

W
28
(9112)

Documento de Trabajo

9 1 1 2

UNA METODOLOGIA PARA EL SEGUIMIENTO DE
OBJETIVOS DEFINIDOS SOBRE SERIES HISTORICAS:
EL CASO DEL CONTROL MONETARIO EN ESPAÑA



Miguel Jerez Méndez

Esta publicación de Documentos de Trabajo pretende ser cauce de expresión y comunicación de los resultados de los proyectos de investigación que se llevan a cabo en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid. No obstante, la publicación está abierta a investigadores de otras instituciones que deseen difundir sus trabajos en ella.

Los Documentos de Trabajo se distribuyen gratuitamente a las Universidades e Instituciones de Investigación que lo solicitan. Asimismo, las peticiones personales pueden ser atendidas en la medida en que se disponga de ejemplares en existencia.

Se ruega a las personas e instituciones interesadas en solicitar ejemplares que utilicen el boletín de pedido que figura seguidamente.

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Boletín de Pedido.
Nombre de la persona o institución:
.....
Calle: nº
Ciudad:Distrito Postal:.....País:
Solicita una suscripción permanente <input type="checkbox"/>
(sólo Universidades e Instituciones de Investigación) <input type="checkbox"/>
Solicita los Documentos de Trabajo cuyos números se relacionan a continuación: _____

Enviar a:
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Vicedecano
Campus de Somosaguas. 28023 MADRID. ESPAÑA.

**UNA METODOLOGIA PARA EL SEGUIMIENTO DE
OBJETIVOS DEFINIDOS SOBRE SERIES HISTORICAS:
EL CASO DEL CONTROL MONETARIO EN ESPAÑA**

Miguel Jerez Méndez (*)

Departamento de Economía Cuantitativa
Facultad de C. Económicas y Empresariales
Universidad Complutense

Resumen: En este artículo se describe una metodología para efectuar el seguimiento de objetivos económicos, definidos sobre un vector de series históricas que han sido observadas en el pasado. El procedimiento consiste en calcular, utilizando un filtro de Kalman, una senda de objetivos a corto plazo compatible con el modelo econométrico que describe la evolución de las series y con el objetivo final. De esta manera, se evitan algunos elementos arbitrarios característicos de los métodos que se utilizan en la actualidad. La aplicación del sistema se ilustra mediante un ejemplo relativo al objetivo monetario en España.

Abstract: In this paper we describe a methodology for tracking economic goals, defined over a vector of time series which has been observed in the past. The method consists in computing, by means of a Kalman Filter, the optimal interpolation of a series of short-term goals compatible with an econometric model for the series and with a long-term target value. By applying this method, we avoid some of the arbitrary aspects of previous empirical methods. This approach is illustrated by an example about the monetary growth goal in Spain.

Deseo agradecer los comentarios recibidos de Mercedes Gracia, Rafael Flores, Teodosio Pérez-Amaral, Sonia Sotoca y, especialmente, de Alfonso Novales, cuyo trabajo conjunto acerca del objetivo monetario me proporcionó la idea inicial de este artículo. Todos los posibles errores son responsabilidad mía.

(*) Departamento de Economía Cuantitativa, Facultad de C. Económicas y E. Campus de Somosaguas. 28023 MADRID. Tfno. 394-23-82.

1. Introducción.

Una tarea habitual para muchos agentes económicos es la *planificación estratégica*, entendida como el planteamiento de un conjunto de objetivos a medio o largo plazo (generalmente, un año) sobre determinadas variables de interés.

Desde un punto de vista estrictamente científico, no existen bases objetivas que permitan discriminar entre objetivos *correctos* y objetivos *erróneos*. En la práctica, sin embargo, la definición de objetivos suele ser fruto de un proceso de toma de decisiones bastante complejo y a veces sofisticado, en el que se combina la experiencia e intuición de los planificadores con grandes volúmenes de información estadística.

Una vez caracterizados los valores que se desea alcanzar para un conjunto de variables y, a medida que se va obteniendo información adicional acerca de la evolución de las mismas, se plantea una cuestión más: cómo valorar cada nuevo dato en el contexto de las metas globales que se han propuesto. Dentro de esta tarea, que nosotros llamaremos *seguimiento de objetivos*, pueden distinguirse tres cuestiones básicas:

- A) Cómo interpolar, con alguna propiedad estadística conveniente, una secuencia de objetivos a corto plazo que sean compatibles con toda la información de que se dispone cuando se elabora el objetivo final.
- B) Cómo actualizar la secuencia interpolada a medida que se obtiene nueva información.
- C) Bajo qué criterios puede evaluarse estadísticamente la *verosimilitud* de alcanzar el objetivo.

Obtener respuestas precisas para estas cuestiones es una tarea de cierta relevancia práctica ya que, si se efectúa un seguimiento adecuado, las desviaciones que se produzcan con respecto a los valores deseados podrán detectarse en una fase temprana del proceso y, en su caso, darán lugar a intervenciones correctoras o a la reconsideración de los objetivos originales.

En este trabajo se propone un procedimiento basado en el filtro de Kalman (1960) que permite resolver, con ciertas propiedades de optimalidad, el problema de predicción con restricciones lineales a partir de un modelo econométrico. Este resultado proporciona una respuesta objetiva a las cuestiones A), B) y C).

El artículo está organizado de la siguiente forma. En el apartado 2 se describen los fundamentos estadísticos de nuestra metodología. En síntesis, se parte de un modelo econométrico lineal y dinámico en forma reducida que, supuestamente, describe de forma adecuada la evolución temporal del vector de variables sobre el que se definen los objetivos analizados. Este modelo se convierte a una forma estándar en *Espacio de los Estados* (EE), a partir de la cual pueden resolverse los problemas de predicción pura y adaptación de la senda de previsiones al objetivo propuesto. En el apartado 3 se ilustra la metodología propuesta mediante un ejemplo relativo al objetivo anual de crecimiento de los Activos Líquidos en manos del Público (ALP) en España. En este ejemplo, se compara nuestra metodología con dos sistemas de seguimiento alternativos, uno de ellos basado en datos desestacionalizados y otro propuesto en Novales y Trujillo (1987). En ambos casos nuestro sistema presenta algunas ventajas. Por último, las conclusiones del trabajo se presentan en el apartado 4.

2. Interpolación y seguimiento de objetivos a corto plazo.

Sea $\{y_t\}_{t=-N+1}^0$ una secuencia de N valores de un vector de variables y . Supondremos que la evolución de y_t dentro de esta muestra, queda adecuadamente descrita por un modelo lineal del tipo:

$$y_t = \sum_{i=1}^p F_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^s G_j u_{t-j} + \sum_{k=0}^q E_k \epsilon_{t-k} \quad [1]$$

en donde:

y_t : Vector ($d \times 1$) de variables endógenas.

u_t : Vector ($r \times 1$) de variables exógenas.

ϵ_t : Vector ($d \times 1$) de perturbaciones aleatorias tales que:

$$\forall t: E(\epsilon_t) = 0$$

$$\forall t, \tau: E(\epsilon_t \epsilon_\tau') = Q_t \delta_{t\tau}$$

Q_t : Matriz ($d \times d$) definida no negativa.

$$\delta_{t\tau} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \tau \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

F_i : Matriz ($d \times d$) de parámetros correspondiente al retardo i -ésimo del vector de variables endógenas.

G_j : Matriz ($d \times r$) de parámetros correspondiente al retardo j -ésimo del vector de variables exógenas.

E_k : Matriz ($d \times d$) de parámetros correspondiente al retardo k -ésimo del vector de perturbaciones.

Por otra parte, consideraremos que en $t = 0$, se ha definido un objetivo z_T^* sobre los valores del vector de variables endógenas a lo largo de T intervalos muestrales, de forma que la relación entre la secuencia $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ y el objetivo final puede expresarse como:

$$z_T^* = \bar{H}_1 y_1 + \bar{H}_2 y_2 + \dots + \bar{H}_T y_T \quad [2]$$

en donde:

z_T^* : Vector de dimensión $(m \times 1)$ que resume los objetivos planteados.

\bar{H}_i : Matriz de dimensión $(m \times d)$, que refleja la contribución del vector y_i ($i=1, 2, \dots, T$) a la consecución del objetivo.

La cuestión que se plantea es: cómo calcular una senda de objetivos a corto plazo $\{y_t^*\}_{t=1}^T$ de tal forma que sea compatible con la historia pasada, el modelo [1] y el objetivo [2].

