



W
28
(9017)

Documento de Trabajo

9 0 1 7

TELAS DE ARAÑA



Manuel Morán Labré

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES.- UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
Campus de Somosaguas. 28023 - MADRID

Esta publicación de Documentos de Trabajo pretende ser cauce de expresión y comunicación de los resultados de los proyectos de investigación que se llevan a cabo en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid. No obstante, la publicación está abierta a investigadores de otras instituciones que deseen difundir sus trabajos en ella.

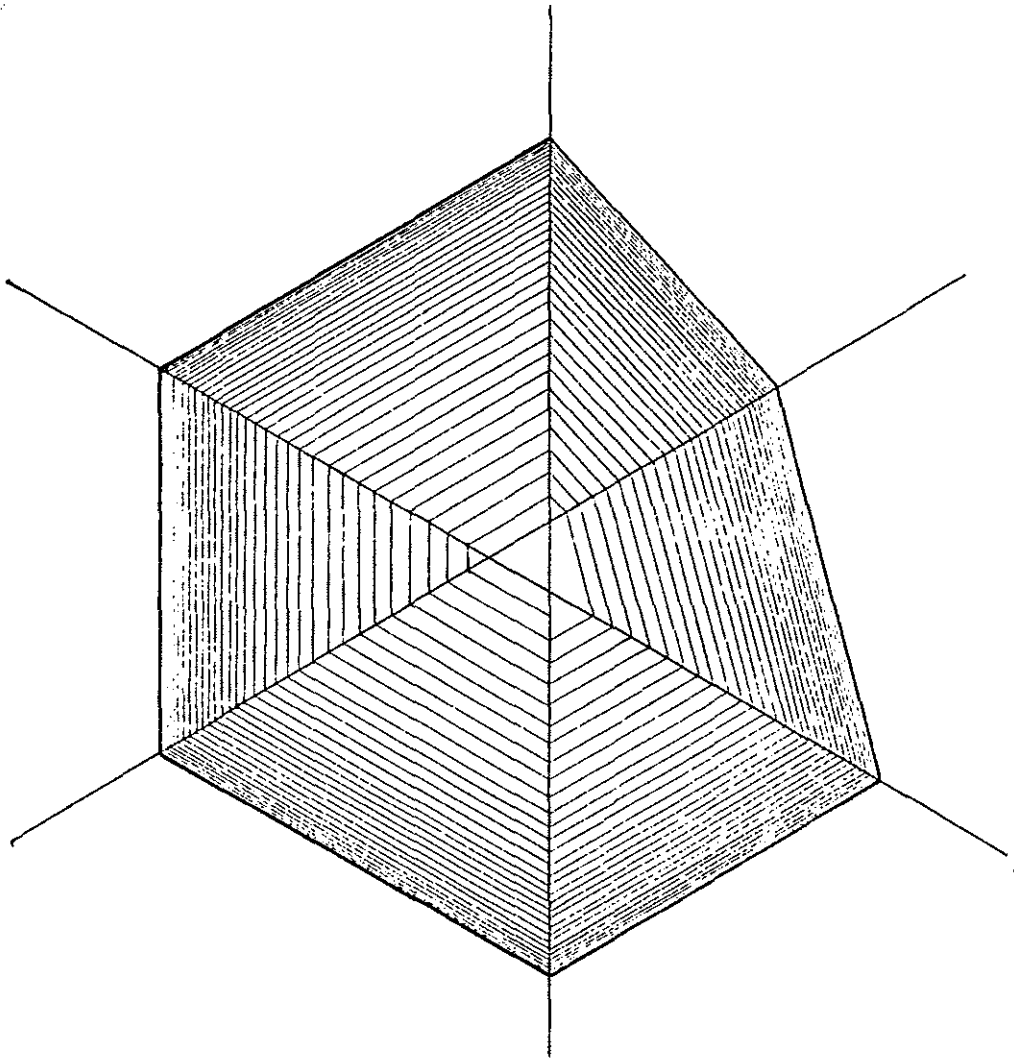
Los Documentos de Trabajo se distribuyen gratuitamente a las Universidades e Instituciones de Investigación que lo solicitan. Asimismo, las peticiones personales pueden ser atendidas en la medida en que se disponga de ejemplares en existencia.

Se ruega a las personas e instituciones interesadas en solicitar ejemplares que utilicen el boletín de pedido que figura seguidamente.

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Boletín de Pedido.
Nombre de la persona o institución:
.....
Calle: nº
Ciudad:Distrito Postal:.....País:
Solicita una suscripción permantente <input type="checkbox"/>
(sólo Universidades e Instituciones de Investigación) <input type="checkbox"/>
Solicita los Documentos de Trabajo cuyos números se relacionan a continuación: _____

Enviar a:
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Vicedecano
Campus de Somosaguas. 28023 MADRID. ESPAÑA.



TELAS DE ARAÑA

Datos personales.

Manuel Morán Cabré. Doctor en Matemáticas por la U.C.M.
Profesor del departamento de Análisis Económico de la Facultad de
Económicas de la U.C.M.

RESUMEN.

Se estudia la dinámica generada en un sistema de rectas por proyecciones mútuas consecutivas, dinámica que determina órbitas en "telas de araña". Se clasifican los casos posibles y se demuestra un teorema genérico de existencia de punto fijo, que tiene aplicaciones para probar teoremas de geometría clásica. Este artículo fue concluido en febrero de 1986.

1.- DESCRIPCION Y DEFINICIONES

Sean $R = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$ y $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ colecciones ordenadas de rectas de un plano. Consideramos además las aplicaciones $p_i: r_i \longrightarrow r_{i+1}$ que aplican los puntos de la recta r_i sobre los de la recta r_{i+1} proyectándolos según la dirección de la recta s_i (paralelamente a s_i) como indica la fig. 1 .

Tales aplicaciones estarán bien definidas siempre que las rectas r_i, r_{i+1} no sean paralelas a s_i . El conjunto de subíndices de las r_i lo vamos a considerar Z_n (enteros módulo n), de forma que --- $n = 0$ y $n+1 = 1$, etc. Por tanto : $p_n: r_n \longrightarrow r_1$

