DOCUMENTO DE TRABAJO

9205

ALGUNOS ASPECTOS SOBRE EL ANALISIS EMPIRICO DE "CREDIT SCORING"

Mercedes Gracia-Díez

Gregorio R. Serrano

(versión revisada)

ALGUNOS ASPECTOS SOBRE EL ANALISIS EMPIRICO DE "CREDIT SCORING"

Mercedes Gracia-Díez*
Gregorio R. Serrano*

Departamento de Economía Cuantitativa
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Complutense
Campus de Somosaguas
28023 Madrid
Telf. 394-2370

* Las cuestiones que planteamos en este trabajo han surgido a partir de un análisis de "credit scoring" realizado con datos de una entidad financiera española. No se incluyen los resultados empíricos obtenidos por razones de confidencialidad. Por tanto, el objetivo del artículo es presentar un tratamiento general y metodológico de este problema.

Queremos agradecer a Rafael Flores, Alberto Mauricio, dos evaluadores anónimos y, muy especialmente, a Miguel Jerez y Alfonso Novales sus comentarios y sugerencias. Todos los errores son nuestros.

ALGUNOS ASPECTOS SOBRE EL ANALISIS EMPIRICO DE "CREDIT SCORING"

RESUMEN

Un problema frecuente en análisis empíricos de "credit scoring" es que las muestras existentes no son aleatorias, sino que resultan de un mecanismo de selección. Para corregir el sesgo derivado de la selección muestral y obtener consistencia se necesita, en principio, utilizar una muestra censurada (formada por créditos concedidos y denegados) y estimar un modelo bivariante con observabilidad parcial. En este artículo se trata este problema y, además, su principal aportación es presentar un procedimiento para obtener consistencia en el caso más restrictivo, pero habitual en la práctica, en que la muestra disponible está truncada (formada solamente por créditos concedidos).

Palabras clave: estimación de probabilidades de morosidad, sesgos derivados de la selección muestral, estimación consistente con muestras censuradas y truncadas.

1. Introducción.

El problema de "credit scoring", esto es, la toma de decisiones óptimas por parte de las entidades financieras para la concesión de créditos a individuos o instituciones privadas, ha sido objeto de estudio en la literatura durante los últimos años [ver Altman et al. (1981) y Srinivasan y Kim (1987) que presentan un tratamiento general del problema y resumen otros trabajos]. Este es, además, un tema de interés práctico en nuestro país, donde las pérdidas por morosidad que sufren las entidades financieras están aumentando considerablemente en la actualidad[1].

El planteamiento de un análisis de "credit scoring" puede resumirse de la siguiente forma: el objetivo de la entidad financiera (EF) es maximizar el beneficio derivado de la concesión de un volumen de crédito, y el problema se reduce a decidir si se concede o no se concede cada crédito individual sobre la base de su rendimiento esperado. Para optimizar esta decisión, la EF debe conocer la probabilidad que tiene cada solicitante de presentar problemas de morosidad. Por lo tanto, los trabajos empíricos se centran en estimar estas probabilidades a partir de las características personales del individuo y del crédito que solicita, utilizando como información inicial el comportamiento de otros individuos que han recibido un crédito previamente en condiciones similares.

En este trabajo, tratamos algunos aspectos relevantes que deben tenerse en cuenta a la hora de estimar las probabilidades de morosidad. Un problema importante procede de la naturaleza de las muestras disponibles, debido a que la EF no concede todos los créditos solicitados, sino que sólo los individuos que cumplen un criterio de selección determinado, obtienen el crédito. Por lo tanto, una muestra de créditos concedidos es una muestra truncada, hecho que no debe ignorarse a la hora de estimar consistentemente las probabilidades poblacionales de morosidad.

Para obtener estimaciones óptimas de las probabilidades de morosidad se necesita, en principio, disponer de una muestra censurada, que contenga información tanto de los individuos que han recibido el crédito como de los que no lo han recibido, aunque naturalmente para estos últimos no se observa su comportamiento en cuanto a la devolución del mismo. De esta forma, se consideran dos ecuaciones, la de concesión de créditos y la de morosidad, y la estimación se lleva a cabo a partir de un modelo bivariante con observabilidad parcial. Este caso se trata en Boyes et al. (1989).

Sin embargo, las EF habitualmente no conservan la información sobre los créditos no concedidos, por lo que el procedimiento anterior no es aplicable[2]. En este trabajo, damos una solución al problema en estas circunstancias. En concreto, proponemos dos estrategias distintas. La primera de ellas consiste en estimar el modelo bivariante incorporando el hecho de que la muestra está truncada. Por este procedimiento, las probabilidades de morosidad se estiman consistentemente, aunque lógicamente son menos eficientes que las que se obtienen con una muestra censurada. La segunda estrategia es un procedimiento más sencillo, que se basa en la estimación de un modelo de elección discreta univariante. Este procedimiento no permite obtener una estimación de las probabilidades de morosidad, sino que su finalidad es mejorar o actualizar el criterio de selección de la EF que, en definitiva, es el objetivo más inmediato a nivel práctico.

La organización del trabajo es la siguiente. En la Sección 2 se resumen los fundamentos teóricos de los modelos de "credit scoring". En la Sección 3 se ilustran los sesgos derivados del problema de selección muestral. En la Sección 4 se plantea el modelo econométrico a estimar. La Sección 5 presenta el procedimiento de estimación cuando se dispone de una muestra censurada. En la Sección 6 se proponen las dos alternativas antes señaladas, para el caso en que sólo se dispone de una muestra truncada. Y, finalmente, en la Sección 7 se resumen las principales conclusiones.

2. El Problema de "credit scoring" desde un punto de vista teórico.

La literatura existente sobre el problema de "credit scoring" se ha centrado en desarrollar modelos apropiados para la toma de decisiones sobre concesión de créditos. La idea básica de estos modelos es que la EF maximiza sus beneficios sujeta a un conjunto de restricciones y bajo incertidumbre. La pregunta que se intenta contestar es la siguiente: ¿se le concede o no se le concede a un individuo determinado la cantidad de crédito que solicita? o alternativamente ¿cuál es la cantidad máxima de crédito que debe concederse a dicho individuo?.

El planteamiento teórico que sigue cualquier modelo de "credit scoring" se resume en los siguientes puntos [para una descripción más amplia ver Altman et al. (1981)]:

1) Es un problema dinámico. Esto es, incorpora varios períodos dentro de un horizonte temporal.

2) El método consiste en estimar el valor presente descontado de los posibles beneficios o pérdidas derivados de la concesión de un crédito a un individuo concreto en todos los períodos del horizonte temporal considerado.