El modelo [1] puede escribirse en la forma de una ecuación de estado [ver apéndice A]:

$$x_t = \Phi x_{t-1} + \Gamma u_t + E \epsilon_t \quad [3]$$

$(t = -N+1, -N+2, \dots, 0)$

definiendo las componentes del vector x_t de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_t^1 &= y_t \\ x_t^2 &= y_{t-1} \\ &\dots \\ x_t^p &= y_{t-p+1} \\ x_t^{p+1} &= u_t \\ x_t^{p+2} &= u_{t-1} \\ &\dots \\ x_t^{p+s} &= u_{t-s+1} \\ x_t^{p+s+1} &= \epsilon_t \\ x_t^{p+s+2} &= \epsilon_{t-1} \\ &\dots \\ x_t^{p+s+q} &= \epsilon_{t-q+1} \end{aligned} \quad [4]$$

Por tanto, si se utiliza esta norma de conversión, el vector de estado del sistema equivalente tiene $p+s+q$ componentes¹ y las matrices Φ , Γ y E de la ecuación [3] quedan tal y como se muestra en el cuadro 1:

i	x_t^i	*												F	E			
1	y_t	F_1	F_2	...	F_{p-1}	F_p	G_1	G_2	...	G_{s-1}	G_s	z_1	z_2	...	z_{q-1}	z_q	G_0	z_0
2	y_{t-1}	1	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0
3	y_{t-2}	0	1	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p	y_{t-p+1}	0	0	...	1	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0
p+1	u_t	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	1	0
p+2	u_{t-1}	0	0	...	0	0	1	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0
p+3	u_{t-2}	0	0	...	0	0	0	1	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p+s	u_{t-s+1}	0	0	...	0	0	0	0	...	1	0	0	0	...	0	0	0	0
p+s+1	ϵ_t	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	1
p+s+2	ϵ_{t-1}	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	1	0	...	0	0	0	0
p+s+3	ϵ_{t-2}	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	1	...	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p+s+q	ϵ_{t-q+1}	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	1	0	0	0

Cuadro 1: Estructura del modelo [1] en forma de ecuación de estado.

Esta norma de conversión parece compleja pero, en realidad, resulta muy sencilla para la mayoría de los modelos que se utilizan en la práctica. Consideremos, por ejemplo, el siguiente proceso estocástico AR(2) escalar:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

Su ecuación de estado equivalente es:

$$\begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1}^1 \\ x_{t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

con $x_t^1 = y_t$ y $x_t^2 = y_{t-1}$. Tampoco la formulación de procesos mixtos plantea mayores problemas ya que, por ejemplo, un proceso ARMA(2,2):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2}$$

daría lugar a la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \\ x_t^3 \\ x_t^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & -\theta_1 & -\theta_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1}^1 \\ x_{t-1}^2 \\ x_{t-1}^3 \\ x_{t-1}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

con $x_t^1 = Y_t$, $x_t^2 = Y_{t-1}$, $x_t^3 = \epsilon_t$ y $x_t^4 = \epsilon_{t-1}$.

La esperanza condicional del vector de estado, dado el modelo [3] y la información disponible, es [ver apéndice A]:

$$x_{T|j} = \Phi^{T-j} x_{j|j} + \sum_{i=j+1}^T \Phi^{T-i} \Gamma u_i \quad [5]$$

$$(j = 1, 2, \dots, T-1)$$

$$(T > j)$$

en donde $x_{T|j}$ y $x_{j|j}$ son, respectivamente, los valores esperados de x_T y x_j condicionados a la información disponible hasta el instante j . Así mismo, la matriz de varianzas-covarianzas de $x_{T|j}$ será:

$$P_{T|j} = \Phi^{T-j} P_{j|j} \Phi^{T-j'} + \sum_{i=j+1}^T \Phi^{T-i} E Q_i E' \Phi^{T-i'} \quad [6]$$

$$(j = 1, 2, \dots, T-1)$$

$$(T > j)$$

en donde $P_{j|j}$ es la matriz de varianzas-covarianzas de $x_{j|j}^2$.

De acuerdo con la norma de conversión [4], las p primeras componentes de $x_{T|j}$ serán: $Y_{T|j}$, $Y_{T-1|j}$, \dots , $Y_1|j$. En estas condiciones, la esperanza condicionada de la combinación lineal que define el objetivo [ver expresión [2]] será:

$$z_{T|j} = H_T x_{T|j} \quad [7]$$

en donde $H_T = [\bar{H}_T, \bar{H}_{T-1}, \dots, \bar{H}_1, 0]$ es una matriz de dimensión $[m \times (p+s+q)]$. Así mismo, la matriz de varianzas-covarianzas de $z_{T|j}$ será:

$$B_{T|j} = H_T P_{T|j} H_T' \quad [8]$$

Las ecuaciones del ciclo de actualización del filtro de Kalman [ver apéndice A] permiten obtener, a partir de los resultados [5]-[8], la esperanza del vector de estado condicionada a la información disponible y al cumplimiento del objetivo, mediante las siguientes expresiones:

$$x_{T|j}^* = x_{T|j} + K_{T|j} (z_{T|j}^* - z_{T|j}) \quad [9]$$

$$K_{T|j} = P_{T|j} H_T' (B_{T|j})^+ \quad [10]$$

$$P_{T|j}^* = (I - K_{T|j} H_T) P_{T|j} (I - K_{T|j} H_T)' \quad [11]$$

en donde el superíndice "+" denota una inversa generalizada.

La ecuación [9] corrige la esperanza del vector de estado de acuerdo con una función lineal de la desviación entre el objetivo propuesto y la esperanza condicional del mismo, dada por la ecuación [7]. Esta desviación aparece en [9], premultiplicada por una matriz $K_{T|j}$, que se conoce como la ganancia del filtro. La ganancia definida en [10] tiene la propiedad de minimizar, bajo hipótesis estándar [ver apéndice A] la traza de la matriz de covarianzas [11]. Este resultado se demuestra formalmente en el apéndice B.

Por tanto, el filtro proporciona la mejor estimación lineal insesgada (BLUE) del vector de estado, condicionada al cumplimiento del objetivo y a la información disponible. Además, si ϵ_t puede describirse de acuerdo con una distribución de probabilidad normal, $x_{T|j}^*$ será el estimador óptimo (máximo-verosímil) de x_t .

La corrección efectuada en [9] admite una interpretación intuitiva interesante. La ganancia del filtro es directamente proporcional a la incertidumbre que afecta a $x_{T|j}$ (medida por la matriz $P_{T|j}$). Por tanto,

es óptimo aplicar una corrección mayor a aquellas componentes de $x_{T|j}$ que estén afectadas por una mayor incertidumbre. Como veremos más adelante, esta propiedad tiene importantes implicaciones prácticas para el proceso de seguimiento.

El vector actualizado $x_{T|j}^*$ es siempre compatible con el objetivo propuesto. Para comprobarlo, basta sustituir las expresiones [7], [8] y [10] en [9]. Se obtiene:

$$x_{T|j}^* = x_{T|j} + P_{T|j} H_T' (H_T P_{T|j} H_T')^{-1} (z_T^* - H_T x_{T|j}) \quad [12]$$

y, premultiplicando [12] por H_T , resulta:

$$H_T x_{T|j}^* = H_T x_{T|j} + (z_T^* - H_T x_{T|j}) = z_T^*$$

Por tanto, de acuerdo con [4], los p primeros vectores que componen $x_{T|T}$ podrán interpretarse como una secuencia de valores esperados $\{y_t|j\}_{t=1}^T$ restringidos al cumplimiento del objetivo z_T^* .

Para evaluar estadísticamente el grado de verosimilitud del cumplimiento del objetivo, puede contrastarse la hipótesis:

$$H_0: x_{T|j}^* = x_{T|j} \quad [13]$$

contra la alternativa:

$$H_1: x_{T|j}^* \neq x_{T|j}$$

Por tanto, si H_0 es cierta, el vector de estado compatible con el cumplimiento del objetivo es igual al vector de predicciones. En cambio, si H_1 es cierta, la restricción de cumplimiento del objetivo habrá dado lugar a que las variables sobre las que se definen objetivos se desvíen de su senda de evolución prevista.

El contraste se construye de la siguiente forma. Sea:

$$\begin{aligned} \epsilon_{T|j}^* &\triangleq x_{T|j}^* - x_{T|j} && \text{que, por [9]:} \\ &= K_{T|j} (z_T^* - z_{T|j}) \end{aligned} \quad [14]$$

Bajo la hipótesis nula se cumple $E(\epsilon_{T|j}^* | z^j) = 0$ y, por tanto:

$$\begin{aligned} \text{COV}(\epsilon_{T|j}^*) &\triangleq E(\epsilon_{T|j}^* \epsilon_{T|j}^{*'} | z^j) \\ &= E[K_{T|j} (z_T^* - z_{T|j}) (z_T^* - z_{T|j})' K_{T|j}' | z^j] \\ &= K_{T|j} B_{T|j} K_{T|j}' \end{aligned} \quad [15]$$

Si las esperanzas $x_{T|j}^*$ y $x_{T|j}$ son normales o asintóticamente normales, se cumple:

$$\epsilon_{T|j}^{*'} \text{COV}(\epsilon_{T|j}^*)^{-1} \epsilon_{T|j}^* \overset{A}{\sim} \chi^2_r \quad [16]$$

en donde "r" es el rango de $\text{COV}(\epsilon_{T|j}^*)$.

