leq |A| \leq \nu_i - 1}}$$

q. e. d.

2.2. Ejemplos de exponentes idealísticos:

1) Sea X la hipersuperficie algebroide sumergida en K^3 de ecuación

$$Z^5 + W_1 W_2^2 Z^3 + W_1^6 Z + W_2^7 = 0.$$

El exponente idealístico de X será

$$(\mathcal{I}, b) = ((W_1 W_2^2)^{5 \times 2}, (W_1^6)^5, (W_2^7)^4, 5 \times 4).$$

2) Sea X la variedad algebroide sumergida en K^3,

$$X = H_1 \cap H_2 \cap H_3,$$

donde H_1, H_2, H_3 son las hipersuperficies de ecuaciones

$$H_1 \equiv W_1 W_2 - Z^3 = 0, \; H_2 \equiv W_1 W_3 - Z^3 = 0, \; H_3 \equiv W_3 Z^3 + W_2 Z^3 = 0.$$

El exponente idealístico de X será

$$(\mathcal{I}, b) = ((W_1 W_2), (W_1 W_3), (W_3)^2, (W_2)^2, 2).$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] AROCA, J. M.; HIRONAKA, H.; VICENTE, J. L.: *The theory of the maximal contact.* Memorias de Matemática del Instituto «Jorge Juan», C. S. I. C. Madrid, 1975.

[2] LEJEUNE-JALABERT, M.; TEISSIER, B.: *Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités.* Ecole Polytechnique. París, 1972.

[3] ROMO, C.: *Resolución de singularidades de variedades algebroides sobre un cuerpo de característica cualquiera.* «Monografías y Memorias de Matemática», X. Instituto «Jorge Juan», C. S. I. C. Madrid, 1976.

[4] ROMO, C.: *Número de transformaciones cuadráticas formales necesarias para que descienda la multiplicidad de una hipersuperficie algebroide definida sobre un cuerpo de característica cualquiera.* «Actas de la XII Reunión Anual de Matemáticos Españoles». Málaga, 1976.

[5] ROMO, C.: *Una caracterización del contacto maximal en hipersuperficies algebroides.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, tomo XXXVI, núms. 5-6. Madrid, 1976.

[6] ROMO, C.: *Contacto maximal en característica positiva.* «Actas de las IV Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas». Jaca, 1977.

[7] ROMO, C.: *Resolución de singularidades de variedades algebroides mediante transformaciones cuadráticas.* «Actas de la IV Reunión de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina». Mallorca, 1977.

[8] ROMO, C.: *El teorema del camino mínimo en características* p. «Actas de las V Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas». Aveiro (Portugal), 1978.

Departamento de Algebra y Fundamentos
Universidad de La Laguna