3) Al individuo en cuestión se le concede el crédito solicitado si la esperanza de este valor presente es positiva, y no se le concede en caso contrario. Alternativamente, la cantidad máxima de crédito a conceder puede determinarse igualando dicho valor presente a cero.

4) La información inicial que se utiliza es el comportamiento crediticio de otros individuos, con características

similares, a los que se les ha concedido un préstamo en el pasado.

Obsérvese que para resolver el problema planteado, sería necesario estimar la probabilidad de que un individuo devuelva a la EF la cantidad estipulada en cada uno de los períodos del horizonte temporal, así como los beneficios y pérdidas derivados de este proceso. En la práctica sería muy difícil estimar estos beneficios y pérdidas futuros para cada uno de los individuos en cada uno de los períodos. Por lo tanto, en los trabajos empíricos, el problema dinámico se reduce a formulaciones en un solo período, lo que representa un problema computacionalmente más tratable[3].

De forma muy simplificada, el modelo de toma de decisiones en un periodo puede establecerse como sigue: la EF sólo concederá el crédito solicitado por el individuo i si:

$$(1 - P_i)\ r\ \bar{I}_i + P_i\ (-\omega\ \bar{I}_i) \geq 0 \qquad [1]$$

donde:

$\bar{I}_i$: importe del crédito solicitado por el individuo i.
P_i: probabilidad de que el individuo i no devuelva el crédito o presente algun tipo de incumplimiento en su devolución.
r: rendimiento o tipo de interés que se determina en el mercado y se supone igual para todos los individuos.
ω: fracción del importe que se pierde por incumplimiento en la devolución del crédito.

El parámetro ω puede entenderse como el valor medio esperado de esta fracción, que se supone conocido por la EF. Alternativamente, ω puede considerarse como una variable de control por parte del decisor de forma que, fijando su valor, la EF establece su preferencia por el riesgo.

Como se ha indicado anteriormente, la ecuación [1] en términos de igualdad, puede utilizarse para determinar el importe máximo de crédito que el decisor concedería al individuo i. O también, mediante un procedimiento de programación matemática, para distribuir de forma óptima una cantidad dada de crédito entre m individuos de diferentes características. En el Apéndice A, se presentan algunos modelos de optimización que pueden utilizarse para resolver este problema.

Del planteamiento expuesto se deduce que existen dos aspectos fundamentales en los trabajos empíricos de "credit scoring". Primero, la necesidad de estimar la probabilidad de que un individuo no devuelva el crédito concedido. Segundo, la necesidad, por parte del decisor, de llevar a cabo una revisión sistemática de las probabilidades estimadas y de su inmediata incorporación al proceso de toma de decisiones.

3. Consideraciones sobre la estimación de las probabilidades poblacionales de morosidad.

Los procedimientos estadísticos más ampliamente utilizados en la literatura para la estimación de las probabilidades de morosidad a que nos referimos en la Sección anterior son dos: el análisis discriminante (AD) y los modelos de elección discreta (MED) [en Altman et al. (1981) se revisan algunos trabajos empíricos realizados]. Ambos procedimientos tienen como objetivo clasificar a los individuos en dos grupos, aquellos de los que se espera que devuelvan el crédito y aquellos de los que no. Para lo cual, se utilizan como variables explicativas un conjunto de características relativas a individuos que han recibido un crédito con anterioridad. Por lo general, estas características son de tres tipos: personales (sexo, estado civil, edad, familiares a su cargo, tipo de trabajo, etc.), económicas (ingresos, fuente de ingresos, bienes, etc.) y referentes al préstamo solicitado (importe, cuota de amortización, plazo de amortización, etc.).

Como se demuestra en McFadden (1976), ambos métodos están muy relacionados. En particular, si y es una variable aleatoria discreta y **x** es un vector de variables explicativas, los análisis AD y MED son dos medios alternativos de caracterizar la distribución conjunta de (y, **x**). El AD se basa en la distribución condicional de **x** en y, bajo el supuesto de que la distribución **x**|y es normal, mientras que los MED consideran la distribución condicional de y en **x**, que se supone normal (modelo probit) o logística (modelo logit). McFadden (1976) demuestra que (i) los MED son aplicables a una clase más amplia de distribuciones (y, **x**) que el AD normal y (ii) respecto a la estimación de parámetros, el análisis de MED es más robusto que el AD [ver Lo (1986) para una comparación de ámbos procedimientos en un análisis de quiebras en el sector bancario].

El problema es que si, como es de suponer, la muestra de créditos concedidos es la resultante de aplicar un mecanismo de selección por parte de la EF, los procedimientos AD o MED que no tengan en cuenta este hecho no proporcionarán estimaciones consistentes de las probabilidades poblacionales P_i de la ecuación [1]. Como se demuestra en Haussman y Wise (1977) y Maddala (1983), las estimaciones de los parámetros de un modelo de regresión obtenidas a partir de una muestra truncada son estimaciones inconsistentes de los parámetros poblacionales, ya que la esperanza de las perturbaciones del modelo no es cero, sino una función de las variables explicativas del mismo. Además, respecto al análisis de la muestra de créditos concedidos ignorando el hecho de que está truncada, caben las siguientes consideraciones:

a) Si el mecanismo de selección aplicado por la EF utiliza consistentemente toda la información relevante, el análisis de la muestra de créditos concedidos no permitirá detectar características sistemáticas asociadas al comportamiento de los individuos. Esto es, los individuos que, una vez concedido el crédito, incumplan en su devolución, lo harán de forma aleatoria.

De acuerdo con nuestra experiencia, éste no es el caso habitual de las EF.

b) Si, por el contrario, el mecanismo de selección aplicado no es consistente, el análisis de la muestra resultante, mediante técnicas AD o MED estándar, permitirá detectar las pautas sistemáticas en el comportamiento de los individuos que no se han tenido en cuenta por el mecanismo de selección previo. Sin embargo, las probabilidades estimadas a partir de estas pautas no se corresponderán con las probabilidades poblacionales de la ecuación [1], ya que sólo reflejan información residual.

Intuitivamente, los puntos anteriores pueden ilustrarse mediante el siguiente ejemplo. Una variable que, en principio, puede ser relevante en la estimación de P_i es el porcentaje de ingresos anuales que el individuo i debe dedicar a la devolución del préstamo. Si el mecanismo de selección inicial que genera la muestra truncada ha utilizado de forma óptima esta variable, la variable en cuestión resultará no significativa en el análisis de esta muestra, aunque sea uno de los determinantes principales de P_i. Si por el contrario, el estado civil del individuo no se ha tenido en cuenta (o no se ha utilizado de forma óptima) en el mecanismo de selección inicial, y es una variable significativa en la determinación de P_i, esta relación podrá detectarse con el análisis de la muestra truncada.