Una versión del anterior contraste, que tendrá un comportamiento más apropiado en muestras finitas, consiste en aplicar al anterior estadístico una corrección de grados de libertad. En este caso, tendremos:

$$\frac{\hat{\epsilon}_{T|j}^{*'} \hat{\text{COV}}(\hat{\epsilon}_{T|j}^*)^{-1} \hat{\epsilon}_{T|j}^*}{r} \sim F_{r,g} \quad [17]$$

en donde "^" denota que los momentos son muestrales y "g" son los grados de libertad a que da lugar la muestra.

En la mayor parte de los casos, sólo se deseará contrastar la ausencia de diferencias significativas en una parte del vector de estado. La derivación de un test para este caso particular resulta inmediata a partir de [17], premultiplicando $\hat{\epsilon}_{T|j}^{*}$ por una matriz de selección adecuada.

Por último, la formulación EE requiere que el observador en cada instante sea una función lineal del vector de estado en ese mismo

instante. En el planteamiento anterior, esto se cumple sólo si el orden del operador autorregresivo de [1] es mayor o igual que el horizonte temporal de seguimiento, esto es, si $p \geq T$. Si no ocurre así, es necesario ampliar la dimensión del vector del estado para recoger más retardos del vector de variables endógenas. El siguiente ejemplo puede ayudar a aclarar esta cuestión:

Supongamos que el seguimiento se aplica a una variable escalar, que evoluciona en el tiempo de acuerdo con un proceso AR(1):

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \quad [18]$$

($t = -N+1, -N+2, \dots, 0$)

y supongamos que, al cabo de cuatro períodos, se desea cumplir la condición:

$$z_4^* = Y_4 + Y_3 + Y_2 + Y_1 \quad [19]$$

El modelo [18] es admisible como ecuación de estado, pero no contiene los suficientes retardos de y_t para utilizar [19] como observador del sistema. En este caso, la ecuación de estado adecuada será:

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ Y_{t-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ Y_{t-3} \\ Y_{t-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t \quad [20]$$

($t = -N+1, -N+2, \dots, 0$)

y, para $t = 4$, el sistema [19]-[20] queda:

$$\begin{bmatrix} Y_4 \\ Y_3 \\ Y_2 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_3 \\ Y_2 \\ Y_1 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_4$$

$$z_4^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_4 \\ Y_3 \\ Y_2 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la ecuación [20] contiene el número de retardos necesario para construir el observador. En general, el vector de estado puede ampliarse hasta incluir tantos retardos como sea necesario de cada una de las variables y , por tanto, nuestra técnica es aplicable con independencia de la estructura de retardos de [1].

En resumen, a partir de un modelo econométrico expresado en la forma EE, los resultados anteriores proporcionan:

- Un procedimiento general para predecir el valor de las componentes del vector de estado.
- Un procedimiento óptimo para ajustar las predicciones al cumplimiento de un objetivo, definido como una combinación lineal de los valores del vector de estado.
- Un contraste de la hipótesis de que las previsiones libres y restringidas son estadísticamente indistinguibles, dado el conjunto de información disponible. Si esta hipótesis no se rechaza, puede concluirse que el objetivo planteado resulta "verosímil" desde un punto de vista estadístico.

Esta metodología constituye, por tanto, una alternativa viable a los procesos de seguimiento basados en técnicas informales. En el apartado 3 ilustraremos esta afirmación mediante un ejemplo.

3. El seguimiento del objetivo monetario.

Para ilustrar la aplicación de la técnica descrita en los apartados anteriores, utilizaremos un ejemplo basado en el objetivo anual de crecimiento de los ALP, utilizando como período de referencia el año 1988.

Este seguimiento resulta especialmente complejo debido a la estacionalidad de la serie mensual de ALP, por lo que cada dato observado puede interpretarse como la suma o producto de dos componentes: el valor *subyacente* de la variable y un componente estacional. Por tanto, la componente estacional deberá ser considerada de forma que no afecte indebidamente al seguimiento dando lugar, por ejemplo, a reacciones correctoras excesivas, insuficientes o, incluso, en sentido contrario al correcto.

3.1. El seguimiento basado en series desestacionalizadas.

Una técnica que se utiliza habitualmente para el seguimiento del objetivo monetario, consiste en comparar la evolución de una versión desestacionalizada de la serie de ALP con una senda de objetivos mensuales. Esta senda se calcula mediante la expresión:

$$ALP_t^* = ALP_0 (1+\theta)^{t/12} \quad [21]$$

(t = 1, 2, ... , 12)

en donde:

- ALP_t^{*} : Valor de la senda-objetivo correspondiente al mes t.
- ALP₀ : ALP en el mes 0 (Diciembre del año anterior).
- θ : Objetivo de crecimiento de ALP en tasa interanual (tanto por uno) sobre el mes 0.

Por razones de conveniencia, llevaremos a cabo el análisis utilizando tasas logarítmicas. Tomando logaritmos neperianos a ambos lados de [21] se obtiene:

$$\log ALP_t^* - \log ALP_0 = \frac{t}{12} \log(1+\theta) \quad [22]$$

(t = 1, 2, ... , 12)

y, puesto que $\log(1+\theta)$ es la *tasa logarítmica equivalente*³ (TLE) a un crecimiento al $100 \times \theta\%$, podemos escribir [22] como:

$$\log ALP_t^* - \log ALP_0 = \frac{t}{12} TLE(\theta) \quad [23]$$

(t = 1, 2, ... , 12)

Es decir, se pretende que la tasa logarítmica acumulada hasta el mes i sea igual a la parte proporcional correspondiente (i doceavos) de la TLE al objetivo anual. En el gráfico 1 se ilustra este esquema de seguimiento del objetivo de ALP, con datos de 1988. Como puede observarse:

- La senda objetivo es lineal y está enmarcada dentro de un cono, que surge de aplicar la regla de proyección de objetivos a los valores extremos de la banda 8%-11% que define el objetivo de crecimiento interanual de ALP para 1988.
- El perfil de la serie desestacionalizada (ALPd) se aproxima más a una forma lineal que el de ALP y, por tanto, se ajusta mejor a la senda objetivo que la serie original.
- El crecimiento de ALP superó en más de un punto el límite superior de la banda⁴. Las mayores desviaciones se observan en los períodos Marzo-Julio y Octubre-Diciembre.

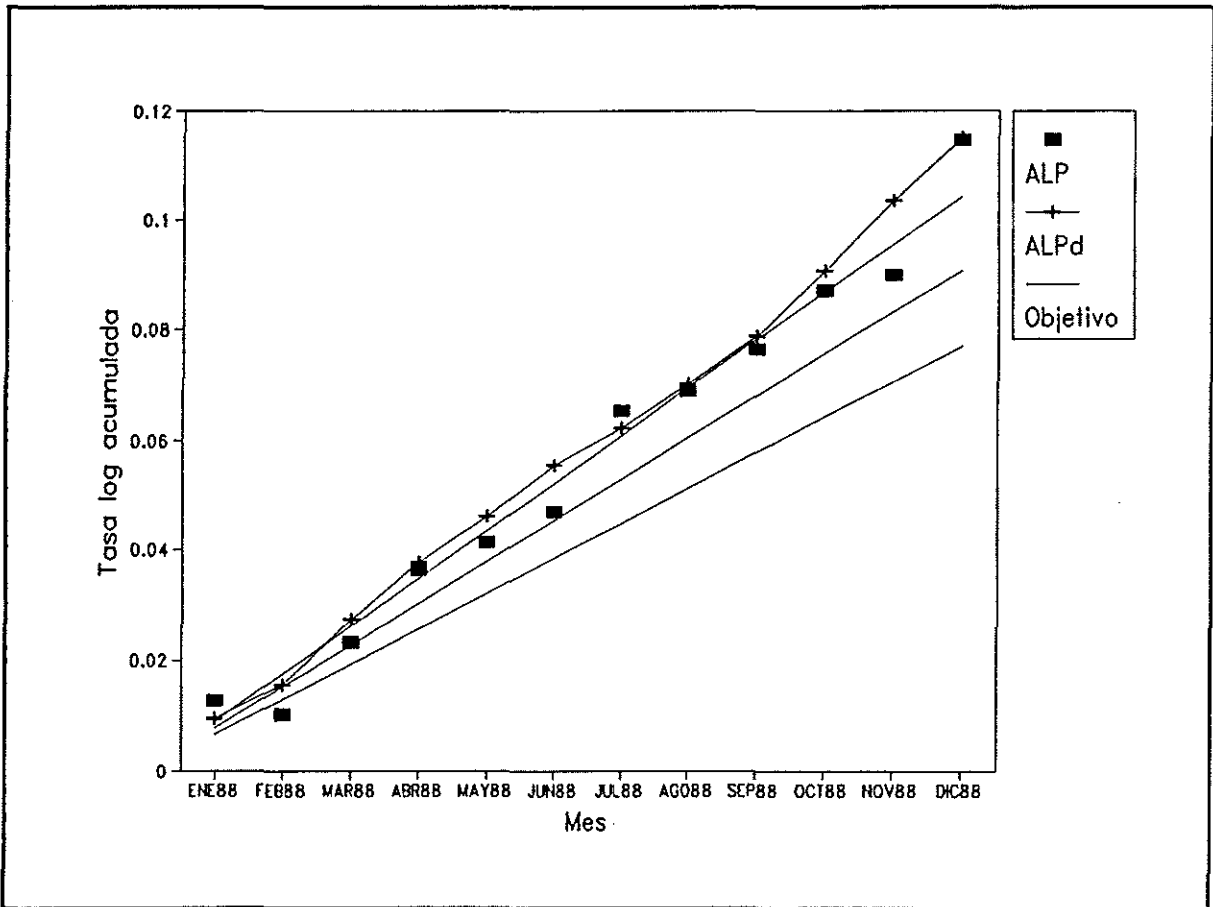


Figura 1: Sistema de seguimiento estándar.