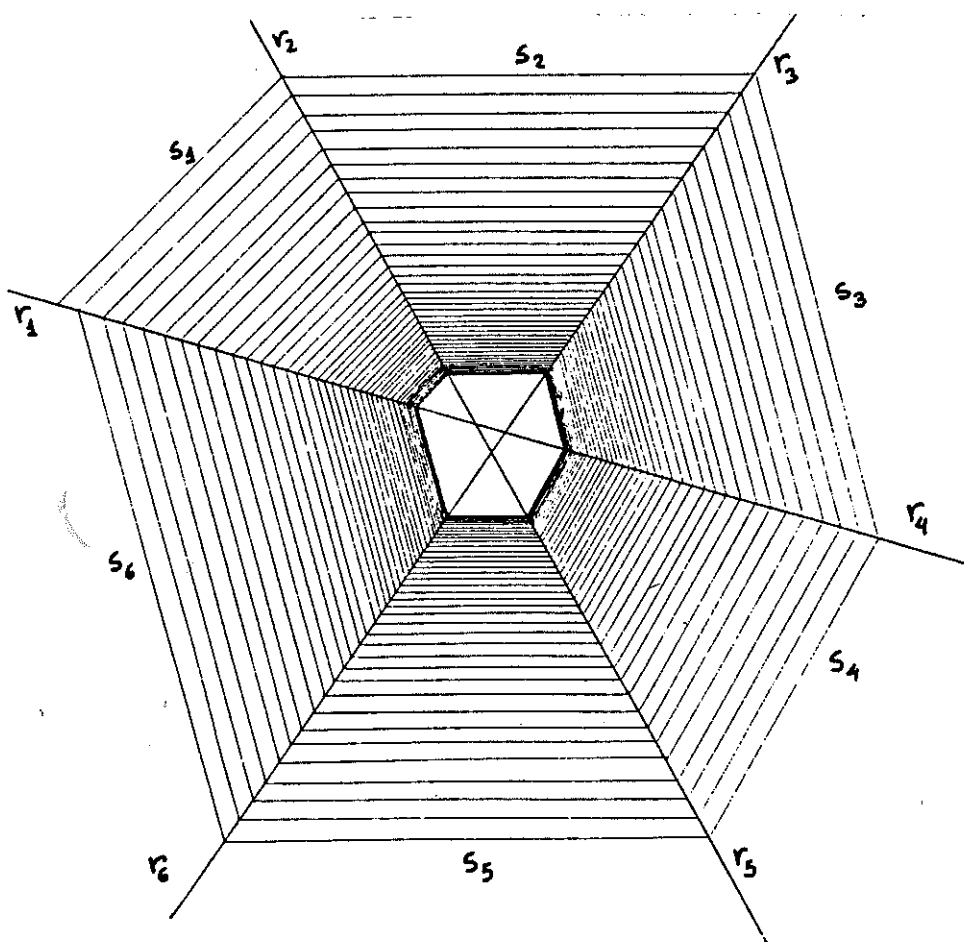


figura 1

Las rectas de la colección R y las de S pueden estar repetidas, como en la fig. 1 donde $r_1 = r_4, r_2 = r_5, r_3 = r_6, s_2 = s_5, s_3 = s_6$ pero $s_1 \neq s_4$ y ello impide reducir las colecciones a r_1, r_2, r_3 y a s_1, s_2, s_3 .

Cabe incluso considerar dos rectas consecutivas repetidas, en cuyo caso la correspondiente p_i sería la identidad.

Las p_i de índices consecutivos pueden componerse entre sí, de forma que, por ejemplo $p_{1,2} : r_1 \xrightarrow{p_1} r_2 \xrightarrow{p_2} r_3$ y en general se define $p_{k,k+1} = p_{k+1} \circ p_k$; $p_{k,k+i} = p_{k+i} \circ p_{k+i-1} \dots \circ p_k$. Particularmente, cuando $i = n-1$ tendremos:

$$p_k^1 = p_{k,k+n-1} = p_{k+n-1} \circ p_{k+n-2} \dots \circ p_k$$

Estas aplicaciones tienen r_k por dominio e imagen. Son biyecciones de r_k . Por tanto pueden componerse consigo mismas dando lugar a las p_k^2, p_k^3, p_k^m donde los superíndices pueden ser números enteros tan grandes como se quiera. Un interés particular van a tener las imágenes de un punto x_0 de r_k por las p_k^j y mas en general por las $p_{k,k+i}^j$. Al unir por rectas las imágenes de estas últimas para valores consecutivos de i , se obtiene un diseño en forma de tela de araña, como se observa en la figura 1. Por eso:

Definimos tela de araña de rectas soporte R y rectas de dirección S a la terna $T = (R, S, P)$ formada por dos colecciones del mismo número de rectas y las correspondientes proyecciones P mas arriba descritas $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

También puede definirse a partir de T la tela de araña inversa, T^{-1} , formada con las mismas colecciones de rectas soporte y de dirección tomadas en orden inverso, y una colección de aplicaciones que resultan las inversas de las de T :

$$\begin{aligned} T^{-1} &= (R^{-1}, S^{-1}, P^{-1}) \text{ con:} \\ R^{-1} &= \{r'_1, r'_2, \dots, r'_n\} = \{r_n, r_{n-1}, \dots, r_1\} \\ S^{-1} &= \{s'_1, s'_2, \dots, s'_n\} = \{s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_n\} \\ P^{-1} &= \{p'_1, p'_2, \dots, p'_n\} = \{p_{n-1}^{-1}, p_{n-2}^{-1}, \dots, p_n^{-1}\} \end{aligned}$$

Siendo con este convenio las relaciones entre los índices:

$$r'_i = r_{n-i+1}, \quad s'_i = s_{n-i}, \quad p'_i = p_{n-i}^{-1}$$

2.- PROPIEDADES

Cada una de las $p_k: r_k \longrightarrow r_{k+1}$ tienen la siguiente propiedad:

P-1 Si por $d(x,y)$ entendemos la distancia de dos puntos arbitrarios x,y , de r_k , y por $d(x', y')$ la distancia de las imágenes de x e y por p_k en r_{k+1} , se verifica:

$$d(x',y') = m_k d(x,y)$$

Donde m_k es un número real y positivo independiente de x e y , que llamaremos módulo de proyección de p_k : $|p_k| = m_k$

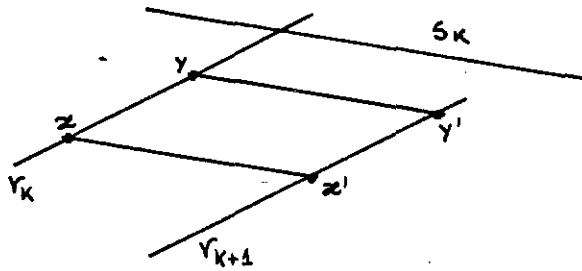


figura 2

En la fig. 2 se muestra el caso en que r_k y r_{k+1} son paralelas.

Se tiene: $d(x',y') = d(x,y)$ y $m_k = 1$

En la fig. 3 se muestra el caso en que las rectas r_k y r_{k+1} se cortan en un punto O

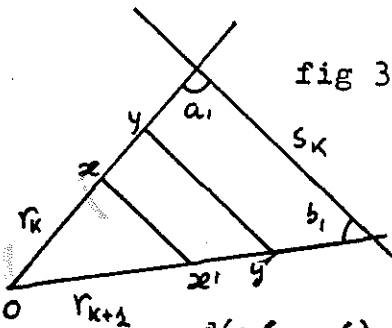


fig 3

$$\left. \begin{aligned} \frac{Ox}{\text{sen } b} &= \frac{Ox'}{\text{sen } a} \\ m_k &= \frac{\text{sen } a}{\text{sen } b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} Ox' = m_k \cdot Ox & \text{Igualmente} \\ Oy' = m_k \cdot Oy \end{cases}$$

Restando ambas igualdades se obtiene:

$$d(x', y') = |Ox' - Oy'| = m_k |Ox - Oy| = m_k d(x,y)$$

La expresión para el módulo de proyección $m_k = \frac{\text{sen } a}{\text{sen } b}$ será utilizada mas adelante.