Seguidamente, se formalizan los puntos anteriores en el contexto de los MED. Consideremos la siguiente ecuación, que relaciona el comportamiento en préstamos de individuos con un conjunto de características relativas a los mismos:

$$y_i^* = x_i'\beta + \epsilon_i \qquad i=1,\ldots,N \qquad [2]$$

donde

y_i^*: variable latente no observable cuya realización dicotómica es y_i.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } y_i^* \geq 0 \text{ (individuo i-ésimo es moroso)} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$\mathbf{x}_i$: vector de variables explicativas no aleatorias que recoge las características del individuo i-ésimo.

β : vector de coeficientes asociados a las variables del vector $\mathbf{x}_i$.

ϵ_i: error aleatorio .

Bajo el supuesto de normalidad, si la variable y_i toma el valor 1 con probabilidad P_i y el valor 0 con probabilidad $1-P_i$, la formulación probit asociada a la ecuación [2] es:

$$P_i = P(y_i=1) = F(I_i) \qquad [3]$$

$$I_i = \mathbf{x}_i'\beta \qquad [4]$$

donde $F(\cdot)$ denota la función de distribución normal estándar. Queremos hacer notar que el supuesto de normalidad no es esencial y que los resultados que se presentan en ésta y otras secciones del artículo son válidos para cualquier distribución continua.

Obsérvese que el vector de parámetros β podría estimarse consistentemente a partir del modelo [3] y [4] si se dispusiera de una muestra en la que todos los individuos hubiesen recibido el crédito sin ningún tipo de selección. Sin embargo, consideramos el caso más real en que la EF utiliza el siguiente índice lineal para la concesión de créditos:

$$\tilde{I}_i = \mathbf{x}_i'\tilde{\beta} \qquad i=1,\ldots,N \qquad [5]$$

De forma que, existe un valor crítico k, fijado por el decisor, tal que:

si $\tilde{I}_i < k$ se le concede el crédito al individuo i-ésimo
si $\tilde{I}_i \geq k$ no se le concede el crédito[4].

Supongamos que de una muestra de tamaño N, la EF concede el crédito a n individuos y no se lo concede a los restantes N-n. Sin pérdida de generalidad, suponemos también que los n individuos que obtuvieron el crédito son los primeros en la muestra. Entonces, la muestra truncada está formada por los individuos que satisfacen $\tilde{I}_i<k$ para $i=1,\ldots,n$.

Nuestro razonamiento es el siguiente. A partir de las ecuaciones [4] y [5] se tiene que:

$$\zeta_i = \mathbf{x}_i'(\beta-\tilde{\beta}) \quad i=1,\ldots,N \qquad [6]$$

donde ζ_i es el error no observable de aproximar I_i por $\tilde{I}_i$. Esto es, el error cometido por la EF.

No obstante, para los n créditos concedidos, ζ_i tiene una posterior realización dicotómica que denotamos por y_i^T. Para $\tilde{I}_i<k$ o, lo que es lo mismo, $\zeta_i>\mathbf{x}_i'\beta-k$, la variable $y_i^T=1$ si $\zeta_i\geq\zeta_i^*$ (individuo moroso una vez obtenido el crédito) y $y_i^T=0$ si $\zeta_i<\zeta_i^*$ (individuo no moroso una vez obtenido el crédito), donde ζ_i^* representa el punto de corte que traduce el error no observable ζ_i en el hecho de que el individuo i sea moroso o no. Entonces, si ζ_i^* sigue una distribución normal, se tiene que:

$$P[y_i^T=1|\tilde{I}_i<k] = P[\zeta_i^*\leq\zeta_i|\zeta_i>\mathbf{x}_i'\beta-k] = F^T(\zeta_i) \qquad i=1,\ldots,n \qquad [7]$$

donde F^T denota que la función de distribución está truncada para determinados valores de ζ_i.

La formulación [7] es el modelo probit asociado a la ecuación [2], donde solamente se emplea información sobre los n créditos que se han concedido a partir de [5]. Si se utiliza este modelo para estimar las probabilidades poblacionales de morosidad y no se tiene en cuenta que F^T está truncada, las dos posibilidades antes mencionadas son las siguientes.

a) Si $\tilde{\beta}$ es un estimador consistente de β, en el sentido de que la EF ha utilizado de forma óptima toda la información contenida en $\mathbf{x}_i$, a partir de [6] se tiene que $E[\zeta_i|\mathbf{x}_i'] = 0$ para $i=1,...,N$ y, por lo tanto, plim $\zeta_i = 0$ para $i=1,...,N$. Luego, es de esperar que el análisis de la muestra truncada mediante [7] no permita detectar relaciones significativas. La EF puede equivocarse y los individuos resultar morosos, pero el error cometido es ortogonal al vector de características individuales.

b) Si, por el contrario, $\tilde{\beta}$ no se ha calculado utilizando óptimamente toda la información en $\mathbf{x}_i$, entonces $E[\zeta_i|\mathbf{x}_i'] \neq 0$ y plim $\zeta_i \neq 0$ para $i=1,...,N$, por lo que se podrá extraer información de la muestra truncada[5]. No obstante, la relación entre ζ_i y $\mathbf{x}_i$ vendrá determinada por el sesgo en la estimación de β. A modo de ilustración, consideremos el caso en que la EF calcula $\tilde{I}_i$ sin utilizar todas las variables relevantes incluidas en $\mathbf{x}_i$. Particionando los vectores $\mathbf{x}_i' = [\mathbf{x}_{1i}', \mathbf{x}_{2i}']$ y $\beta' = [\beta_1', \beta_2']$, suponemos que el mecanismo de selección de la EF es $\tilde{I}_i = \mathbf{x}_{1i}'\tilde{\beta}_1$. En este caso, el error no observable cometido es:

$$\zeta_i = I_i - \tilde{I}_i = \mathbf{x}_{1i}'(\beta_1 - \tilde{\beta}_1) + \mathbf{x}_{2i}'\beta_2 \qquad i=1,...,N$$

Bajo el supuesto de que $\tilde{\beta}_1$ sea el estimador MCO de β_1, se tiene que:

$$E[\zeta_i|\mathbf{x}_i'] = \mathbf{x}_{1i}'(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2\beta_2 + \mathbf{x}_{2i}'\beta_2 \qquad [8]$$

donde X_1 y X_2 son matrices cuyas filas son respectivamente los vectores $\mathbf{x}_{1i}'$ y $\mathbf{x}_{2i}'$ desde $i=1,...,N$.