Para aplicar nuestro método es necesario disponer, en primer lugar, de un modelo que describa la evolución de la variable objeto de seguimiento. Para construirlo, hemos utilizado una muestra que incluye los valores de ALP desde Enero de 1979 hasta Diciembre de 1987 (ver apéndice C). El análisis estadístico de estos datos permitió concluir que una representación univariante razonable para la serie sería⁵:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla_{12} \log \text{ALP}_t &= (1 - .90 B)(1 - .49 B^{12}) a_t & [24] \\ & \quad (.046) \quad (.10) \\ \hat{\sigma}_a \times 100 &= .44 \end{aligned}$$

en donde B es el operador *retardo*, definido de forma que $B^i x_t = x_{t-i}$ y ∇ es el operador *diferencia*: $\nabla^j \Delta (1-B)^j$; $\nabla_i^j \Delta (1-B^i)^j$

Definiendo: $y_t \Delta \nabla \log \text{ALP}_t$, el modelo [24] puede escribirse como:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + y_{t-12} - y_{t-13} \\ &+ a_t - .90 a_{t-1} - .49 a_{t-12} + .441 a_{t-13} \end{aligned} \quad [25]$$

La ecuación [25] puede expresarse fácilmente en forma EE utilizando la norma de conversión definida por las ecuaciones [4] u otra alternativa. Aplicando las expresiones [5]-[11] para $T = 12$ y utilizando la condición de cumplimiento del objetivo:

$$z_{12}^* = \sum_{t=1}^{12} y_t \quad [26]$$

como observador del sistema, se obtiene:

- Una secuencia de predicciones de la tasa logarítmica intermensual $\{\hat{y}_t|_0\}_{t=1}^{12}$ para todos los meses de 1988.
- Una senda de objetivos a corto plazo $\{\hat{y}_t|_0^*\}_{t=1}^{12}$, que pueden interpretarse como predicciones de y_t condicionales al modelo [24], a la muestra y al cumplimiento del objetivo interanual.
- Las matrices de varianzas-covarianzas, tanto de las predicciones como de los objetivos interpolados.

En el cuadro 2 se muestran los resultados del proceso de previsión e interpolación de objetivos en tasas acumuladas, definidas como:

$$\hat{Y}_{t|0} \triangleq \sum_{i=1}^t \hat{Y}_{i|0} \quad [27]$$

$$\hat{Y}_{t|0}^* \triangleq \sum_{i=1}^t \hat{Y}_{i|0}^* \quad [28]$$

La proyección se ha realizado para los dos extremos de la banda-objetivo (8%-11%), así como para el correspondiente valor medio (9.5%). En el gráfico 2 se muestra la evolución de la tasa acumulada, sus predicciones y la senda de objetivos mensuales. Como puede verse:

- La senda-objetivo interpolada reproduce fielmente la pauta de variación de los datos y sus valores son sustancialmente menores que la senda de previsiones lo cual indica, en principio, que el objetivo planteado resulta ambicioso. Por otra parte, el estadístico $F = 0.2663$ no descarta la igualdad entre las sendas $\hat{Y}_{t|0}^*$ e $\hat{Y}_{t|0}$ con un nivel de confianza del 95%.
- Las observaciones están más cerca de la banda-objetivo que de las previsiones. Si el modelo que se emplea para realizar las predicciones se considera "correcto", esto indicaría que la intervención reguladora del Banco de España ha sido eficaz, en el sentido de desviar la trayectoria de la variable de su tendencia histórica.
- La tasa acumulada tiende a diverger de la banda-objetivo, especialmente a partir del mes de Julio.

Mes	Y_t	$\hat{Y}_{t 0}$	Banda Inf.	$\hat{Y}_{t 0}^*$	Banda Sup.
Ene88	0.0126	0.0124	0.0083	0.0093	0.0102
Feb88	0.0102	0.0142	0.0058	0.0077	0.0096
Mar88	0.0232	0.0279	0.0148	0.0179	0.0208
Abr88	0.0364	0.0411	0.0233	0.0274	0.0315
May88	0.0414	0.0484	0.0257	0.0309	0.0361
Jun88	0.0469	0.0596	0.0319	0.0383	0.0446
Jul88	0.0654	0.0799	0.0471	0.0547	0.0622
Ago88	0.0689	0.0867	0.0485	0.0573	0.0660
Sep88	0.0765	0.0963	0.0528	0.0629	0.0728
Oct88	0.0871	0.1081	0.0592	0.0705	0.0816
Nov88	0.0899	0.1108	0.0565	0.0690	0.0814
Dic88	0.1145	0.1367	0.0770	0.0908	0.1044
% Anual	12.14%	14.65%	8.00%	9.50%	11.00%
F(12,93)	0.2663				

Cuadro 2: Observaciones, previsiones y objetivos en tasa logarítmica acumulada (datos no desestacionalizados).

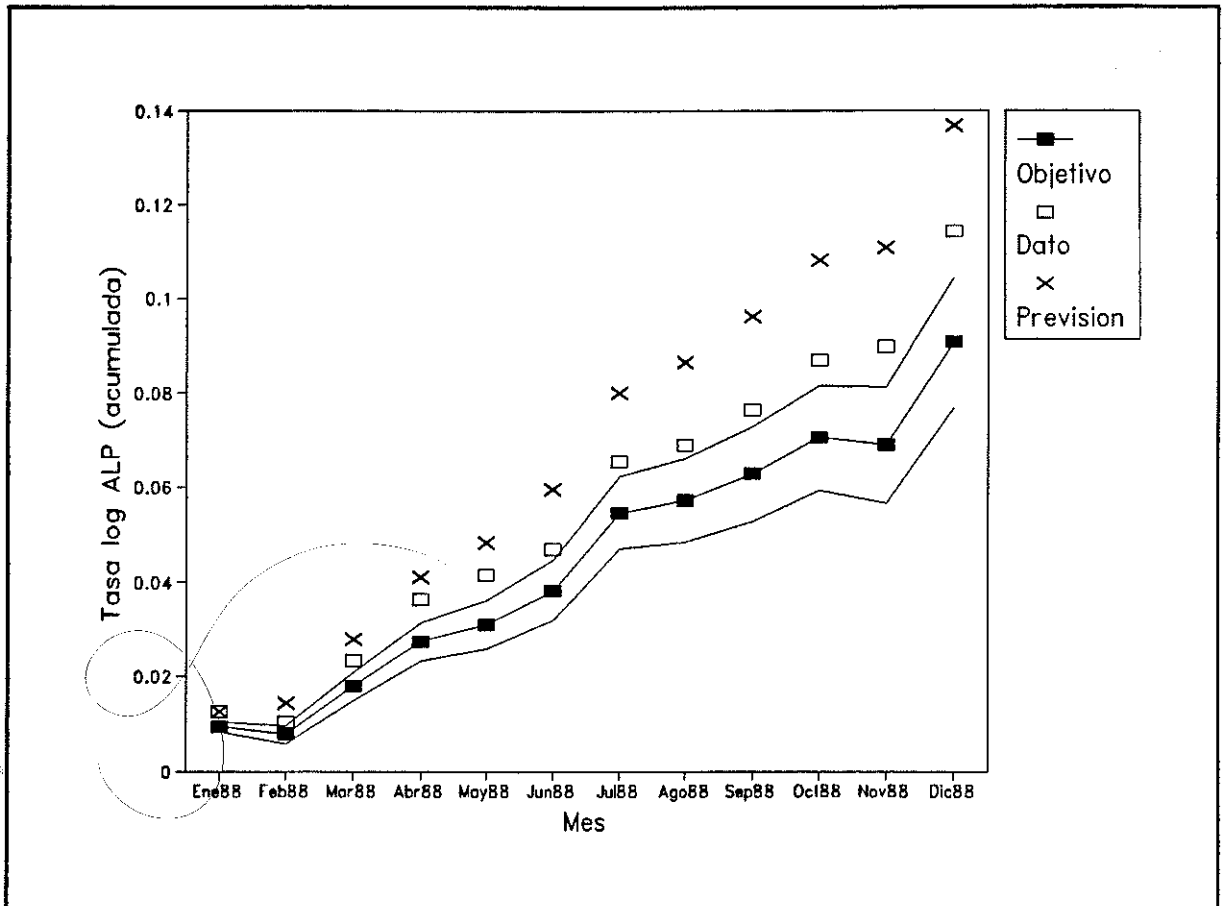


Figura 2: Series mensuales de objetivos, datos y previsiones.