Por aplicación consecutiva de esta propiedad se tiene

$$(1) \quad d(p_{k,k+j}(x), p_{k,k+j}(y)) = m_k \cdot m_{k+1} \cdot m_{k+2} \cdot \dots \cdot m_{k+j-1} \cdot d(x,y)$$

Y a estos productos los llamaremos módulos de proyección de las --

$|p_{k,k+j}|$. En particular cuando $j = n$ en el segundo miembro de (1) -

intervienen todos los m_k , y el producto será independiente de k

Este producto es el módulo de proyección de todas las p_k^1 y se llama

simplemente módulo de proyección de T : $|T| = m = \prod_{i \in Z_n} m_i$

P-2 Si $|T| = m \neq 1$, entonces cada r_k tiene uno y un solo punto fijo para la aplicación $p_k^1 : r_k \longrightarrow r_k$.

Supongamos primero que $m < 1$. Entonces la aplicación p_k^1 verifica:

$d(x', y') = m \cdot d(x, y)$, y como $m < 1$, se trata de una aplicación contractiva, que según el conocido teorema del punto fijo, -- válido para aplicaciones contractivas en espacios métricos, tendrá un único punto fijo tal que $p_k^1(a_k) = a_k$. Además, el punto fijo a_k , se puede obtener como límite de las sucesivas imágenes de un punto arbitrario de r_k por las aplicaciones $p_k^1, p_k^2, \dots, p_k^j$, como resulta ilustrado en la fig. 4 para los puntos p y q de r_2 .

Si fuera $m > 1$, entonces considerariamos la tela de araña inversa, -- T^{-1} , cuyas aplicaciones son las p_k^{-1} . Según las notaciones de la -- fig 3, $|p_k^{-1}| = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a} = \frac{1}{m_k}$ y por lo tanto $|T^{-1}| = \frac{1}{m} < 1$. Basta ahora aplicar el anterior razonamiento a T^{-1} para obtener la -- existencia y unicidad de puntos fijos en r_k para las p_k^{-1} que como sabemos son inversas de las p_k^1 . Pero los puntos fijos de una aplicación biyectiva y su inversa son los mismos, con lo que se prueba nuestra afirmación.

Tenemos además, si a_k es el punto fijo de r_k :

$$\begin{aligned} p_{k+1}^1(p_k(a_k)) &= p_k \circ p_{k-1} \circ p_{k-2} \dots \circ p_k(a_k) = p_k(p_k^1(a_k)) = \\ &= p_k(a_k). \end{aligned}$$

Luego $p_k(a_k)$ resulta ser el punto fijo a_{k+1} para p_{k+1}^1 y reiterando el razonamiento el punto fijo de r_{k+i} , a_{k+i} , se obtiene como imagen de a_k por la aplicación $p_{k,k+i}$. Todos los a_{k+i} forman los vértices de un polígono inscrito en las rectas soporte de la red -- y con los lados paralelos a las rectas de dirección, que, en virtud de la unicidad, es el único polígono que cumple estas dos condiciones. En la figura 4 se tiene un ejemplo de todo esto. La tela cuyas rectas de dirección son $\{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}_6}$ y las rectas soporte, $\{r_i\}_{i \in \mathbb{Z}_6}$ con $r_1 = r_4$ y $r_2 = r_5$. Dos puntos arbitrarios p y q de r_2 convergen al punto fijo a_2 . El exágono formado por los puntos fijos $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}_6}$ es el único inscrito en las rectas de R y con lados paralelos a las de S (se entiende que el lado que tiene vértices en r_k y r_{k+1} debe ser paralelo precisamente a s_k . De otra forma habría mas soluciones.)

Es interesante observar como la tela de araña inversa, que tiene -
módulo mayor que uno, hace diverger las trayectorias de todos sus
puntos.

