

W28
(9106)

Documento de Trabajo

9 1 0 6

**EL CONTROL DE LAS DECISIONES EN
LA INVERSA GENERALIZADA.**

LOS INDICADORES



José E. Navas López

Luis A. Guerras Martín

Luis E. Carretero Díaz

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES.- UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
Campus de Somosaguas. 28023 - MADRID

Esta publicación de Documentos de Trabajo pretende ser cauce de expresión y comunicación de los resultados de los proyectos de investigación que se llevan a cabo en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid. No obstante, la publicación está abierta a investigadores de otras instituciones que deseen difundir sus trabajos en ella.

Los Documentos de Trabajo se distribuyen gratuitamente a las Universidades e Instituciones de Investigación que lo solicitan. Asimismo, las peticiones personales pueden ser atendidas en la medida en que se disponga de ejemplares en existencia.

Se ruega a las personas e instituciones interesadas en solicitar ejemplares que utilicen el boletín de pedido que figura seguidamente.

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Boletín de Pedido.
Nombre de la persona o institución:
.....
Calle: nº
Ciudad:Distrito Postal:.....País:
Solicita una suscripción permantente <input type="checkbox"/>
(sólo Universidades e Instituciones de Investigación) <input type="checkbox"/>
Solicita los Documentos de Trabajo cuyos números se relacionan a con-
tinuación: _____

Enviar a:
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Vicedecano
Campus de Somosaguas. 28023 MADRID. ESPAÑA.

DEPARTAMENTO DE ORGANIZACION DE EMPRESAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

EL CONTROL DE LAS DECISIONES EN LA INVERSA GENERALIZADA.

LOS INDICADORES

José Emilio NAVAS LOPEZ
Luis Angel GUERRAS MARTIN
Luis Eugenio CARRETERO DIAZ

INDICE

- 1.- INTRODUCCION.
- 2.- LOS INDICADORES: CARACTERISTICAS.
- 3.- DISEÑO DE INDICADORES.
- 4.- RELACION ENTRE OBJETIVOS E INDICADORES.
 - 4.1.- Condición de máxima efectividad.
 - 4.2.- Indicadores no perfectos.
- 5.- GRAFICO DE INDICADORES.
- 6.- ELECCION DE INDICADORES.

1. INTRODUCCION.

El método de la matriz inversa generalizada (IG) es una técnica de análisis de las decisiones que presentan objetivos múltiples que han de satisfacerse de forma simultánea, basada en el álgebra matricial. Se sirve para ello de una desagregación de los objetivos en variables más operativas o subobjetivos.

Como ya ha sido puesto de manifiesto en anteriores trabajos, Navas, Guerras y Carretero (1986, 1987a y 1987b), el método presenta una serie de posibilidades operativas muy interesantes, así como ciertos inconvenientes, algunos de los cuales se consiguieron resolver en los citados trabajos.

El propósito del presente trabajo es enriquecer las posibilidades de tratamiento de objetivos por medio de la IG a través de unas nuevas variables, complementarias a dicho análisis, que se denominan indicadores (Ijiri, 1976). Su utilidad se manifiesta únicamente desde el punto de vista del control de las decisiones, es decir, como instrumento de comprobación de los resultados alcanzados.

Dado que los indicadores constituyen una técnica de control, su utilización puede estar referida al análisis de objetivos llevado a cabo por cualquiera de las técnicas de análisis multiobjetivo existente. En este sentido, Guerras (1989) presenta un detallado análisis de las técnicas disponibles en este campo. Sin embargo, centraremos nuestra atención en su aplicación en la utilización del método de la matriz inversa generalizada.

2. LOS INDICADORES: CARACTERISTICAS

En efecto, una forma de completar las posibilidades operativas que ofrece la IG consiste en utilizar los indicadores. Estos indicadores sirven de apoyo al análisis, siendo especialmente útiles para llevar a cabo el control de las decisiones, en concreto, mediante la comprobación de forma indirecta del cumplimiento de los objetivos.