Los resultados obtenidos en esta proyección no son muy distintos de los que se derivan del proceso de seguimiento estándar [ver gráfico 1]. En cambio, la actualización de la senda interpolada sí permite extraer nuevas conclusiones acerca del efecto de cada nuevo dato sobre la posibilidad de alcanzar el objetivo. En el gráfico 3 se muestran las sendas objetivo correspondientes a los conjuntos de información Enero de 1979-Diciembre de 1987, Enero de 1979-October de 1988.

Como puede observarse la incorporación de nuevas observaciones tiene, para la mayor parte de los meses de año, el efecto de reducir la pendiente de la senda objetivo. Esto indica que los correspondientes datos son desfavorables, ya que reducen la tasa media intermensual de crecimiento de la cantidad de dinero compatible con la consecución del objetivo para el resto de los meses del año. Sólo las observaciones de Febrero y Junio dan lugar a sendas compatibles con la última proyección realizada.

Analizando la variación del estadístico F [ver (17)] calculado para cada uno de los conjuntos de información, podrían extraerse conclusiones similares, ya que cada nuevo dato tiende a aumentar el valor del estadístico hasta que, hacia el final de horizonte de seguimiento, la hipótesis nula se rechaza con un nivel de confianza del 99%. No mostramos estos resultados ya que no aportan mucho a lo ya presentado.

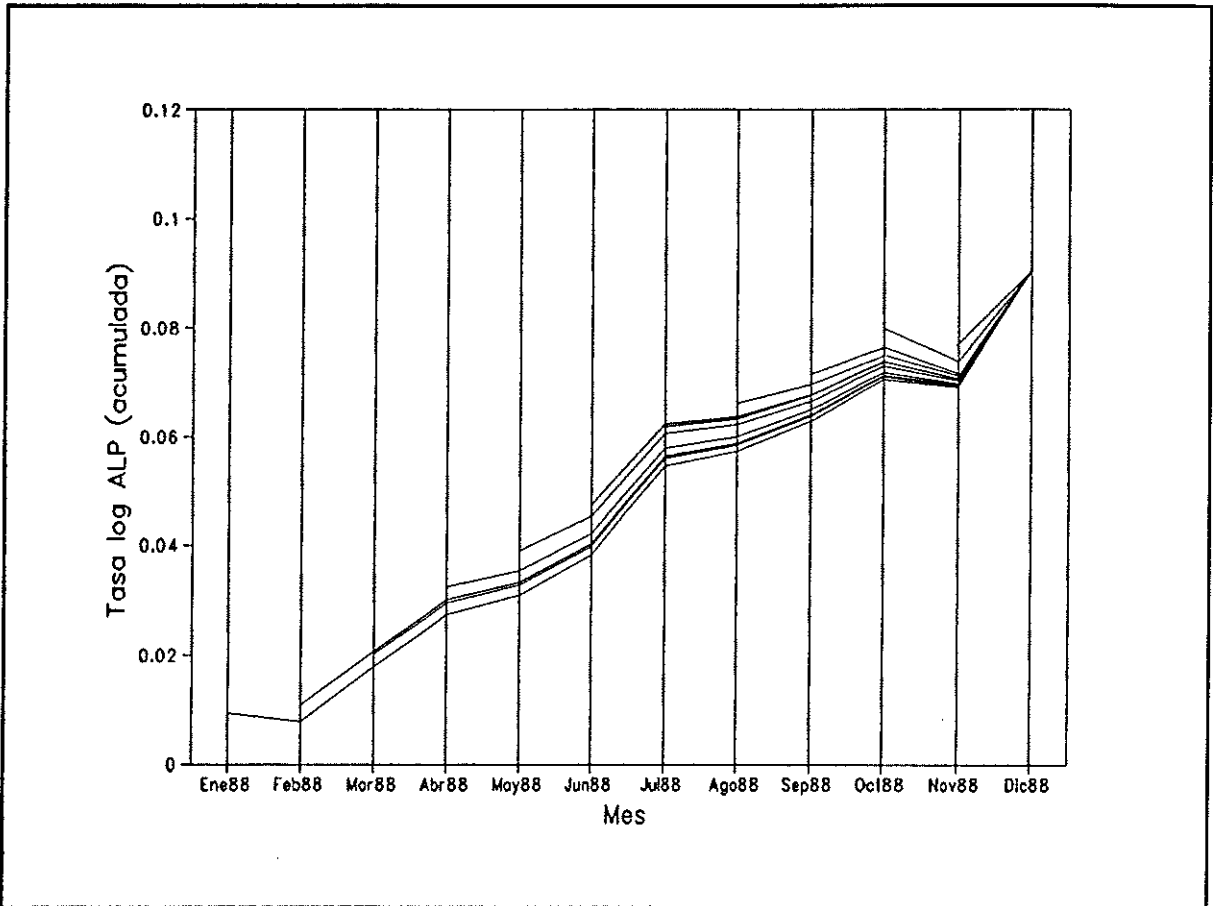


Figura 3: Variación de la serie de objetivos mensuales.

3.2. La propuesta metodológica de Novales y Trujillo (1987).

En Novales y Trujillo (1987), en adelante N-T, se realizan algunas críticas al método estándar de seguimiento del objetivo monetario que ha sido descrito en el apartado anterior [ecuación [23]].

Uno de los argumentos de N-T alude a que trabajar con datos desestacionalizados introduce en el proceso de seguimiento un importante elemento de arbitrariedad, derivado de la necesidad de estimar la correspondiente componente estacional mediante un procedimiento *ad-hoc*⁶. Además, el Banco de España reestima con cierta frecuencia la componente estacional de ALP, lo cual da lugar a una reconstrucción *a posteriori* de la serie desestacionalizada. En nuestra opinión, esta práctica puede resultar inconveniente para los agentes interesados reproducir el seguimiento "oficial" del objetivo monetario (Sociedades Mediadoras, Bancos, etc.).

Otro elemento sustancial de la crítica de N-T se centra en la linealidad de la senda objetivo. Por esta razón, y para poder efectuar el seguimiento sin necesidad de desestacionalizar, N-T proponen basar el seguimiento en una serie de predicciones obtenidas a partir de un análisis estadístico de los datos disponibles. Estas predicciones se ajustan al cumplimiento del objetivo mediante el criterio:

$$m_{t|0} = \hat{Y}_{t|0} + \frac{1}{12} (z_{12}^* - \sum_{i=1}^{12} \hat{Y}_{i|0}) \quad [29]$$

(t = 1, 2, ..., 12)

en donde:

- $\hat{Y}_{t|0}$: Predicción de la tasa logarítmica intermensual de variación de ALP correspondiente al mes t, obtenida a partir de la información disponible hasta el instante 0.
- z_{12}^* : Objetivo anual de crecimiento para ALP (en tasa logarítmica equivalente).
- $m_{t|0}$: Objetivo de crecimiento de ALP en el mes t.

Como puede observarse, la expresión [29] es un caso particular del criterio de actualización [9] que, este caso, quedaría:

$$\hat{y}_{t|0}^* = \hat{y}_{t|0} + k_{t|0} (z_{12}^* - \sum_{i=1}^{12} \hat{y}_{i|0}) \quad [30]$$

(t = 1, 2, ... , 12)

Las expresiones [29] y [30] pueden plantearse de forma equivalente en términos de la tasa de variación acumulada, dando lugar a:

$$M_{t|0} = \hat{y}_{t|0} + \frac{t}{12} (z^* - \hat{y}_{12|0}) \quad [31]$$

$$\hat{y}_{t|0}^* = \hat{y}_{t|0} + K_{t|0} (z^* - \hat{y}_{12|0}) \quad [32]$$

(t = 1, 2, ... , 12)

en donde $\hat{y}_{t|0}^*$ e $\hat{y}_{t|0}$ se definen como en [27]-[28] y:

$$M_t \triangleq \sum_{i=1}^t m_i ; K_{t|0} \triangleq \sum_{i=1}^t K_{i|0} \quad [33]$$

El mecanismo de seguimiento propuesto en el apartado 2 tiene, por tanto, una estructura similar al de N-T, pero lo generaliza y justifica desde un punto de vista estadístico.

La característica más discutible del método de N-T es el criterio uniforme que se emplea para repartir la desviación prevista entre las previsiones mensuales. Los autores reconocen que: "El criterio lineal utilizado ha sido escogido por su sencillez ... Podría encontrarse una regla que recogiera de alguna forma elementos de heterogeneidad de la serie". La metodología expuesta en este artículo proporciona una respuesta a esta cuestión, ya que la ganancia del filtro de Kalman constituye un criterio objetivo para distribuir la desviación prevista entre las previsiones mensuales. En términos intuitivos, cada previsión se corrige tanto más cuanto mayor sea la incertidumbre que le afecta, medida en términos de su varianza estimada. Esta propiedad resulta adecuada para el seguimiento, ya que las primeras previsiones reciben una

corrección menor y, por tanto, se tiende a evitar reacciones excesivas en los primeros periodos.