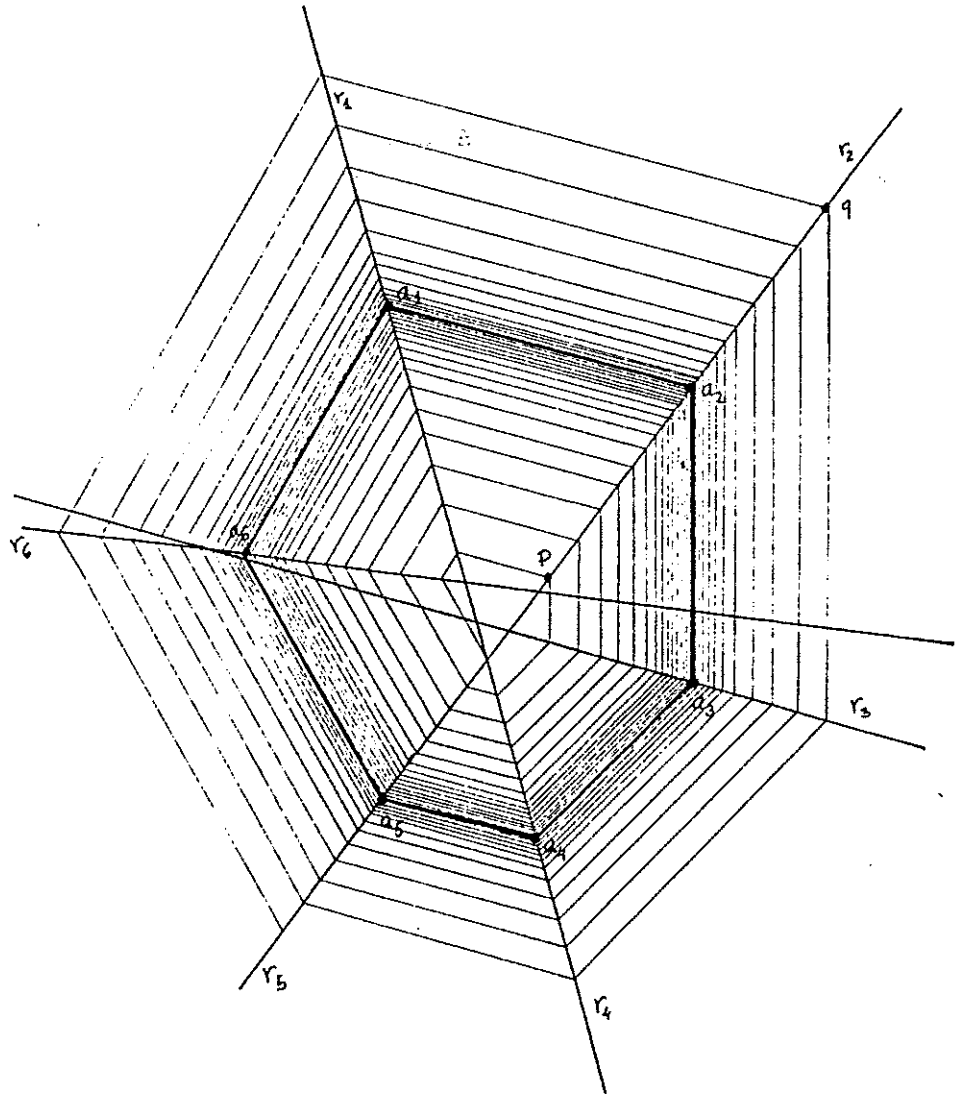


fig 4

P-3 . Si es $T = (R, S, P)$ con $|T| = 1$ la llamaremos regular. Ahora las p_k^1 son isometrías de r_k y pueden producirse en r_k los siguientes casos

a) p_k^1 es una traslación. No hay ningún punto fijo.

b) Si p_k^1 es la identidad, todos los puntos de r_k son -- fijos.

c) Si p_k^1 es una simetría entonces el único punto fijo -- a_k es el centro de simetría y p_k^2 es la identidad con todos los -- puntos fijos.

Además como la imagen de los a_k fijos por las $p_{k, k+i}$ son puntos fijos según el razonamiento hecho en P-2, lo que sucede en r_k sucede en las demás rectas soporte ya que los tres casos se pueden identificar solamente por el número de puntos fijos : Ninguno, todos o -- uno respectivamente . En las figuras 5, 6 y 7 se ilustran los casos a) b) y c).