Los indicadores son nuevas variables que se introducen en el análisis y que permiten conocer en cada momento la situación del sistema en cuanto a la cumplimentación de sus objetivos. A través de los indicadores se dispone de una aproximación al conocimiento del grado en que los distintos objetivos se están alcanzando. Por ello, evidentemente es necesario que exista algún tipo de vinculación entre indicador y objetivo, de tal forma que conociendo el valor del primero se deduzca, de alguna manera, el del objetivo. A medida que esta vinculación es mayor se dice que el indicador es más efectivo.

Evidentemente esta es una condición necesaria puesto que se trata de aproximarse al conocimiento de los niveles de consecución de un conjunto de objetivos pero no de forma directa, introduciéndose dicha vinculación en el modelo mediante algún tipo de relación matemática.

Por otro lado, es conveniente exigirle al indicador la característica de bajo coste en su determinación y fácil utilización en su aplicación para que el indicador pueda ser operativo y asequible. En efecto, la identificación del indicador debe requerir una escasa inversión para no caer en una situación en la que los costes de utilización superen a los rendimientos esperados, así como la de ser entendido claramente tanto por el decisor como por el analista del proceso. A medida que se cumplen estas condiciones se dice que el indicador es más eficaz.

Así, suponiendo que se pretende alcanzar un objetivo referido, por ejemplo al beneficio de una empresa, la cifra de ventas de la misma sería un buen indicador si es sencillo y poco costoso determinarla, y si su conocimiento permite aproximarse a la identificación del nivel de beneficio deseado.

Serán, por tanto, buenos indicadores aquellos en los que se den simultáneamente las características de efectividad y eficacia. Ambas características difícilmente aparecen de forma simultánea en la realidad, puesto que aquellos indicadores que proporcionan una mejor información son los que habitualmente requieren una mayor utilización de medios técnicos y humanos y, por consiguiente, un mayor coste.

3. DISEÑO DE INDICADORES

En general para un sistema de objetivos expresados en la forma matricial $AX=b$, se puede identificar un conjunto de indicadores w_i ($i=1, 2, \dots, k$), a través de los cuales se pretende conocer los niveles reales de cumplimentación de los objetivos integrados en el vector b . El conjunto de indicadores se representa por el vector W .

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_k \end{pmatrix} \quad (1)$$

Estos indicadores necesariamente deben de venir expresados en términos de los subobjetivos a través de una matriz arbitraria C , de dimensión $(k \times n)$ que depende de los

deseos y posibilidades del analista respecto del diseño de tales indicadores. En este sentido, influirá decisivamente la característica de eficacia respecto a la disponibilidad de mayor o menor número de indicadores. Así, el vector W se expresa en función de los subobjetivos como:

$$W = CX \quad (2)$$

Ejemplo 1. Sean x_1 , x_2 y x_3 las unidades vendidas en un periodo de tiempo de cada uno de los tres productos que fabrica una empresa. Siendo p_1 , p_2 y p_3 los precios unitarios de venta de cada uno de los productos, respectivamente, un conjunto de indicadores podría venir dado por la siguiente expresión:

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde el primer indicador w_1 representa el número total de unidades vendidas, el segundo w_2 la cifra total de ventas y el tercero w_3 las ventas realizadas del primer producto. De forma similar se podrían identificar otros indicadores.

4. RELACION ENTRE OBJETIVOS E INDICADORES

A través del conjunto de indicadores debe ser posible conocer, con una determinada aproximación, el valor de los objetivos de acuerdo con la característica de efectividad antes mencionada.

Será mejor aquel indicador que nos permita conocer con mayor fidelidad los niveles de consecución de los objetivos. A medida que ello es así se satisface en mayor grado la condición de efectividad. La situación ideal estaría representada por una relación unívoca entre los respectivos valores del indicador y el objetivo. En tal caso, se dice que el indicador es de máxima efectividad o perfecto.

Ejemplo 2: Una empresa tiene un único objetivo, el beneficio, que pretende conseguir a un nivel de 600 u. m.. Para ello cuenta con la fabricación y venta de dos productos, cuyos márgenes unitarios son de 10 y 12 u. m., respectivamente. Por determinadas razones la empresa no puede conocer directamente el grado de cumplimentación de su objetivo, por lo que decide utilizar un indicador: el peso total de los productos vendidos.