En el gráfico 4 se comparan los coeficientes de reparto obtenidos de acuerdo con la regla de N-T y a partir del filtro de Kalman. Como puede observarse, nuestro método corrige las previsiones tanto más cuanto más alejadas estén del origen de previsión, esto es, cuanto mayor sea la incertidumbre asociada a las mismas.

En este ejemplo concreto, no hay mucha diferencia entre ambos criterios. Esto se debe a que la varianza de las previsiones no crece rápidamente a medida que se avanza en el horizonte de predicción. No obstante, nuestro planteamiento resulta más completo desde un punto de vista estadístico, ya que proporciona las matrices de covarianzas de las secuencias de previsiones libres y ajustadas, lo cual permite la realización de contrastes como [17].

Por último cabe señalar que, tanto el método de seguimiento estándar [ecuación [23]] como el de N-T [ecuación [31]], no permiten efectuar el seguimiento conjunto de un vector de objetivos (por ejemplo: inflación, déficit de balanza de pagos, déficit público, etc). Nuestro planteamiento, en cambio, puede aplicarse a partir de un modelo de relación multivariante, de manera que permite el seguimiento conjunto de un vector de objetivos. Esta opción resultará relevante cuando las variables sobre las que se definen objetivos estén relacionadas entre sí, tanto de forma estática (a través de la matriz de covarianzas residual del modelo simultáneo) como dinámica (a través de las matrices de parámetros). En ambos casos, el objetivo que se defina para cada una de las variables afectará, en general, a la probabilidad de alcanzar el resto de los objetivos considerados.

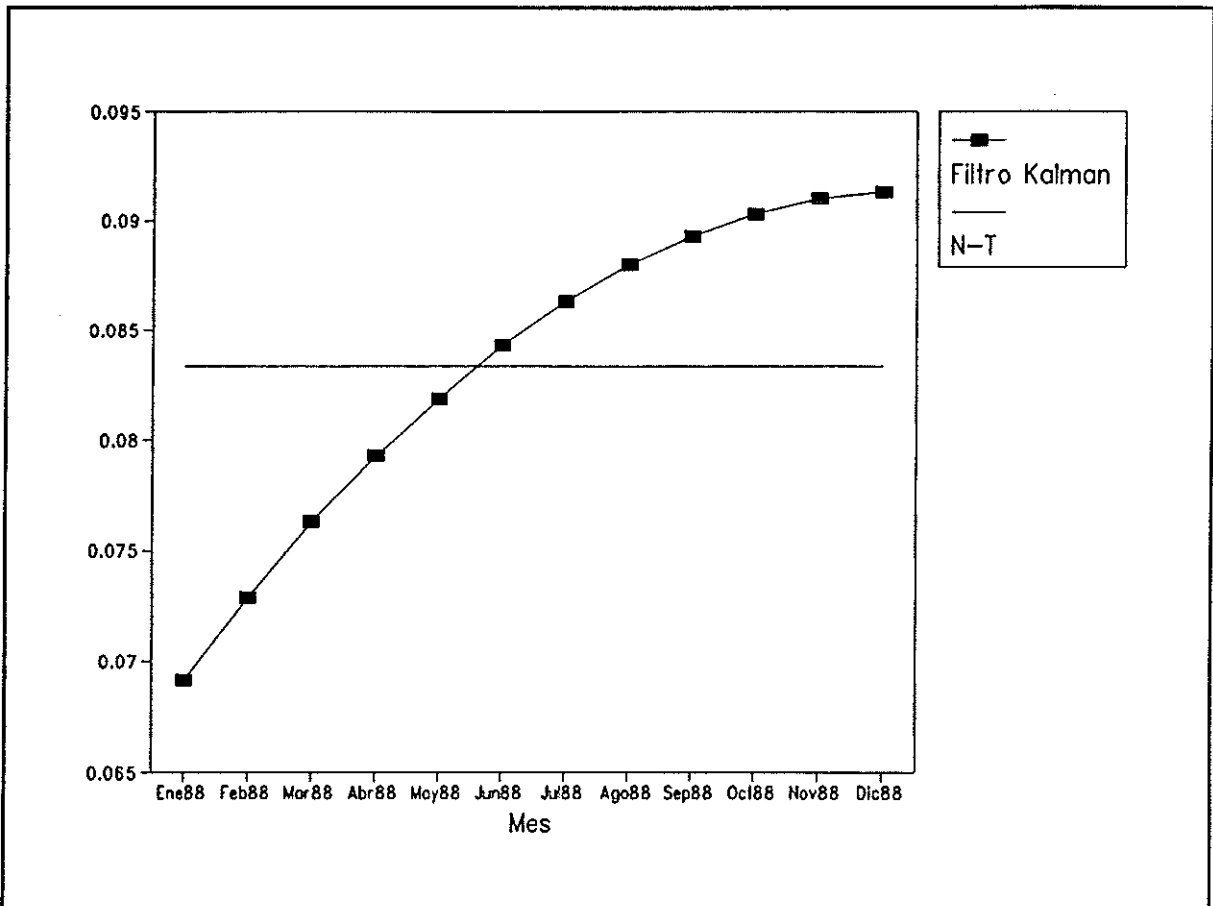


Figura 4: Comparación entre los coeficientes de reparto de N-T y la ganancia del filtro de Kalman.

4. Conclusiones.

En este artículo se ha descrito un conjunto de técnicas estadísticas que permite agrupar, dentro de un mismo esquema conceptual, los conceptos de previsión y seguimiento de objetivos definidos sobre variables económicas. De forma muy resumida, nuestro método consiste en prever las variables de interés y, posteriormente, ajustar estas previsiones al cumplimiento de los objetivos definidos *a priori*. Esta secuencia de previsiones ajustadas puede interpretarse como la senda más probable que seguiría la variable estudiada si el objetivo fuera a cumplirse. Comparando los valores de esta senda con los datos observados, a medida que se van recogiendo, resulta posible evaluar el grado esperable de cumplimiento del objetivo y detectar posibles desviaciones en una fase temprana del proceso.

Este procedimiento proporciona una respuesta a las cuestiones A), B) y C) que planteábamos en la introducción del artículo, ya que:

Tanto la previsión como el posterior ajuste, se realizan aplicando el filtro de Kalman a un sistema en el que a) la ecuación de estado viene dada por un modelo econométrico que describe la evolución de todas las series que se consideren relevantes y b) el observador del sistema es la condición de cumplimiento estricto del objetivo definido. Los resultados del proceso mantienen la propiedad BLUE del filtro y, bajo la hipótesis de normalidad, pueden interpretarse como estimaciones máximo-verosímiles. De esta forma, se responde a la cuestión A).

Además el método permite actualizar con facilidad las previsiones y la senda de objetivos interpolados a medida que se obtiene nueva información, ya que las expresiones [5]-[11] son independientes del origen temporal del seguimiento. Por tanto, la actualización tan sólo requiere cambiar las condiciones iniciales de propagación y, si se considera conveniente, reestimar los parámetros del modelo. Un procedimiento equivalente, consistiría en ampliar el observador del sistema para admitir la observación directa de una parte del vector de

estado (la que contiene las nuevas observaciones). De estas dos maneras, puede resolverse la cuestión B).

Por último, el filtro genera estimaciones de las matrices de varianzas-covarianzas de los vectores de previsiones libres y ajustadas proporcionando, por tanto, los elementos necesarios para contestar, bajo hipótesis distribucionales débiles, la cuestión C). Para ello, puede utilizarse el contraste [17].

En comparación con otros mecanismos de seguimiento, el nuestro tiene las siguientes características:

- 1) Proporciona una distinción formal y explícita entre los conceptos de previsión y seguimiento.
- 2) Utiliza un modelo econométrico, elaborado a partir de la historia pasada, como herramienta básica para la construcción de la serie de objetivos a corto plazo. La única restricción es que este modelo debe ser lineal en sus parámetros, con el objeto de poder expresarse como una ecuación de estado estándar. Por tanto, nuestro enfoque no depende de ninguna metodología econométrica específica y, en concreto, puede aplicarse a partir de vectores autorregresivos (VAR), ecuaciones simultáneas dinámicas, modelos ARCH y GARCH, etc.
- 3) Permite efectuar un seguimiento directo de objetivos vectoriales, definidos sobre conjuntos de series mutuamente influyentes. Utilizando esta capacidad resulta posible analizar la compatibilidad mutua de los distintos objetivos dentro de un mismo esquema instrumental.
- 4) Permite incorporar, dentro del conjunto de información considerada, las acciones de política económica que estén decididas *a priori*. Para ello, el modelo econométrico del que se parte debería incluir como variables exógenas los instrumentos de control de que disponga el agente planificador.

- 5) Puede aplicarse al seguimiento de objetivos definidos sobre series históricas afectadas por estacionalidad, sin necesidad de recurrir a transformaciones discutibles de los datos.

El método puede generalizarse, de forma inmediata, para admitir la presencia de no linealidades, tanto en la ecuación de estado (modelo econométrico) como en el observador del sistema (condición de cumplimiento del objetivo). Esto requeriría la aplicación del filtro de Kalman extendido⁷.