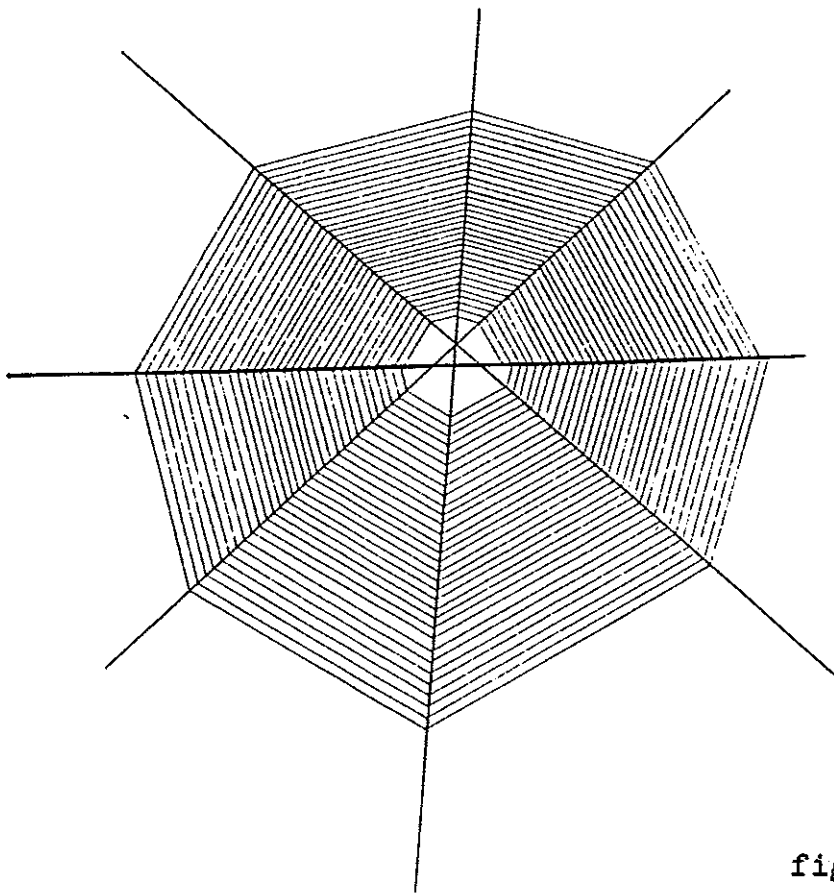


figura 5

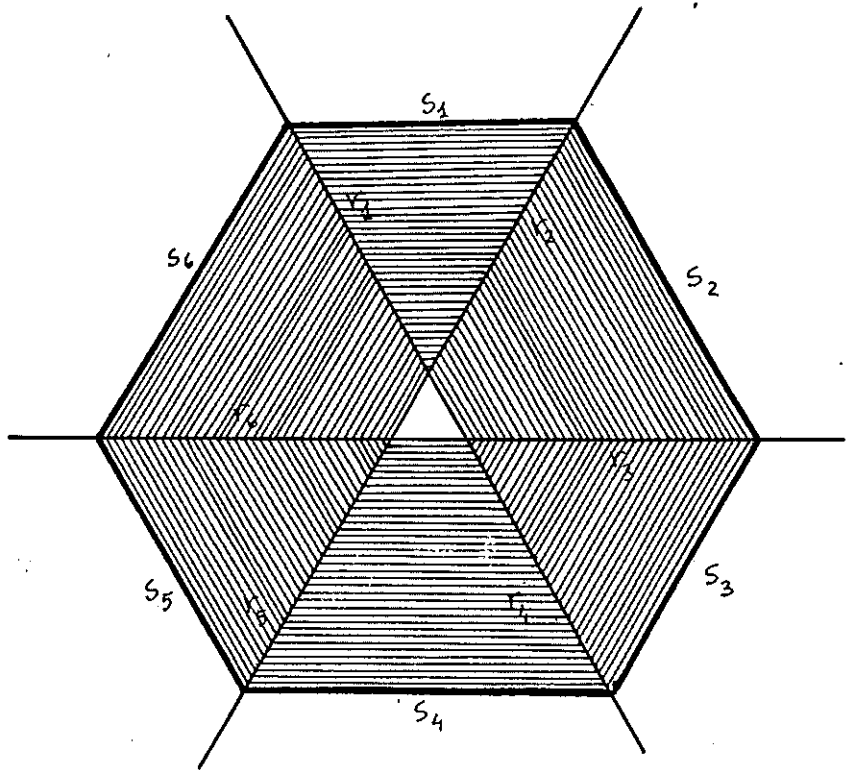


Figura 6

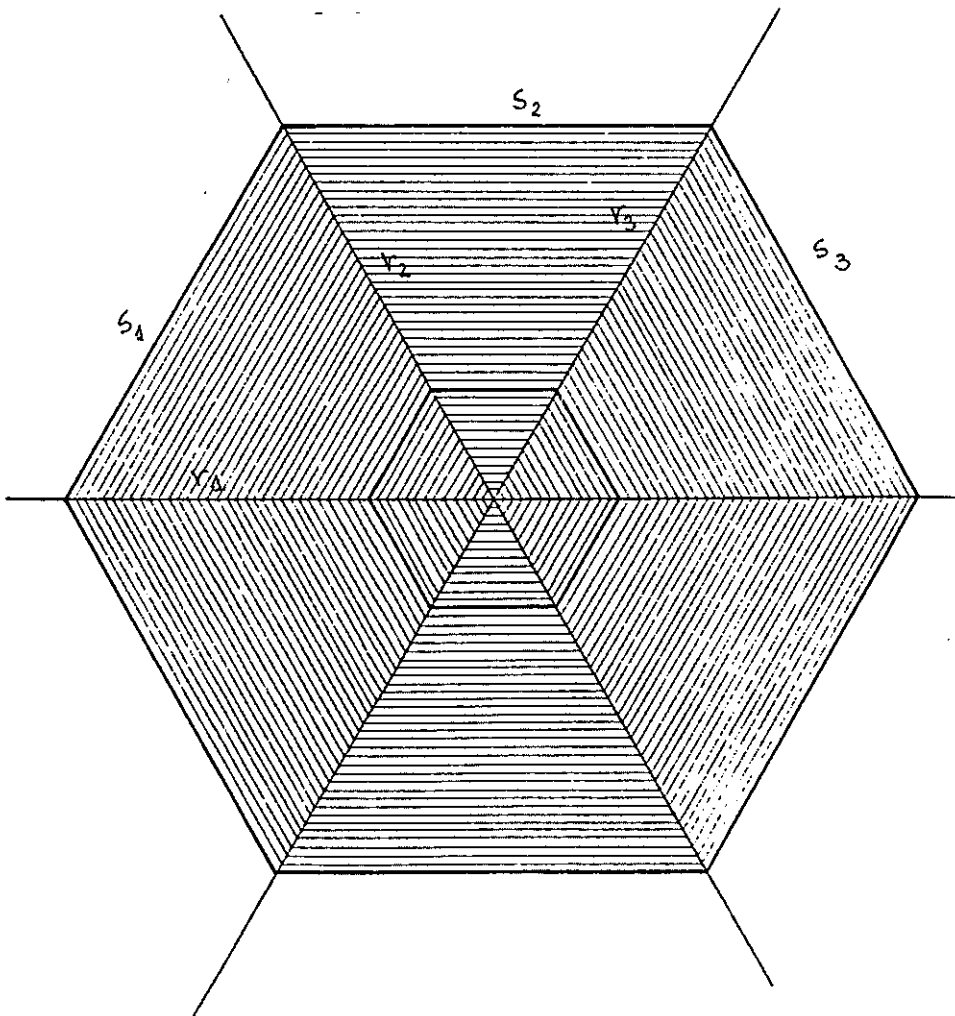


Figura 7

De esta manera quedan clasificadas las diversas telas de araña. Un caso interesante se produce cuando las rectas soporte convergen en un mismo punto O. En dicho caso O será obviamente un punto fijo y si el módulo de la tela es distinto de 1, será el único punto fijo, y el único polígono degenerado en un solo punto, inscrito en las rectas soporte y de lados paralelos a las de dirección. (fig 8) Si el módulo fuera 1, descartado el caso a), quedarían los b) y c). La misma fig 7 ilustra estos casos según se consideren las seis rectas soportes r_i con $r_{i+3} = r_i$ y las correspondientes rectas de dirección (caso b), o solo tres rectas soportes y tres de dirección (caso c).

Supongamos ahora un polígono de $2n$ lados. Asociada a él hay una tela de araña cuyas rectas soporte son las diagonales que unen vértices opuestos (a_k con a_{k+n}) y cuyas rectas de dirección son los lados del polígono, siempre que ningún lado coincida con ninguna diagonal (basta que no haya tres vértices alineados). Como los vértices del polígono son evidentemente puntos fijos, si el módulo de la tela de araña asociada es distinto de 1, no puede haber más puntos fijos y por tanto las diagonales soporte no pueden concurrir en un solo punto. Se puede afirmar por tanto que:

P-4 Una condición necesaria para que las diagonales de un polígono de $2n$ lados concurren en un punto es que el módulo de la tela de araña asociada se igual a uno. Reiterando el razonamiento hecho en la demostración de P-1 y con las notaciones de fig 9, el módulo de la tela asociada a un polígono puede evaluarse mediante la expresión

$$(2) \quad m = \frac{\text{sen } a_1}{\text{sen } b_1} \cdot \frac{\text{sen } a_2}{\text{sen } b_2} \cdot \frac{\text{sen } a_3}{\text{sen } b_3} \cdot \dots \cdot \frac{\text{sen } a_n}{\text{sen } b_n}$$

Casos particulares interesantes se producen

a) Cuando $b_i = a_i$, y entonces por (2) resulta $m = 1$

b) $b_i = a_{i+1}$ y $a_i = b_{i+1}$ para $i = 2k$. Este caso es el que se presenta precisamente en el teorema de Morley (ver aplicaciones punto b), y en él también es por (2) $m = 1$