La expresión del objetivo es:

$$10 x_1 + 12 x_2 = 600 \quad (4)$$

Respecto al indicador, en principio, es preciso suponer que se cumple la característica de eficacia, es decir, es relativamente sencillo conocer el peso de los productos. Pero es imprescindible la característica de efectividad. En este sentido, parece lógico pensar que un aumento en el peso total de los productos vendidos implica mayor número de unidades vendidas y, por lo tanto, debe suponer un incremento en los beneficios.

En virtud de ello se puede establecer una cierta vinculación entre ambos. Pero lo que interesa es conocer el valor del objetivo con la mayor aproximación posible.

Si los pesos unitarios de cada uno de los productos fueran de 5kg y 4 kg. respectivamente y el peso total de los productos vendidos 240kg., la expresión del indicador sería:

$$5 X_1 + 4 X_2 = 240 \quad (5)$$

lo que implica que los valores máximos de cada subobjetivo podrían llegar hasta 48 y 60 unidades respectivamente, cuando el otro es cero. Ello provoca, llevando estas cantidades a la expresión del objetivo, que los niveles de éste oscilen entre 480 u. m. cuando $x_1 = 48$ y $x_2 = 0$, y 720 u. m. cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 60$.

Esto es, para un determinado valor del indicador se tienen unos valores mínimo y máximo entre los cuales necesariamente se debe encontrar el objetivo. El decisor juzgará si esta aproximación es suficiente o irrelevante para sus necesidades de control, aceptando o rechazando el indicador.

Pero supongamos que los pesos unitarios fueran 5kg. y 6kg. para cada tipo de producto, respectivamente. En tal caso la expresión del indicador sería:

$$5 X_1 + 6 X_2 = 240 \quad (6)$$

lo que implica que los valores máximos de los subobjetivos son de 48 unidades para x_1 y 40 unidades para x_2 . En esta situación, solo existe un único valor posible para el objetivo, 480 u. m.. Evidentemente ésta es una situación deseable puesto que para cada valor del indicador se tiene solo y exclusivamente un valor del objetivo. En este supuesto, la información es perfecta y es posible decir que no se alcanza en ningún caso el nivel deseado de beneficio.

4.1 Condición de máxima efectividad.

Independientemente de que se consiga o no el nivel de aspiración deseado, una situación como la indicada es la mejor entre las posibles en cuanto a la información facilitada, ya que permite un conocimiento exacto del nivel de cumplimiento del objetivo. Cuando esto ocurre se dice que el indicador es de máxima efectividad o perfecto.

La relación matemática que garantiza la existencia de indicadores perfectos viene dada por el siguiente teorema: la condición necesaria y suficiente para que los objetivos vengan unívocamente definidos por los indicadores es que cada fila de la matriz A de la expresión general de los objetivos $Ax=b$, sea una combinación lineal de las filas de la matriz C de la expresión general de los indicadores $Cx=W$. (Ijiri, 1976, p.74)

Evidentemente, las características de la realidad limitarán las posibilidades de diseño de indicadores perfectos, así como los costes de utilización -condición de eficacia- en que se incurran.

4.2 Indicadores no perfectos

En cualquier caso, la disponibilidad de un indicador, aunque no sea perfecto, aumenta el grado de conocimiento acerca del cumplimiento de un objetivo. Sea v el valor del objetivo que se alcanza en cada momento y por tanto, el valor de la variable que se pretende conocer, es decir, $v = ax$.

En el supuesto de existencia de restricciones técnicas, la presencia de indicadores reduce el intervalo de posibles valores de los objetivos que se puede conocer a priori, con solo resolver, para cada objetivo, el siguiente par de problemas de programación lineal:

$$\begin{array}{l} \text{Min. } v = ax \\ \text{sujeto a} \\ Bx \leq h \\ x \geq 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} \text{Max. } v = ax \\ \text{sujeto a} \\ Bx \leq h \\ x \geq 0 \end{array}$$

Así, $v_m \leq v \leq v_M$, siendo v_m y v_M los óptimos respectivos de cada uno de los modelos de programación lineal anteriores que se corresponden con los valores mínimo y máximo posibles del objetivo.