También puede resultar de interés interpretar los resultados del proceso de filtrado como valores duales de un proceso de control óptimo. No resulta claro, *a priori*, qué conclusiones se derivarían de este análisis. En principio, podría abrir la puerta a un nuevo enfoque unificador, que englobara en un mismo marco formal los conceptos de previsión, seguimiento y control.

Notas.

1. En la literatura [ver Aoki (1987) y Terceiro (1990)] se proponen otras normas de conversión igualmente generales que, además, dan lugar a un vector de estado de dimensión mínima. La utilización de este tipo de representaciones tiene evidentes ventajas computacionales y numéricas. En nuestro caso, la carga computacional no resulta un factor crítico y la experiencia indica que el comportamiento numérico del algoritmo es muy estable, por lo que preferimos adoptar esta norma, bastante más sencilla que otras alternativas.
2. Evidentemente, si el vector de estado es directamente observable en $t=j$, se cumplirá: $x_{j|j} = x_j$ y $P_{j|j} = 0$
3. Si el cociente entre dos valores dados es $a/b = (1+\alpha)$, tomando logaritmos a ambos lados de la expresión se obtiene: $\log(a) - \log(b) = \log(1+\alpha)$, por lo que $\log(1+\alpha)$ es la tasa logarítmica equivalente a α .
4. Este error de control se debe, en parte, a que el objetivo de 1988 se definió sobre una versión de ALP que no incluye la partida "Transferencias de Activos Privados de Bancos al Sector Público", que está considerada en los datos utilizados. Utilizando información homogénea, se concluiría que el objetivo se cumplió en el límite superior [ver Banco de España (1989)].
5. Este modelo no tiene ninguna pretensión de ser "adecuado" como representación estadística de ALP. De hecho, parece incluso contradictorio efectuar el seguimiento de una variable sobre la que se han aplicado controles sistemáticos en el pasado a partir de un modelo que no incluye estas intervenciones como variables explicativas ya que, entonces, es difícil aceptar que las previsiones de la variable sean una *tendencia histórica en ausencia de intervenciones reguladoras*. Por otra parte, puede argumentarse que las predicciones del modelo son condicionales a que se mantengan unas pautas de control *similares* a las que se han practicado en el pasado. En cualquier caso, en el contexto de

este trabajo, este modelo se utiliza con fines ilustrativos y no posee, por tanto, mayor relevancia.

6. Para una reflexión en profundidad acerca de los inconvenientes de utilizar series desestacionalizadas, ver Novales (1987).

7. En este caso, la optimalidad del filtro no está garantizada, ver Anderson y Moore (1979).

Referencias bibliográficas.

Anderson, B.D.O.; Moore, J.B. (1979): *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, Nueva Jersey.

Aoki, M. (1987): *State Space Modelling of Time Series*. Springer-Verlag, Heidelberg.

Banco de España (1989): *Informe anual 1988*. Banco de España, Sección de publicaciones, Madrid.

Cancio, R. (1989): "Estimación Máximo Verosímil y Predicción de Modelos Econométricos Lineales Dinámicos en Espacio de los Estados". Tesis Doctoral. Universidad Complutense, Madrid.

Kalman, R.E. (1960): "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". *Trans. ASME J. Basic Engineering*, vol. 82, págs. 35-45.

Novalés, A. (1987): "Sobre la desestacionalización de series económicas". en *Política Monetaria e Inestabilidad Financiera*. Colección debates nº 3, Fundación de Estudios de Economía Aplicada (FEDEA).

Novalés, A.; Trujillo, J.A. (1987): "El objetivo monetario". Fundación de Estudios de Economía Aplicada (FEDEA), Documento de Trabajo nº 87-14.

Rosenbrock, H.H. (1970): *State Space and Multivariable Theory*. John Wiley. Nueva York.

Terceiro, J. (1990): *Estimation of Dynamic Econometric Models with Errors in Variables*. Springer-Verlag, Heidelberg.

Watanabe, N. (1985): "A Note on the Kalman Filter with Estimated Parameters". *Journal of Time Series Analysis*, vol. 6, nº 4, págs. 269-278.

Apéndice A: Teoría de la predicción y el filtrado en el Espacio de los Estados.

A.1. Modelos en forma de Espacio de los Estados.

Consideremos un proceso estocástico vectorial $\{x_t\}$ que, en cada instante, caracteriza de forma completa el estado de un sistema dinámico. Supondremos que la ley de evolución del sistema puede describirse en términos de la siguiente ecuación de estado:

$$x_t = \Phi_t x_{t-1} + \Gamma_t u_t + E_t \epsilon_t \quad [A.1]$$

en donde:

- x_t : Vector ($n \times 1$) de variables de estado.
- u_t : Vector ($r \times 1$) de variables de control.
- ϵ_t : Vector ($v \times 1$) de perturbaciones aleatorias.
- Φ_t : Matriz ($n \times n$) de transición desde el estado $t-1$ hasta el estado t .
- Γ_t : Matriz ($n \times r$) de distribución del efecto del control sobre el vector de estado.
- E_t : Matriz ($n \times v$) de distribución del ruido ϵ_t

En muchos contextos, no es posible observar directamente el vector x_t . Cuando estamos en este caso, puede añadirse a [A.1] una ecuación de observación:

$$z_t = H_t x_t + D_t u_t + C_t v_t \quad [A.2]$$

en donde:

- z_t : Vector ($m \times 1$) de señales observadas.
- v_t : Vector ($s \times 1$) de perturbaciones aleatorias.
- H_t : Matriz ($m \times n$) de observación.

D_t : Matriz ($m \times r$) de distribución del efecto del control sobre la señal observada.

C_t : Matriz ($m \times s$) de distribución del ruido v_t .

La expresión [A.2] establece que, en cada instante, sólo puede observarse un vector de señales z_t , que es una combinación lineal de las variables de estado y de control. Además, esta observación está contaminada por ruido.

Las ecuaciones [A.1]-[A.2] expresan la forma en *Espacio de los Estados* (EE) de un modelo matemático lineal, dinámico y estocástico. En principio, podría parecer que la forma EE es muy restrictiva, en el sentido de que sólo admite la modelización de procesos Markovianos. Sin embargo, tal y como se demuestra en la sección 2 del artículo, cualquier modelo lineal dinámico puede escribirse en esta forma.

Frecuentemente se desea realizar alguna inferencia acerca de los valores futuros del vector de estado. El criterio estándar para ello, consiste en obtener las expresiones de los dos primeros momentos de x_t , condicionados al conjunto de información disponible. Como es bien sabido este criterio tiene, bajo hipótesis distribucionales débiles, la propiedad de minimizar el error cuadrático medio de predicción.

Sea Z^t el conjunto de información disponible hasta el instante t . Partiendo de un período inicial $t=0$, un ejercicio de predicción pura consistirá en calcular los dos primeros momentos de la distribución condicional de la variable, para un conjunto de instantes de tiempo:

$$x_{t|0} \triangleq E(x_t | Z^0)$$

$$P_{t|0} \triangleq E[(x_t - x_{t|0})(x_t - x_{t|0})' | Z^0] \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

Si además del conjunto de información Z^0 , se conoce una secuencia de señales z_t ($t = 1, 2, \dots, T$) relacionadas con x_t mediante una ecuación como [A.2], pueden utilizarse dos técnicas más eficientes para obtener información acerca del estado del sistema. Nos referimos al *filtrado* y al *smoothing*.

El filtrado consiste en calcular:

$$\mathbf{x}_t|t \triangleq E(\mathbf{x}_t|Z^t)$$

$$P_t|t \triangleq E[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t|t)(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t|t)'|Z^t] \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

Análogamente, el *smoothing* consiste en calcular:

$$\mathbf{x}_t|T \triangleq E(\mathbf{x}_t|Z^T)$$

$$P_t|T \triangleq E[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t|T)(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t|T)'|Z^T] \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

Por tanto, la diferencia fundamental entre estos tres enfoques consiste en el conjunto de información a partir del cual se derivan los momentos de primer y segundo orden. En Anderson y Moore (1979), se tratan con profundidad estos temas. Nosotros nos limitaremos a describir algunos de los resultados más importantes.

Para resolver los problemas de predicción, filtrado y *smoothing* es necesario, en primer lugar, realizar algunas hipótesis acerca del sistema [A.1]-[A.2]:

[H.1]: La esperanza incondicional de ϵ_t y v_t es cero.

$$\forall t \in \{1, 2, \dots, T\}: E(\epsilon_t) = 0$$

$$E(v_t) = 0$$

[H.2]: Ausencia de autocorrelación:

$$\forall t, \tau \in \{1, 2, \dots, T\}: E(\epsilon_t \epsilon_\tau') = Q_t \delta_{t\tau}$$

$$E(v_t v_\tau') = R_t \delta_{t\tau}$$

siendo Q_t y R_t matrices $(v \times v)$ y $(s \times s)$ respectivamente, conocidas y definidas no negativas. $\delta_{t\tau}$ es la función delta de Kronecker, definida como:

$$\delta_{t\tau} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \tau \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

[H.3]: ϵ_t y v_τ son variables aleatorias independientes $\forall t, \tau$.