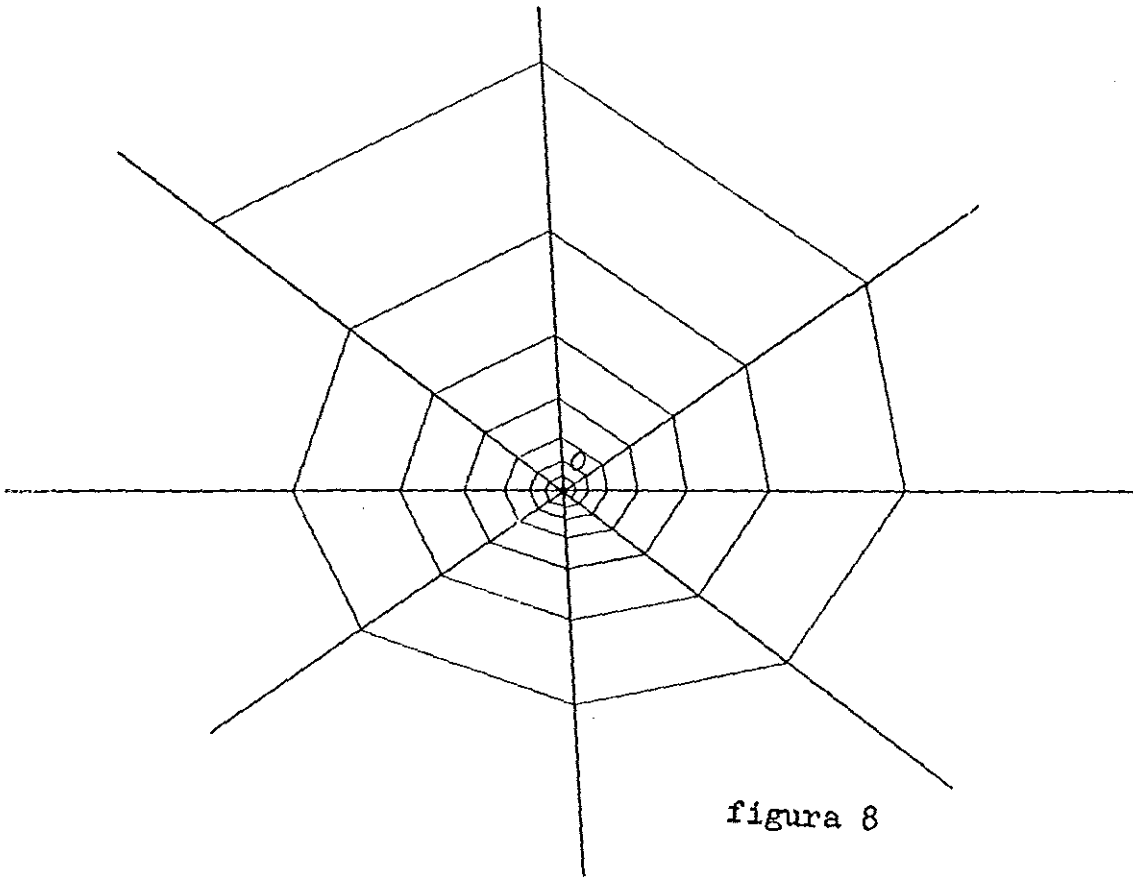


figura 8

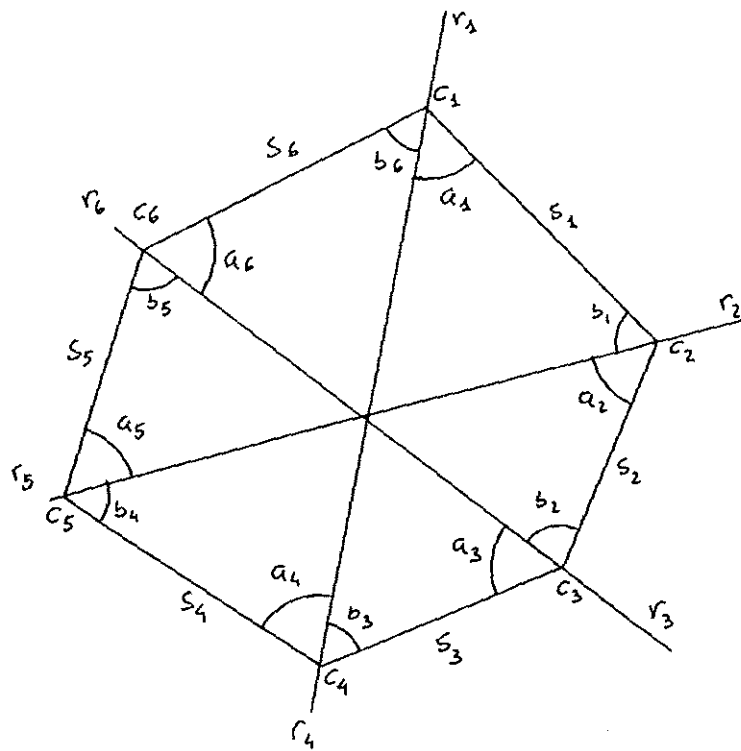


figura 9

3.- APLICACIONES

Vamos a ver dos casos de aplicación

a) Una demostración del teorema de Ceva

Sea un triángulo cualquiera y tres rectas que pasan por sus vértices. Consideremos la tela de araña cuyas rectas soporte son estas últimas y cuyas rectas de dirección son los lados del triángulo. -- Con arreglo a la notación de la fig 10 y teniendo en cuenta (2) -- de P-4, $m = \frac{\text{sen } a_1}{\text{sen } b_1} \frac{\text{sen } a_2}{\text{sen } b_2} \frac{\text{sen } a_3}{\text{sen } b_3}$. Por tanto, si -- las rectas soportes convergen en un punto, este y los vértices -- del triángulo son dos puntos fijos en cada recta soporte y la tela es regular con lo que $m = 1$, que es precisamente la forma trigonométrica del teorema de Ceva.

Teniendo en cuenta que $\text{sen } a_i = \text{sen } a'_{i+1} \cdot \frac{p_{i+1} q_{i+1}}{q_i q_{i+1}} \quad i \in Z_3$

$$\text{sen } b_i = \text{sen } b'_{i+2} \cdot \frac{p_{i+2} q_i}{q_i q_{i+1}} \quad i \in Z_3$$

Sustituyendo y simplificando queda el teorema de Ceva :

$$(3) \quad -1 = \frac{p_1 q_1 p_2 q_2 p_3 q_3}{p_1 q_2 p_2 q_3 p_3 q_1} \quad \text{donde el signo de } m \text{ se justifica}$$

porque al dotar de orientación a los segmentos, los tres del numerador la tienen contraria a los del denominador.

Inversamente, si (3) se verifica, entonces las rectas deben concurrir, porque si tomamos las rectas r_1 y r_2 y su punto de corte, y trazamos la recta r'_3 que lo une con q_2 esta cortará al lado s_3 en un punto p'_3 que necesariamente hace la expresión (3) igual a -1 lo que significa que divide al segmento con la misma razón simple que p_3 y ambos deben coincidir, como r'_3 con r_3 . En el caso del triángulo $m=1$ es por tanto condición necesaria y suficiente para la concurrencia de las rectas soporte.