La relación existente entre ζ_i y $\mathbf{x}_i$ dada en [8] podría detectarse para los n créditos que se han concedido mediante la estimación del modelo [7]. No obstante, la relación en [8] está determinada por el sesgo en la estimación de β_1 como consecuencia de la omisión de variables relevantes. Por lo tanto, las probabilidades estimadas solamente reflejarán esta información residual y no serán estimaciones consistentes de las probabilidades poblacionales.

Nótese que el supuesto de que $\tilde{\beta}_1$ es el estimador MCO de β_1 se hace por simplicidad, a fin de obtener una expresión analítica de su sesgo. El sesgo en que se incurriría con cualquier otro estimador de β_1 sería una función, más o menos compleja, del sesgo MCO. Por lo tanto, los resultados cualitativos que acabamos de señalar son válidos con independencia del procedimiento de estimación de β_1 que haya utilizado la EF.

4. El modelo econométrico.

Teniendo en cuenta que existe un mecanismo de selección por parte de la EF, un modelo econométrico adecuado para la estimación de las probabilidades poblacionales P_i puede formalizarse mediante las siguientes ecuaciones:

Ecuación de concesión de créditos:

$$y_{1i}^{*} = x_{1i}'\alpha_1 + \epsilon_{1i} \qquad [9]$$

donde

$$y_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{si } y_{1i}^{*} \geq 0 \text{ (crédito concedido)} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ecuación de morosidad:

$$y_{2i}^{*} = x_{2i}'\alpha_2 + \epsilon_{2i} \qquad [10]$$

donde

$$y_{2i} = \begin{cases} 1 & \text{si } y_{2i}^{*} \geq 0 \text{ (individuo i-ésimo es moroso)} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

tal que y_{2i} sólo se observa si $y_{1i}^{*} \geq 0$.

Los vectores x_{1i} y x_{2i} denotan las características del individuo i-ésimo donde, para identificar los parámetros del modelo [9] y [10], es necesario imponer la restricción de que al menos una variable en x_{2i} no esté incluida en x_{1i} [ver Nelson (1977)]. También suponemos que ϵ_{1i} y ϵ_{2i} son errores aleatorios que siguen una distribución normal bivariante.

Una forma más rigurosa, aunque menos intuitiva que la desarrollada en la Sección 3, de ilustrar el sesgo asintótico derivado de estimar por separado la ecuación [10] utilizando una muestra truncada, viene dado porque la

$$E[y^*_{2i}|x_{2i}',y^*_{1i}\geq 0] = x_{2i}'\alpha_2 + E[\epsilon_{2i}|\epsilon_{1i}\geq -x_{1i}'\alpha_1]$$

y, a no ser que ϵ_{1i} y ϵ_{2i} sean independientes, la esperanza condicionada de la perturbación en [10] es una función de x_{1i}, de modo que [Johnson y Kotz (1972)]:

$$E[\epsilon_{2i}|\epsilon_{1i}\geq -x_{1i}'\alpha_1] = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}\lambda_i$$

donde σ_1 es la desviación típica de ϵ_{1i} (que en este caso es igual a la unidad por la necesaria normalización que llevan consigo los MED), σ_{12} es la covarianza entre ϵ_{1i} y ϵ_{2i} (que en este caso es igual al coeficiente de correlación) y λ_i es la inversa del ratio de Mill:

$$\lambda_i = \frac{f(d_i)}{1-F(d_i)}$$

donde $f(\cdot)$ y $F(\cdot)$ son respectivamente la función de densidad y de distribución de una variable normal estándar, siendo

$$d_i = \frac{-x_{1i}'\alpha_1}{\sigma_1}$$

5. Estimación en el caso de que se dispone de una muestra censurada.

Analizamos, en primer lugar, la estimación del modelo [9] y [10] cuando se dispone de una muestra completa de solicitudes. Esto es, una muestra censurada que contenga tanto a los individuos a los que se les ha concedido el crédito como a los que no. En esta muestra, obviamente, no se conoce el comportamiento de los individuos que no han recibido el crédito, pero se tiene información sobre sus características personales. En concreto, se dispone de observaciones de x_{1i} y x_{2i} para los N individuos que han solicitado el crédito, tanto si lo han recibido como si no.

La estimación del modelo con este tipo de muestras se discute en Poirier (1980) y Meng y Schmidt (1985) y una aplicación al problema del "credit scoring" se encuentra en Boyes et al. (1989). Para obtener consistencia, se debe estimar conjuntamente la ecuación de concesión de créditos [9] y la ecuación de morosidad [10], mediante un procedimiento de máxima verosimilitud. Aunque estos resultados son conocidos en la literatura, a continuación se resume dicho proceso de estimación, ya que va a servir de base para los resultados de la siguiente Sección. Denotando por:

(i) Probabilidad de que al individuo i-esimo se le conceda el crédito:

$$P(y_{1i}=1) = F_1(x_{1i}'\alpha_1) \qquad [11]$$

(ii) Probabilidad de que el individuo i-esimo sea moroso:

$$P(y_{2i}=1) = F_2(x_{2i}'\alpha_2) \qquad [12]$$

(iii) Probabilidad de que al individuo i-esimo se le conceda el crédito y resulte moroso:

$$P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=1) = F(x_{1i}'\alpha_1,\ x_{2i}'\alpha_2) \qquad [13]$$

donde $F_1(\cdot)$ y $F_2(\cdot)$ son las funciones de distribución marginales derivadas de $F(\cdot,\cdot)$, que es una función de distribución bivariante.

En el Apéndice B se demuestra [ver también Meng y Schmidt (1985)] que, para una muestra de N solicitantes, el logaritmo de la función de verosimilitud es:

$$\begin{aligned}\ln L(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{i=1}^{N} & y_{1i}\, y_{2i} \ln F(x_{1i}'\alpha_1,\ x_{2i}'\alpha_2) \\ & + y_{1i}(1-y_{2i}) \ln [F_1(x_{1i}'\alpha_1) - F(x_{1i}'\alpha_1,\ x_{2i}'\alpha_2)] \\ & + (1-y_{1i}) \ln [1 - F_1(x_{1i}'\alpha_1)] \qquad [14]\end{aligned}$$

En [14], los dos primeros términos tienen en cuenta los créditos de individuos morosos y no morosos respectivamente, mientras que el tercer término se refiere a los créditos no concedidos.