Si se conocen los niveles de los indicadores, $W=Cx$, esto limita aún más los valores que puedan adoptar las variables de decisión en los modelos anteriores. Resolviendo dichos modelos ampliados con el nuevo conjunto de restricciones, se obtiene el nuevo intervalo de variación para el objetivo que

normalmente será más reducido que el que se obtuvo sin el conocimiento de los indicadores. Evidentemente, estas nuevas ecuaciones de restricción limitan el espacio de las soluciones de los modelos anteriores. Siendo v'_m y v'_M los óptimos respectivos de los modelos ampliados, se debe cumplir que $v'_m \leq v \leq v'_M$, que necesariamente debe ser un intervalo, estrictamente incluido en el anterior.

Ejemplo 3 : Supongamos la existencia de dos factores productivos, -horas máquina (HM) y horas hombre (HH)-, que limitan la consecución del objetivo del ejemplo 2. Cada unidad del producto 1 requiere 2 HM y 1 HH y cada unidad del producto 2, 4HM y 1 HH. Se dispone, además, del indicador más arriba comentado, el peso de los productos con pesos unitarios de 5kg. y 4kg. respectivamente, para el cual se observa un valor de 200kg.

En principio, se puede tener una aproximación al valor del objetivo simplemente resolviendo los siguientes problemas de programación lineal:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min. } v = 10 x_1 + 12 x_2 & \text{y } \text{Max. } v = 10 x_1 + 12 x_2 \\
 \text{sujeto a} & \text{sujeto a} \\
 2 x_1 + 4 x_2 \leq 180 & 2 x_1 + 4 x_2 \leq 180 \\
 x_1 + x_2 \leq 60 & x_1 + x_2 \leq 60 \\
 x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

La solución de estos problemas proporciona los valores mínimo y máximo entre los que puede oscilar el beneficio, que son respectivamente:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} v_m = 0 \qquad \left. \begin{array}{l} x_1 = 30 \\ x_2 = 30 \end{array} \right\} v_M = 660$$

En el gráfico 1 aparece la representación del espacio de las soluciones para los modelos anteriores, así como los posibles niveles que puede alcanzar el objetivo mediante la resolución por la IG, niveles contenidos en la recta M. Esta recta es la representación de la imagen de la transformación inversa que proporciona la matriz inversa generalizada (Véase Navas, Guerras y Carretero (1987a)). Como se puede observar los niveles mínimo y máximo posibles de consecución del objetivo son $v_m = 0$ y $v_M = 660$.

Si se dispone de un indicador, aunque no sea perfecto, como es el caso del que ahora utilizamos, este intervalo de variación necesariamente se reduce. La expresión del indicador es:

$$5 x_1 + 4 x_2 = 200 \qquad (7)$$

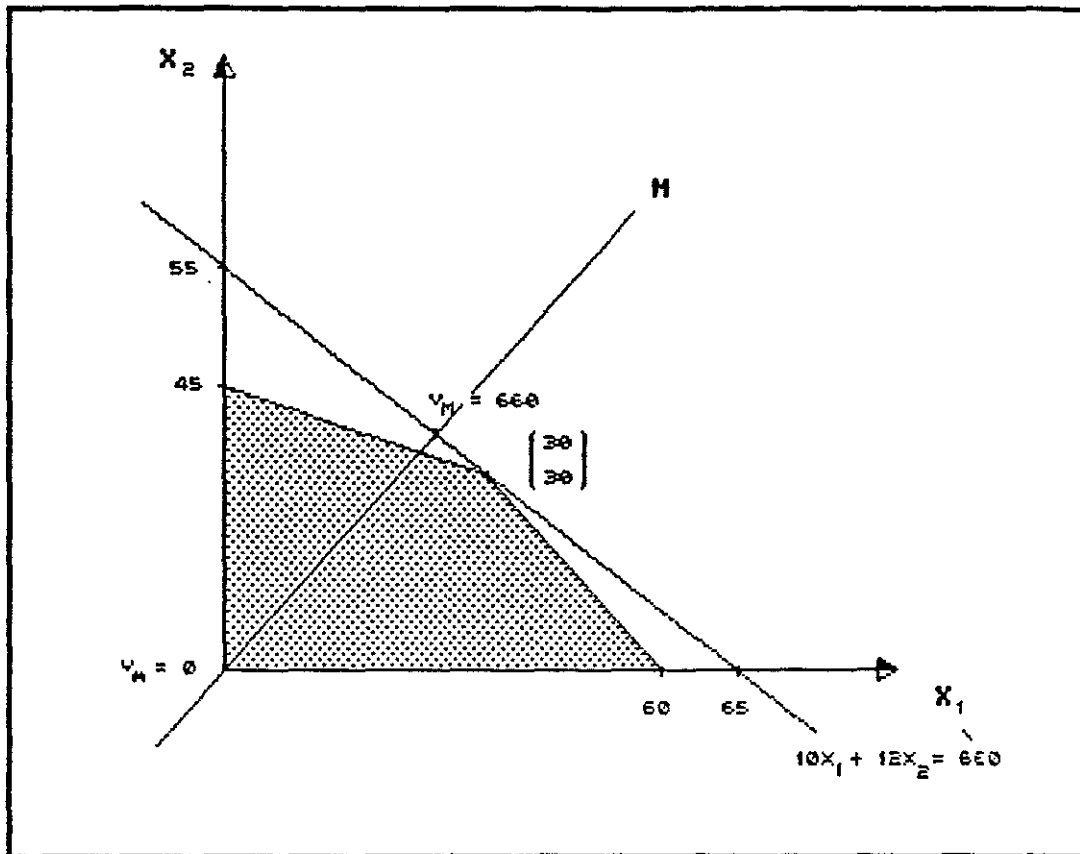


Gráfico 1: Espacio de las Soluciones

Con esta información, es fácil comprobar que los límites entre los que se debe hallar el objetivo varían entre 400 y 566,66 u. m. correspondientes a la resolución de los nuevos modelos ampliados, incorporando a cada uno de ellos la expresión (7). De donde se deduce que en ningún caso se alcanza el beneficio deseado, puesto que el nivel de aspiración preestablecido queda fuera del intervalo obtenido. En esta situación el decisor podrá tomar las medidas oportunas para reconducir el proceso.

En el gráfico 2 aparece la representación de este hecho que viene dado por las proyecciones sobre la recta M de los puntos de intersección de la expresión del indicador con el espacio de las soluciones. En dicha recta se pueden observar los valores v_m^i y v_m^f .

Evidentemente este intervalo es cada vez más reducido a medida que la recta del indicador se hace perpendicular a la representación de la recta M, quedando reducida a un único punto en el caso de que ambas sean ortogonales. (Condición de máxima efectividad).