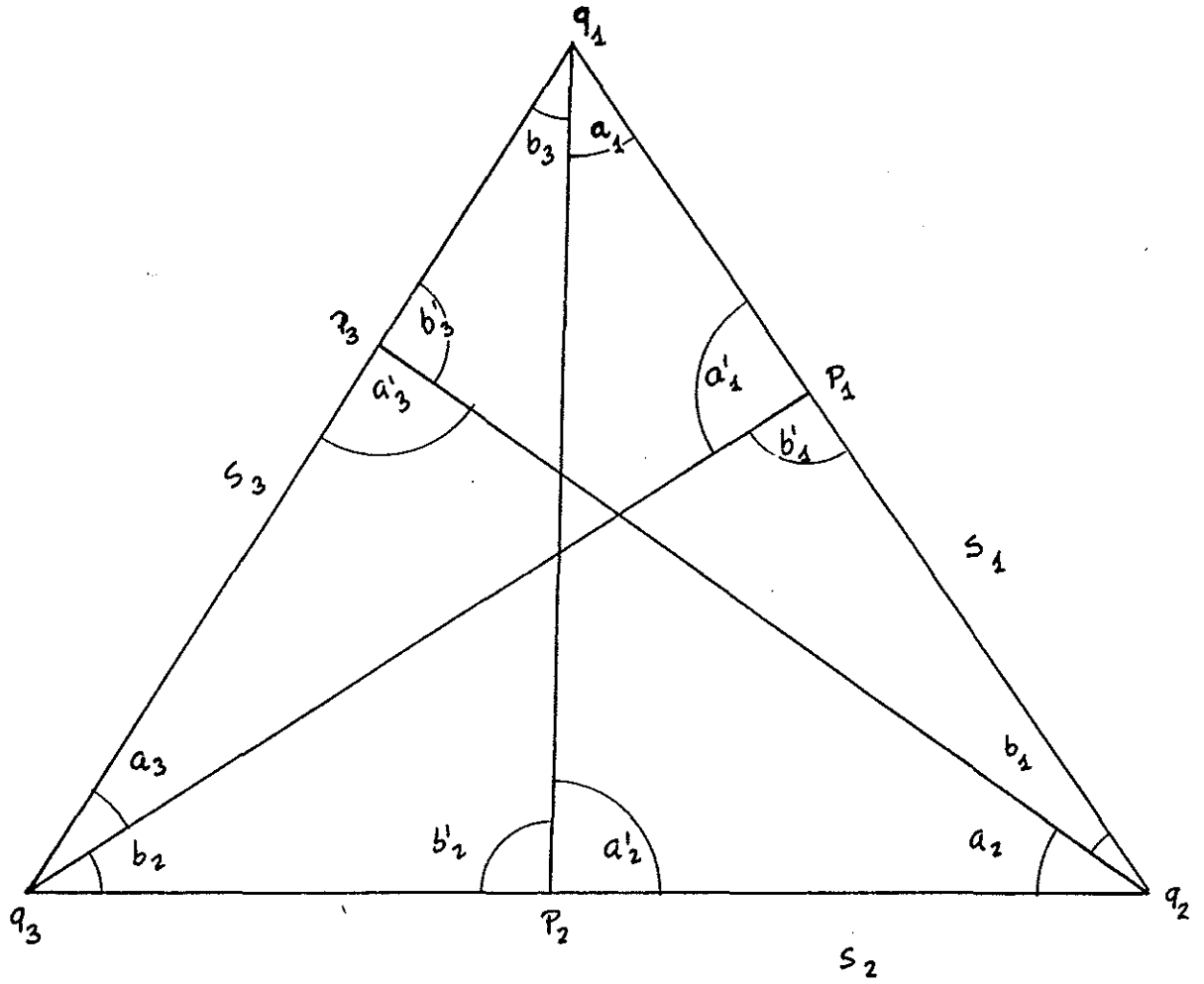


Figura 10

b) Demostración del Teorema de Morley para triángulos acutángulos.

El teorema de Morley establece que las trisectrices de cualquier triángulo se cortan en los vértices de un triángulo equilátero si consideramos las intersecciones de los pares de trisectrices más próximas a cada lado. En la figura 11 los vértices serían $\triangle c_2, c_4, c_6$

Para demostrarlo trazamos las rectas t_1, t_2, t_3 , bisectrices de los ángulos $\widehat{Ac_1B}, \widehat{Cc_5B}, \widehat{Bc_3C}$ respectivamente. Se obtiene así:

$$(4) \quad \begin{aligned} a_3 = b_2 = 30 + \alpha/3; \quad a_2 = b_3 = 90 - \alpha/3; \quad a_5 = b_4 = 30 + \beta/3 \\ a_4 = b_5 = 90 - \beta/3; \quad a_1 = b_6 = 30 + \gamma/3; \quad a_6 = b_1 = 90 - \gamma/3 \\ \widehat{t_1 t_2} = \widehat{t_2 t_3} = \widehat{t_3 t_1} = 60^\circ \end{aligned}$$

Además como hemos supuesto el triángulo AEC acutángulo se tiene:

$$(5) \quad \alpha/3, \beta/3, \gamma/3 < 30^\circ$$

$$a_2, a_4, a_6 > 60$$

Debemos demostrar que t_1, t_2, t_3 concurren en un mismo punto q.

Si así fuera, bastará probar que $qc_2 = qc_4 = qc_6$, pues teniendo en cuenta que los ángulos que forman las t_i son de 60° , q sería el baricentro de un triángulo equilátero $\triangle c_2, c_4, c_6$. Pero si las t_i concurren en q, los triángulos $\triangle c_2 c_3 q_3$ y $\triangle c_3 c_4 q_2$, semejantes por tener los ángulos iguales, al ser $c_3 q_2 = c_3 q_3 = c_3 q$, pasarían a ser triángulos iguales, y de esto se deduce $qc_2 = qc_4$. De la misma forma se podría inferir de la concurrencia de las t_i en q que $qc_2 = qc_6$ y de aquí el teorema.

Probaremos que las t_i concurren en q. Suponiendo que no fuera así, estas rectas se cortan, bien de manera que q_1 (intersección de t_1 y t_2) esté en el mismo semiplano respecto de t_3 que c_1 y c_2 , como en la figura 12, bien estando q_1 en distinto semiplano como en fig 13

Consideremos ahora la tela de araña asociada al exágono $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$ que por (4) está en el caso b) descrito en P-4 y por tanto tiene módulo 1 y c_1 es punto fijo en t_1 . Teniendo en cuenta que los ángulos del triángulo $\triangle q_1 q_2 q_3$ son de 60° y (5) resulta como se muestra en las figuras 12 y 13 $p_1^1(q_1) = q_1' \neq q_1$. Así (ver P-3) p_1^1 no pertenece a los casos a) ni b). Tampoco puede ser una simetría por estar q_1 y q_1' del mismo lado de c_1 . De esta contradicción se deduce el teorema.