Las expresiones analíticas de las derivadas primeras y segundas de la función [14] existen. Sin embargo, el problema [ver Maddala (1983)], es que no existen condiciones que garanticen que este tipo de funciones sean estrictamente convexas. Por lo tanto, resulta aconsejable empezar el procedimiento iterativo con diferentes valores iniciales de los parámetros del modelo, con el objeto de evitar en lo posible la convergencia a óptimos locales.

Maximizando [14], bajo la hipótesis nula de normalidad bivariante y homoscedasticidad, se obtienen estimaciones consistentes y asintóticamente eficientes de los parámetros del modelo. A su vez, esto permite obtener estimaciones consistentes y asintóticamente eficientes de las probabilidades poblacionales de morosidad P_i a partir de [12]. Estas probabilidades estimadas constituyen por sí mismas el mecanismo de selección óptimo para la concesión de créditos, obtenido a partir de la muestra empleada.

Los coeficientes estimados en [14] pueden también utilizarse para evaluar la efectividad del mecanismo de selección que ha generado la muestra. Para cada una de las variables explicativas x_k, si los correspondientes coeficientes estimados de α_{1k} y α_{2k} son significativos y tienen signos opuestos, presumiblemente la EF ha utilizado esta variable de forma consistente con la estrategia diseñada para minimizar el riesgo por morosidad y, por lo tanto, maximizar beneficios. Por el contrario, si los coeficientes estimados asociados a esa variable tienen el mismo signo, la EF no ha utilizado de forma óptima esa variable en su mecanismo de selección inicial.

6. Estimación en el caso de que sólo se dispone de una muestra truncada.

Un tratamiento óptimo del problema requeriría la utilización de una muestra censurada de solicitantes y la aplicación del procedimiento de estimación que se ha expuesto en la Sección anterior. No obstante, como se ha indicado previamente, es habitual que la EF no conserve información sobre los créditos no concedidos, por lo que este procedimiento no es aplicable. En este caso, proponemos dos alternativas para el análisis de esta muestra.

6.1. Estimación de un modelo bivariante con muestra truncada.

La primera alternativa consiste en abordar el problema de estimación del modelo bivariante, teniendo en cuenta que la muestra está truncada.

Consideremos el modelo formado por las ecuaciones [9] y [10] donde, en este caso, x_{1i} y x_{2i} sólo se observan si $y_{1i}^*\geq 0$, lo que ocurre para los n individuos que han obtenido el crédito en una muestra de N solicitantes.

Bajo el supuesto de que ϵ_{1i} y ϵ_{2i} siguen una distribución normal bivariante y a partir de las expresiones [11]-[13], se demuestra en el Apéndice B que el logaritmo de la función de verosimilitud del modelo con la muestra truncada es:

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{i=1}^{n} & y_{2i} \ln F(x_{1i}'\alpha_1, x_{2i}'\alpha_2) \\ & + (1-y_{2i}) \ln [1 - F_1(x_{1i}'\alpha_1) - F(x_{1i}'\alpha_1, x_{2i}'\alpha_2)] \\ & - \ln [1 - F_1(x_{1i}'\alpha_1)] \end{aligned} \qquad [15]$$

donde los dos primeros términos tienen en cuenta los créditos de individuos morosos y no morosos respectivamente y el tercer término recoge el hecho de que la muestra está truncada para valores de $y_{1i}^*<0$.

Lo mismo que para la función [14], las derivadas primeras y segundas de [15] existen, pero tampoco puede garantizarse que sea una función estrictamente convexa, lo que debe tenerse en cuenta en el proceso iterativo de optimización, utilizando distintos valores iniciales de los parámetros del modelo.

Bajo las hipótesis habituales, los parámetros estimados a partir de la maximización de [15] serán consistentes y asintóticamente eficientes condicionados a la información que se ha utilizado. Por lo tanto, serán menos eficientes que los propuestos en la Sección 5, donde la muestra no estaba truncada. No obstante, este procedimiento permite estimar consistentemente las probabilidades poblacionales de morosidad, sustituyendo en [12] las estimaciones obtenidas de α_2. Estas probabilidades estimadas constituyen por si mismas el mejor mecanismo de selección que puede obtenerse con esta muestra. También, de la misma forma que se ha indicado en la Sección anterior, la comparación entre los coeficientes estimados de α_{1k} y α_{2k} puede utilizarse para evaluar el mecanismo de selección inicial que ha generado la muestra.

6.2. Selección en dos etapas.

Como segunda alternativa, la muestra truncada puede emplearse para mejorar el criterio de selección inicial utilizado por la EF, mediante un filtro en dos etapas.

Como hemos indicado en Secciones anteriores, si se estima un modelo probit con una muestra de créditos concedidos ignorando que se trata de una muestra truncada, las probabilidades que se obtienen son estimaciones inconsistentes de las probabilidades poblacionales. Sin embargo, son estimaciones consistentes de la probabilidad de que un individuo sea moroso una vez que ha obtenido el crédito mediante el criterio de selección específico que ha determinado la concesión de dicho crédito. En este sentido, es importante señalar que en muestras con observabilidad parcial, la consistencia o inconsistencia de un estimador viene determinada por cuál es la población que se desea analizar.

Siguiendo con el planteamiento de la Sección 3, las probabilidades de morosidad para el subconjunto de población de créditos concedidos a partir del mecanismo de selección [5], se estimarán consistentemente a partir del modelo [7], que transcribimos como:

$$P[y_i^T=1|\tilde{I}_i<k] = F^T(\zeta_i) \qquad i=1,\dots,n \qquad [16]$$
$$\zeta_i = \mathbf{x}_i'\gamma$$

cuya estimación debe llevarse a cabo sin tener en cuenta que la correspondiente función de distribución está truncada.

Entonces, el procedimiento que proponemos para utilizar esta información, consiste en un criterio de selección en dos etapas. Cuando el individuo i-ésimo solicita un crédito, primero se aplica el mecanismo de selección de la EF, dado por la ecuación [5]. Si el individuo pasa este primer filtro, se le aplica un segundo filtro, que se construye a partir de los resultados de estimación del modelo [16] estableciendo, mediante un análisis de sensibilidad, un segundo valor crítico c tal que, sólo si $\tilde{\zeta}_i<c$ al individuo i se le concede el crédito.

En este caso, no pueden obtenerse estimaciones de las probabilidades poblacionales de morosidad. Sin embargo, es un procedimiento sencillo, cuya finalidad es mejorar el criterio de concesión de créditos utilizado por la EF que, en difinitiva, es el objetivo que se persigue. La ventaja de este método es que el modelo [16] puede estimarse fácilmente con cualquier paquete econométrico estándar, mientras que el procedimiento propuesto en el apartado 6.1 requiere la utilización de rutinas de optimización.