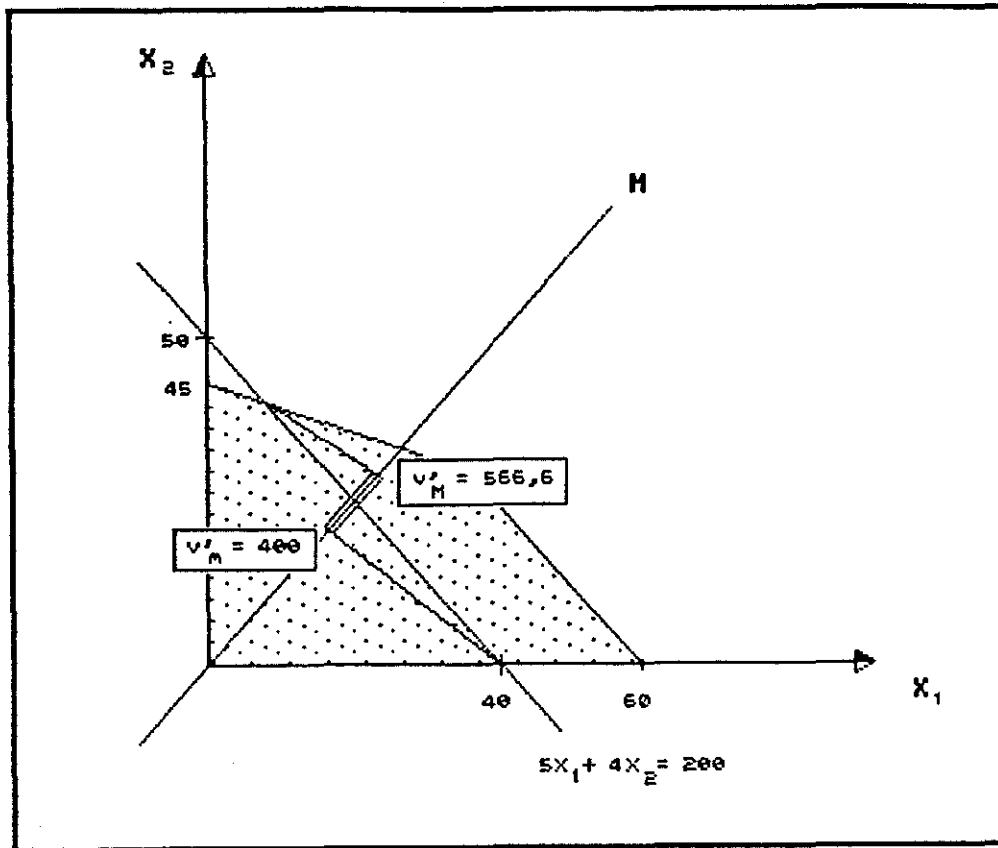


Gráfico 2: Representación del Indicador

5. GRÁFICO DE INDICADORES.

Se denomina gráfico de indicadores a la representación que pone de manifiesto las relaciones entre todos los posibles valores del indicador con los del objetivo. De esta forma, es posible conocer para cada valor del indicador cuales son los límites máximo y mínimo entre los que debe estar el objetivo. De igual forma, para un determinado nivel del objetivo es posible conocer el intervalo en que se debe encontrar el indicador. Esta generalización puede ser muy útil al decisor a efectos del control pues permite conocer las posibles variaciones en el cumplimiento de los objetivos.

El gráfico 3 recoge esta relación para el indicador dado por (7). Para identificar el área de relaciones indicador-objetivo, basta con trasladar los valores de los subobjetivos para cada uno de los puntos extremos del espacio de las soluciones a las expresiones del indicador y del objetivo. Así se obtendrán los nuevos puntos extremos del área que integra todas las posibles combinaciones entre w y v .