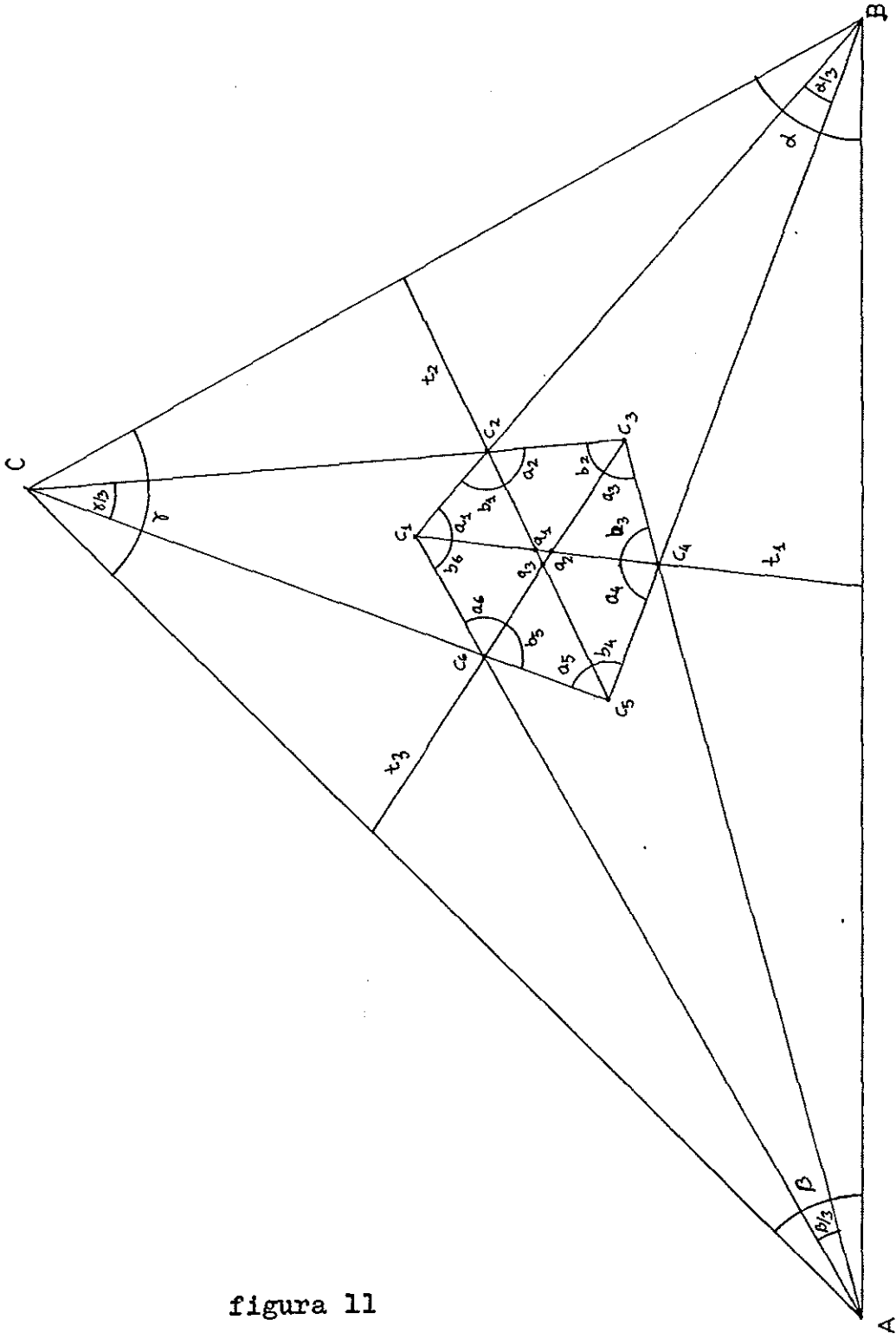


figura 11

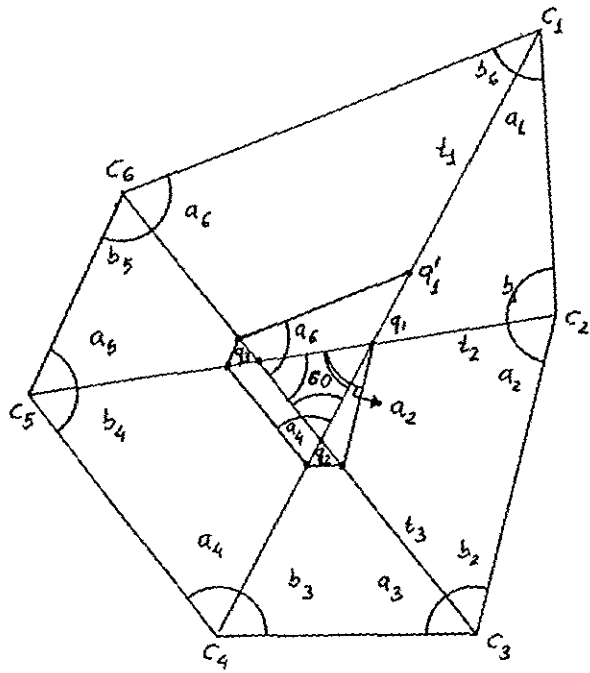


figura 12

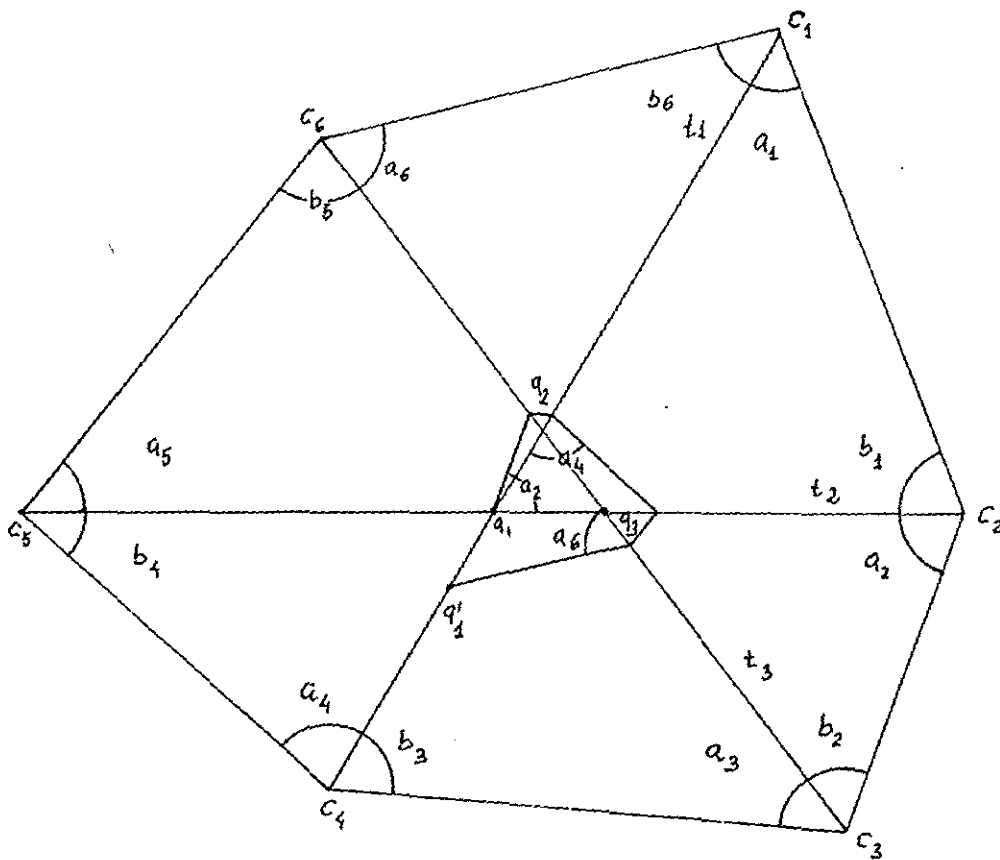


figura 13