Por último, queremos señalar que frecuentemente en la estimación de modelos como los propuestos en esta Sección y en la Sección anterior, nos encontramos con un problema adicional derivado del muestreo basado en la elección. Este problema se debe a que, frecuentemente, es necesario llevar a cabo un muestreo estratificado de forma que, en general, las proporciones de créditos no concedidos y de individuos morosos en la muestra son superiores a las que se observan en la población. Esto se debe a que, si se mantuviesen en la muestra los porcentajes poblacionales, se podría incurrir en una de las siguientes situaciones: (i) o bien el número de individuos en estos grupos en la muestra sería insuficiente para hacer inferencia estadística, o (ii) alternativamente, la muestra sería tan grande que dificultaría el análisis. Sin embargo, la desviación de las proporciones muestrales con respecto a las poblacionales debe tratarse estadísticamente. Un posible tratamiento es el método de estimación propuesto por Manski y Lerman (1977), que consiste en ponderar la función de verosimilitud del modelo por unos coeficientes que se construyen dividiendo los porcentajes poblacionales por los muestrales.

7. Conclusiones.

Este trabajo trata de algunos aspectos que consideramos relevantes para el análisis empírico de "credit scoring". En concreto, hemos considerado el problema de estimar la probabilidad de que un individuo sea moroso en función de sus características personales. Una buena estimación de estas probabilidades es fundamental para que la EF reduzca sus pérdidas por morosidad.

Los problemas en la estimación de estas probabilidades se deben a que las muestras disponibles no son aleatorias, sino que resultan de un proceso de selección, que lógicamente lleva a cabo la EF, para la concesión de cada crédito individual. En este trabajo hemos demostrado que cualquier procedimiento que ignore este hecho, dará lugar a estimaciones inconsistentes de los parámetros poblacionales.

La forma óptima de corregir el sesgo procedente de la selección muestral, exige la utilización de una muestra censurada, que incluya también a los individuos que no obtuvieron el crédito. Con esta información, aplicando un procedimiento de estimación por máxima verosimilitud, se obtienen estimaciones consistentes y asintóticamente eficientes de los parámetros. No obstante, en este trabajo también hemos derivado la función de verosimilitud para el caso en que la EF no haya conservado información sobre los créditos denegados. Por lo tanto, damos una posible solución para obtener consistencia en estas circunstancias, aunque los parámetros estimados serán menos eficientes que los que se obtengan con una muestra censurada. También, proponemos un procedimiento alternativo, más sencillo, que permite mejorar el criterio de selección de la EF mediante un filtro en dos etapas. Pensamos que ambos procedimientos pueden ser de utilidad para su aplicación a corto plazo, ya que si la EF sólo dispone de una muestra truncada, la elaboración de otra muestra representativa, que incorpore los créditos no concedidos, podría llevar varios años.

Finalmente, queremos señalar que, aunque los procedimientos expuestos en este trabajo se han centrado en el marco del análisis de "credit scoring", también son aplicables a cualquier otra situación de toma de decisiones, siempre que el riesgo esté asociado a características individuales. Un ejemplo de interés es el análisis de primas de seguro del automóvil, donde la compañía aseguradora también evalua las características del individuo y del automóvil y puede reservarse el derecho de no realizar el contrato.

APENDICE A: Modelos para la optimización de una cartera de créditos.

A.1. Modelo de Programación Lineal con variables continuas.

Partiendo de la ecuación [1], podemos plantear el siguiente modelo de programación lineal:

$$\mathrm{Max}\ (z) \equiv \sum_{i=1}^{m} \gamma_i\, I_i \qquad [A.1]$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{m} I_i \leq \bar{I} \qquad [A.2]$$

$$\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}:\ I_i \leq \bar{I}_i \qquad [A.3]$$

$$I_i \geq 0 \qquad [A.4]$$

donde las variables se definen como en la Sección 2, y además:

- m : Número de solicitudes.
- z : Rendimiento esperado de la cartera de solicitudes.
- γ_i : Rendimiento esperado de la solicitud i, que viene dado por:
  $\gamma_i = (1 - P_i)\ r - P_i\ \omega$
- $\bar{I}$: Cantidad total disponible para la concesión de créditos.
- I_i : Importe concedido al individuo i.

Sobre este modelo, cabe hacer los siguientes comentarios:

a) La solución del problema resulta trivial. Esto es, la solución óptima puede calcularse fácilmente mediante un procedimiento heurístico de tipo "orden de mérito". Esencialmente, este método consiste en ordenar los créditos de mayor a menor rentabilidad e ir concediéndolos hasta saturar la restricción de crédito máximo [A.2].

b) Si no se raciona la cantidad total de crédito a conceder (mediante la restricción [A.2]), el plan óptimo concedería todos los créditos que lleven asociado un rendimiento positivo. Una forma alternativa de evitar este resultado, sería introducir en la formulación restricciones de riesgo máximo admisible para el total de la cartera.

c) El valor de la actividad dual de la restricción [A.2] permite medir la rentabilidad marginal (en términos de rendimiento esperado) de una unidad más de capital disponible para la concesión de préstamos. Comparando este resultado con la rentabilidad marginal de activos alternativos, la EF puede medir la eficiencia o ineficiencia relativa de sus inversiones.

d) El valor de la actividad dual de las restricciones [A.3] no resulta muy interesante ya que, en principio, cada individuo ha solicitado la cantidad de crédito que le interesa. En todo caso, este análisis permite detectar qué tipo de créditos resulta más rentable en términos de su retorno esperado, lo cual podría tener algún interés para tomar decisiones de especialización en segmentos concretos del mercado crediticio.

e) Algunos análisis de sensibilidad interesantes son: (i) El "ranging" de los coeficientes de la función objetivo. Esto consiste en calcular el rango de valores entre los que puede variar cada coeficiente sin que se pierda la optimalidad de la solución. (ii) La resolución del problema para distintos valores del parámetro ω, si éste no se fija de acuerdo con criterios estrictamente objetivos.

La formulación planteada admite, en principio, la existencia de créditos concedidos parcialmente (esto es, aquéllos para los que $I_i<\bar{I}_i$). Sin embargo es poco probable que, en la práctica, ocurra esto (salvo quizá en el caso del crédito marginal del plan de operaciones), y lo habitual es que se conceda todo el importe solicitado o no se conceda el crédito. Para tratar éste problema, se puede reformular el modelo [A.1]-[A.4] en los términos que se exponen a continuación.