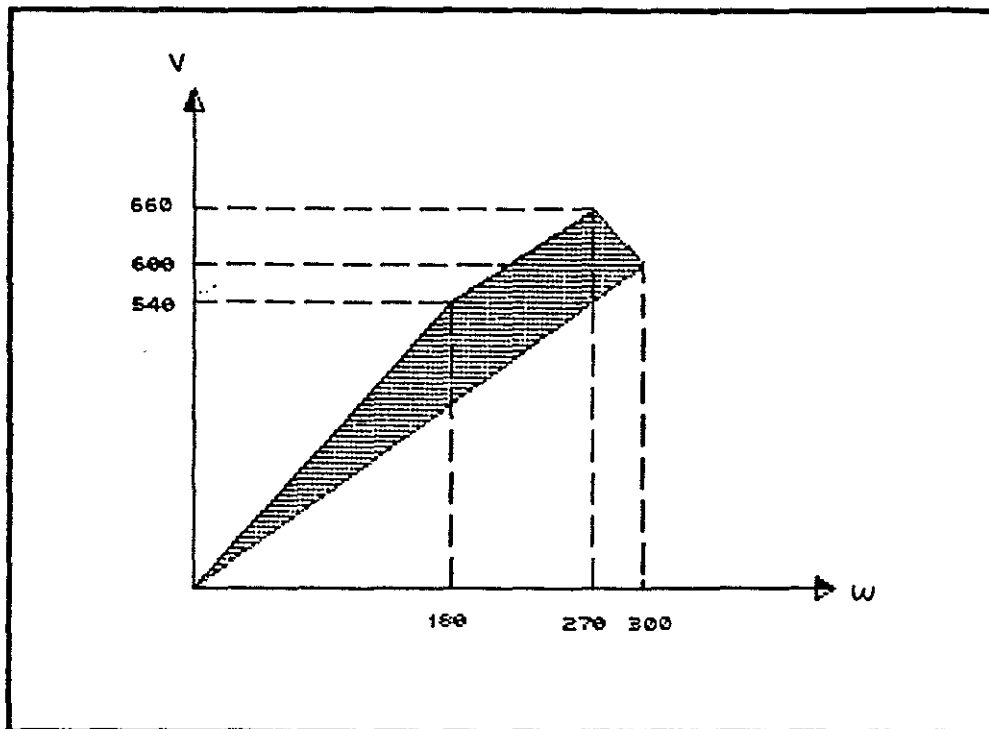


Gráfico 3: Gráfico de Indicadores

El máximo nivel que se puede obtener para el beneficio es de 660 u. m., que viene dado para un valor del indicador de 270 Kg. Sin embargo, $w = 270$ no asegura necesariamente la obtención del máximo beneficio. Como puede observarse en el gráfico, éste podría oscilar entre 540 y 660. A su vez, el máximo valor del indicador no corresponde al máximo del objetivo, sino a $v = 600$.

Por otra parte, un determinado valor del objetivo precisa que el indicador esté comprendido dentro de un cierto intervalo. Así, en el gráfico se observa como para un nivel del objetivo, por ejemplo, $v = 540$, el indicador debe oscilar entre 180 y 270.

Evidentemente, el indicador será mas perfecto a medida que el área del gráfico sea mas reducida, siendo perfecto cuando dicha superficie sea un segmento. En tal caso existe una relación unívoca entre cada valor del indicador y cada valor del objetivo, dándose la condición de máxima efectividad.

6. ELECCION DE INDICADORES

Existen varios criterios que miden la bondad de un indicador en cuanto al nivel de efectividad que se alcance. Entre ellos, se pueden citar aquél que minimiza el área del conjunto convexo del gráfico de indicadores o aquél que minimiza el segmento derivado de las proyecciones sobre la recta imagen de la transformación inversa obtenida por la IG.

Utilizaremos, sin embargo, el llamado coeficiente de divergencia γ , que mide el seno del ángulo que forman las rectas representativas del objetivo y el indicador. Este coeficiente viene dado por la expresión:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{a \cdot c^*}{\|a\| \|c\|}}$$

donde $\|a\| = \sqrt{aa^*}$, $\|c\| = \sqrt{cc^*}$, siendo a^* y c^* las traspuestas de a y c , respectivamente.

Evidentemente, a medida que el ángulo sea mayor el indicador es menos efectivo. La máxima efectividad se obtiene para un valor de $\gamma = 0$, situación que aparece cuando las rectas del objetivo y el indicador son paralelas, es decir, no existe ángulo. Por el mismo argumento, el indicador menos efectivo es aquél para el que $\gamma = 1$, caso en el cual las rectas son perpendiculares.

Sin embargo, a pesar de que $\gamma = 1$, ello no quiere decir que el indicador no sirva para nada, sino únicamente que es el peor posible, aunque siempre puede ayudar a reducir el intervalo de variación del objetivo. Es decir, aún siendo el peor posible, el indicador incrementa el grado de conocimiento sobre la cumplimentación del objetivo.

En el caso del último ejemplo que se estaba considerando el valor del coeficiente de divergencia es:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{\begin{pmatrix} 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}} \sqrt{\begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}} = 0,1482$$

por lo que puede ser considerado un indicador razonablemente bueno. Evidentemente, si se calculara el γ del indicador dado en (6) se obtendría el valor cero, al ser de máxima efectividad.

BIBLIOGRAFIA

Guerras, L. A. (1989) : "Gestión de Empresas y Programación Multiobjetivo". Esic-Market. Madrid.

Ijiri, Y. (1976) : "Análisis de Objetivos y Control de Gestión". ICE. Madrid.

Navas, J. E., Guerras, L. A. y Carretero, L. E. (1986) : "Un Método para el Tratamiento de las Restricciones en el Análisis de Objetivos mediante la Inversa Generalizada". Esic-Market. n 53, pp. 43-58.

Navas, J. E., Guerras, L. A. y Carretero, L. E. (1987a) : "Posibilidades y Limitaciones de la Inversa Generalizada en el Análisis de Objetivos". Esic-Market. n 56, pp. 57-73.

Navas, J. E., Guerras, L. A. y Carretero, L. E. (1987b) : "Un Algoritmo Arborescente para la obtención de Soluciones Enteras en la Inversa Generalizada". Esic-Market. n 57, pp. 37-49.