A.2. Modelo de programación lineal con variables discretas.

El siguiente modelo impide, mediante el uso de variables binarias, la existencia de créditos concedidos parcialmente en la solución.

$$\text{Max } (z) \equiv \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, I_i \qquad [A.5]$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{m} I_i \leq \bar{I} \qquad [A.6]$$

$$\forall \; i \in \{1, 2, \ldots, m\}: \; I_i - y_i \, \bar{I}_i = 0 \qquad [A.7]$$

$$I_i \geq 0; \; y_i \in \{0, 1\} \qquad [A.8]$$

donde:

y_i : Variable binaria definida de forma que:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se concede la solicitud } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Sobre este nuevo planteamiento cabe hacer los siguientes comentarios:

a) Este tipo de problemas puede resolverse con facilidad utilizando algoritmos de tipo "branch and bound" [ver Villalba y Jerez (1990)].

b) En este caso, los valores de las actividades duales asociadas a cada restricción no pueden interpretarse de la forma estándar (ya que la función objetivo no es continua) o, a lo sumo, admiten una interpretación estrictamente local.

A.3. Modelo de selección de cartera.

En los modelos anteriores no se tiene en cuenta el error de estimación de P_i. En este caso, no sólo se considera el riesgo asociado a cada préstamo, sino también la precisión con que se estiman las probabilidades de morosidad. Por lo tanto, una formulación más completa puede hacerse mediante el siguiente modelo de programación cuadrática con variables continuas:

$$\text{Max } (z) \equiv (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, I_i - \lambda \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 \, I_i^2 \qquad [A.9]$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{m} I_i \leq \bar{I} \qquad [A.10]$$

$$\forall \; i \in \{1, 2, \ldots, m\}: \; I_i \leq \bar{I}_i \qquad [A.11]$$

$$I_i \geq 0 \qquad [A.12]$$

donde:

λ : Factor de escala, definido de forma que:
$0 \leq \lambda \leq 1$
Este parámetro puede interpretarse como una medida de la aversión al riesgo de la EF.

σ_i^2 : Varianza de P_i.

Sobre esta formulación, cuyo planteamiento está basado en los modelos de selección de cartera de Markowitz (1952) y Sharpe (1964), cabe hacer los siguientes comentarios:

a) La consideración simultánea de riesgo y beneficio hace que esta formulación sea menos proclive que las anteriores a generar soluciones triviales.

b) Efectuando un análisis de sensibilidad ante variaciones en λ puede evaluarse la frontera de combinaciones eficientes riesgo-beneficio asociadas a una cartera determinada.

c) Existen algoritmos numéricos eficientes para resolver este tipo de problemas. Uno de los más utilizados es el de Wolfe (1963).

APENDICE B.

B.1. Derivación de la función de verosimilitud en [14].

Dado el modelo [9]-[10], si se dispone de una muestra censurada de N solicitudes, tal y como se ha descrito en la Sección 5, se tiene que

$$P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=1) + P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=0) + P(y_{1i}=0) = 1 \qquad [B.1]$$

Por lo que, la función de verosimilitud del modelo viene dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha_1,\alpha_2) = \prod_{i=1}^{N} & [P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=1)]^{y_{1i}y_{2i}} \\ & [P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=0)]^{y_{1i}(1-y_{2i})} \\ & [P(y_{1i}=0)]^{(1-y_{1i})} \end{aligned} \qquad [B.2]$$

Donde, si la distribución es simétrica:

$$\begin{aligned} P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=1) &= \int_{-x_{1i}'\alpha_1}^{\infty} \int_{-x_{2i}'\alpha_2}^{\infty} f(\epsilon_{1i},\ \epsilon_{2i})\, d\epsilon_{1i} d\epsilon_{2i} = \\ & F(x_{1i}'\alpha_1,\ x_{2i}'\alpha_2) \equiv F(\cdot) \end{aligned} \qquad [B.3]$$

$$\begin{aligned} P(y_{1i} = 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{-x_{1i}'\alpha_1} f(\epsilon_{1i},\ \epsilon_{2i})\, d\epsilon_{1i} d\epsilon_{2i} = \\ & \int_{-\infty}^{-x_{1i}'\alpha_1} f_1(\epsilon_{1i})\, d\epsilon_{1i} = \\ & 1 - F_1(x_{1i}'\alpha_1) \equiv 1 - F_1(\cdot) \end{aligned} \qquad [B.4]$$

Sustituyendo [B.3] y [B.4] en [B.1] se tiene que:

$$\begin{aligned} P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=0) &= 1 - P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=1) - P(y_{1i}=0) = \\ &\quad 1 - F(\cdot) - [1 - F_1(\cdot)] = \\ &\quad F_1(\cdot) - F(\cdot) \end{aligned} \tag{B.5}$$

Entonces, a partir de [B.3], [B.4] y [B.5], la función [B.2] puede escribirse como:

$$L(\alpha_1,\alpha_2) = \prod_{i=1}^{N} [F(\cdot)]^{y_{1i}y_{2i}} \cdot [F_1(\cdot) - F(\cdot)]^{y_{1i}(1-y_{2i})} [1 - F_1(\cdot)]^{(1-y_{1i})} \tag{B.6}$$

cuyo logaritmo es:

$$\ln L(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{i=1}^{N} y_{1i}\ y_{2i} \ln F(\cdot) + y_{1i}(1-y_{2i}) \ln [F_1(\cdot) - F(\cdot)] + (1-y_{1i}) \ln [1 - F_1(\cdot)] \tag{B.7}$$

que es la expresión dada en [14].

B.2. Derivación de la función de verosimilitud en [15].

Si para estimar el modelo [9]-[10], sólo se dispone de una muestra truncada formada por los n créditos concedidos, según el problema que se ha definido en la Sección 6, se tiene que

$$P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=1) + P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=0) = 1 \tag{B.8}$$

Por lo que, la función de verosimilitud viene dada por:

$$L(\alpha_1,\alpha_2) = \prod_{i=1}^{n} [P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=1)]^{y_{2i}} [P(y_{1i}=1,\ y_{2i}=0)]^{(1-y_{2i})} \tag{B.9}$$

En este caso, la función de densidad conjunta de ϵ_{1i} y ϵ_{2i} truncada para los valores de $\epsilon_{1i}<-x_{1i}'\alpha_1$ es:

$$f^T(\epsilon_{1i}, \epsilon_{2i}) = \begin{cases} \dfrac{f(\epsilon_{1i}, \epsilon_{2i})}{1 - F_1(\cdot)} & \text{si } \epsilon_{1i} < -x_{1i}'\alpha_1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por lo que, se tiene:

$$P(y_{1i}=1, y_{2i}=1) = \int_{-x_{1i}'\alpha_1}^{\infty} \int_{-x_{2i}'\alpha_2}^{\infty} f^T(\epsilon_{1i}, \epsilon_{2i})\, d\epsilon_{1i} d\epsilon_{2i} =$$

$$= \frac{F(\cdot)}{1 - F_1(\cdot)} \qquad [B.10]$$

y sustituyendo [B.10] en [B.8]:

$$P(y_{1i}=1, y_{2i}=0) = 1 - P(y_{1i}=1, y_{2i}=1)$$

$$= \frac{1 - F_1(\cdot) - F(\cdot)}{1 - F_1(\cdot)} \qquad [B.11]$$

A partir de [B.10] y [B.11], la función [B.9] puede escribirse como:

$$L(\alpha_1,\alpha_2) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{F(\cdot)}{1 - F_1(\cdot)} \right]^{y_{2i}} \left[\frac{1 - F_1(\cdot) - F(\cdot)}{1 - F_1(\cdot)} \right]^{1-y_{21}} \qquad [B.12]$$

y tomando logaritmos:

$$\ln L(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{i=1}^{n} y_{2i} \ln F(\cdot) + (1-y_{2i}) \ln [1 - F_1(\cdot) - F(\cdot)]$$
$$- \ln [1 - F_1(\cdot)] \qquad [B.13]$$

que es la función en [15].

NOTAS.

(1) Según datos del Banco de España, "la morosidad en bancos y cajas de ahorros ascendió durante los doce meses del pasado año (1990) a 273.000 millones de pesetas, cifra que multiplica por cinco la registrada en 1989, cuando se cerró el ejercicio con 48.600 millones de pesetas" (El País, 23 de Enero de 1991).

(2) El hecho de disponer únicamente de una muestra truncada parece bastante frecuente en la práctica. La EF para la que hemos realizado un análisis empírico de "credit scoring" nos ha informado de que, por lo general, estas entidades no conservan los datos relativos a créditos denegados, ya que carecen de incentivos para ello.

(3) No obstante, en Bierman y Hausman (1970) se presenta un análisis multiperíodo, basado en técnicas bayesianas. Este análisis parte de las llamadas probabilidades iniciales de morosidad, que se calculan mediante la formulación en un solo período, pero permite revisar dichas probabilidades iniciales a medida que se observa el comportamiento de los individuos en períodos sucesivos.

(4) Por lo general, los procedimientos que utilizan las entidades financieras para la concesión de créditos son lineales. Cada individuo obtiene una puntuación ($\tilde{I}_i$) según sus características personales y no debe sobrepasar un máximo establecido (k) para obtener el crédito. Este es el procedimiento que se recoge en la ecuación [5] donde, en el caso más simple de que los componentes del vector $\mathbf{x}_i$ sean variables binarias, el vector $\tilde{\beta}$ recoge las puntuaciones que la EF atribuye a cada característica.

(5) Los problemas en el cálculo de $\tilde{\beta}$ pueden deberse a dos causas: (i) a que los coeficientes de las variables incluidas no se han estimado de forma óptima ó (ii) a la omisión de variables relevantes en el vector $\mathbf{x}_i$. En este segundo caso, la EF está imponiendo implícitamente la restricción de que los correspondientes coeficientes del vector $\tilde{\beta}$ son cero.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

- Altman E.I., R.B. Avery, R.A. Eisenbeis y J.F. Sinkey (1981), Application of classification techniques in business, banking and finances, JAI Press, Greenwich C.T.

- Bierman H. y W.H. Hausman (1970), "The credit granting decision", Management Science, vol. 16, pags. B519-B532.

- Boyes W.J., D.L. Hoffman y A.S. Low (1989), "An econometric Analysis of the bank credit scoring problem", Journal of Econometrics, vol. 41, pags. 3-14.

- Haussman J.A. y D.A Wise (1977), "Social experimentation, truncated distributions and efficient estimation", Econometrica, vol. 45, pags. 319-339.

- Johnson N.L. y S. Kotz (1972), Distributions in statistics: continuous multivariate distributions, John Wiley and Sons.

- Lo A.W. (1986), "Logit versus discriminant analysis: a specification test and application to corporate bankruptcies", Journal of Econometrics, vol. 31, pags. 151-178.

- Maddala G.S. (1983), Limited Dependent and qualitive variables in Econometrics, Cambridge University Press.

- Manski C.F. y S.R. Lerman (1977), "The estimation of choice probabilities from choice-based samples", Econometrica, vol. 45, pags. 1977-1988.

- Markowitz H. (1952), "Portfolio selection", Journal of Finance, vol. 7, pags. 77-91.

- McFadden D. (1976), "A comment on discriminant analysis versus logit analysis", Annals of Economic and Social Measurement, vol. 5, pags. 511-523.

- Meng C.L. y P. Schmidt (1985), "On the cost of parcial observability in the bivariate probit model", International Economic Review, vol. 26, pags. 71-85.

- Nelson F. (1977), "Censored regression models with unobserved stochastic thresholds", Journal of Econometrics, vol. 6, pags. 309-327.

- Poirier D.J. (1980), "Parcial Observability in bivariate probit models", Journal of Econometrics, vol. 12, pags. 210-217.

- Sharpe W.F. (1964), "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk", Journal of Finance, vol. 19, pags. 425-442.

- Srinivasan V. y Y.H. Kim (1987), "Credit granting: A comparative analysis of classification procedures", Journal of Finance, vol. 42, pags. 665-683.

- Villalba D. y M. Jerez (1990), Sistemas de optimización para la planificación y toma de decisiones. Ed. Pirámide, Madrid.

- Wolfe P. (1963), "Methods of Nonlinear Programming". En R.L. Graves y P. Wolfe (Eds.), Recent advances in mathematical programming, Mc Graw-Hill, Nueva York.

SOME CONSIDERATIONS ABOUT EMPIRICAL ANALYSES OF CREDIT SCORING

SUMMARY

A common problem in empirical analyses of credit scoring is that collected samples are not random, but instead they arise from a selection rule. In the general case, to correct the sample selection bias and obtain consistency a censored sample (including both granted and denied credits) needs to be used and a bivariate model with partial observability has to be estimated. In this article, we focus on this problem and its main contribution is to propose a procedure to obtain consistency in the restricted but frequent case in which the available sample is truncated (including only granted credits).

Key words: estimation of default probabilities, sample selection bias, consistent estimation with censored and truncated samples.