[H.4]: El modelo [A.1]-[A.2] describe correctamente el comportamiento dinámico y estocástico de x_t y en cada instante se conocen los valores de $\Phi_t, \Gamma_t, u_t, E_t, H_t, D_t, C_t$.

[H.5]: Se conoce el estado inicial del sistema x_0 , o bien x_0 es una variable aleatoria, independiente de ϵ_t y v_t para todo t , cuyos primeros momentos son matrices conocidas: $x_0|0, P_0|0$.

[H.6]: ϵ_t y v_t pueden describirse según un modelo normal de probabilidad para todo t .

A.2. Predicción.

Resulta inmediato demostrar, a partir de la expresión [A.1], que el estado del sistema en cualquier instante $T > 0$ puede expresarse como:

$$x_T = \Phi_{T,0} x_0 + \sum_{i=1}^T \Phi_{T,i} (\Gamma_i u_i + E_i \epsilon_i) \quad [A.3]$$

en donde:

$$\begin{aligned} \Phi_{T,i} &\triangleq \Phi_T \Phi_{T-1} \dots \Phi_{i+1} \quad \text{para } T > i \\ \Phi_{T,T} &\triangleq I \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el operador esperanza condicionada a ambos lados de [A.3], se obtiene la expresión:

$$x_{T|0} = \Phi_{T,0} x_{0|0} + \sum_{i=1}^T \Phi_{T,i} \Gamma_i u_i \quad [A.4]$$

cuya matriz de covarianzas es:

$$P_{T|0} = \Phi_{T,0} P_{0|0} \Phi_{T,0}' + \sum_{i=1}^T \Phi_{T,i} E_i Q_i E_i' \Phi_{T,i}' \quad [A.5]$$

Si las matrices de [A.1] no dependen del tiempo, estas expresiones pueden simplificarse teniendo en cuenta que, entonces, $\Phi_{T,i} = \Phi^{T-i} \forall t,i$.

A.3. Filtrado.

El método más utilizado para resolver el problema de filtrado es el *filtro de Kalman*, que opera a través de dos fases:

Propagación: Consiste en obtener $x_{t|t-1}$ y $P_{t|t-1}$ a partir de $x_{t-1|t-1}$, $P_{t-1|t-1}$ y los valores de Φ_t , H_t , Γ_t , D_t , E_t , C_t , Q_t y R_t . Las ecuaciones del ciclo de propagación son:

$$x_{t|t-1} = \Phi_t x_{t-1|t-1} + \Gamma_t u_t \quad [A.6]$$

$$P_{t|t-1} = \Phi_t P_{t-1|t-1} \Phi_t' + E_t Q_t E_t' \quad [A.7]$$

Las expresiones [A.6]-[A.7] son casos particulares de los resultados de predicción. Estas ecuaciones permiten, así mismo, predecir la señal z_t y la matriz de covarianzas del error de predicción $B_{t|t-1}$.

$$z_{t|t-1} = H_t x_{t|t-1} + D_t u_t \quad [A.8]$$

$$B_{t|t-1} = H_t P_{t|t-1} H_t' + C_t R_t C_t' \quad [A.9]$$

Actualización: Consiste en obtener $x_{t|t}$ y $P_{t|t}$ incorporando la observación z_t al conjunto de información. Las ecuaciones del ciclo de actualización son:

$$x_{t|t} = x_{t|t-1} + K_t [z_t - z_{t|t-1}] \quad [A.10]$$

$$P_{t|t} = (I - K_t H_t) P_{t|t-1} (I - K_t H_t)' + K_t C_t R_t C_t' K_t' \quad [A.11]$$

$$K_t = P_{t|t-1} H_t' (B_{t|t-1})^{-1} \quad [A.12]$$

La ecuación [A.10] es, en principio, arbitraria. Indica que el valor esperado de x_t se actualiza mediante una función lineal de la desviación existente entre la señal z_t y su esperanza en $t-1$ $z_{t|t-1}$. Esta desviación, se premultiplica por K_t , que es la *matriz de corrección* o

ganancia del filtro. Si las hipótesis [H.1]-[H.5] son ciertas, la actualización será insesgada (cualquiera que sea el valor de K_t) y eficiente, ya que la expresión [A.12] minimiza la traza de [A.11]. Por tanto, el filtro de Kalman proporciona la mejor evaluación lineal e insesgada del estado del sistema, condicionada a la información contenida en z^t .

Si además se cumple [H.6], esto es, si ϵ_t y v_t se distribuyen como variables aleatorias normales, el filtro de Kalman proporciona la estimación óptima del estado del sistema condicionada al conjunto de información z^t .

Obsérvese que $B_t|_{t-1}$ puede ser, en principio, una matriz singular. En este caso, para calcular la ganancia es necesario utilizar una inversa generalizada.

Los desarrollos anteriores se han llevado a cabo en términos de los momentos teóricos de la distribución de x_t . Cuando los parámetros del modelo en EE han sido estimados, la predicción, el filtrado y el *smoothing* proporcionan únicamente momentos muestrales y su optimalidad queda restringida a la familia de procedimientos que utilizan el mismo modelo estimado. En Watanabe (1985) se establecen diversas propiedades de convergencia asintótica de los momentos muestrales a los momentos poblacionales.

Apéndice B: Optimalidad de la ganancia.

Proposición: Bajo las hipótesis [H.1]-[H.5], la expresión [10] minimiza la traza de [11].

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que:

$$\bar{K}_{T|j} = K_{T|j} + \hat{K}_{T|j} \quad \text{y} \quad \text{tr}(\bar{P}_{T|j}^*) < \text{tr}(P_{T|j}^*)$$

en donde $K_{T|j}$ se define de acuerdo con la expresión [10] y $\hat{K}_{T|j}$ es una matriz arbitraria, distinta de la matriz nula. En estas condiciones, la matriz de covarianzas del vector de estado sería:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{T|j}^* &= [I - (K_{T|j} + \hat{K}_{T|j}) H_T] P_{T|j} [I - (K_{T|j} + \hat{K}_{T|j}) H_T]' \\ &= (I - K_{T|j} H_T) P_{T|j} (I - K_{T|j} H_T)' + \hat{K}_{T|j} H_T P_{T|j} H_T' \hat{K}_{T|j}' \\ &\quad + (I - K_{T|j} H_T) P_{T|j} H_T' \hat{K}_{T|j}' + [(I - K_{T|j} H_T) P_{T|j} H_T' \hat{K}_{T|j}']' \end{aligned}$$

y, puesto que:

$$\begin{aligned} (I - K_{T|j} H_T) P_{T|j} H_T' \hat{K}_{T|j}' &= (P_{T|j} H_T' - K_{T|j} H_T P_{T|j} H_T') \hat{K}_{T|j}' \\ &= (P_{T|j} H_T' - P_{T|j} H_T' [B_{T|j}]^{-1} B_{T|j}) \hat{K}_{T|j}' = 0 \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{T|j}^* &= (I - K_{T|j} H_T) P_{T|j} (I - K_{T|j} H_T)' + \hat{K}_{T|j} H_T P_{T|j} H_T' \hat{K}_{T|j}' \\ &= P_{T|j}^* + \hat{K}_{T|j} B_{T|j} \hat{K}_{T|j}' \end{aligned}$$

y, finalmente, como $\text{tr}(\hat{K}_{T|j} B_{T|j} \hat{K}_{T|j}') > 0 \quad \forall \hat{K}_{T|j} \neq 0$, se llega a contradicción con la hipótesis: $\text{tr}(\bar{P}_{T|j}^*) < \text{tr}(P_{T|j}^*)$. c.q.d.

Apéndice C: Datos utilizados.

Serie: ALP original (media de datos diarios)

Fuente: Banco de España.

Unidad: Miles millones pts.

1979-01	9119.2	1982-09	16340.1	1986-05	26564.4
1979-02	9135.7	1982-10	16576.2	1986-06	26972.1
1979-03	9276.0	1982-11	16638.0	1986-07	27355.5
1979-04	9441.1	1982-12	16970.6	1986-08	27321.4
1979-05	9505.3	1983-01	17356.6	1986-09	27530.1
1979-06	9657.3	1983-02	17336.5	1986-10	27738.9
1979-07	9978.5	1983-03	17562.7	1986-11	27773.1
1979-08	9991.6	1983-04	17861.4	1986-12	28568.3
1979-09	10022.3	1983-05	18019.5	1987-01	28892.7
1979-10	10152.8	1983-06	18114.5	1987-02	28910.7
1979-11	10232.2	1983-07	18613.3	1987-03	29286.9
1979-12	10599.5	1983-08	18731.4	1987-04	29685.2
1980-01	10756.8	1983-09	18882.9	1987-05	29901.0
1980-02	10745.9	1983-10	19056.7	1987-06	30150.9
1980-03	10894.5	1983-11	19103.9	1987-07	30780.0
1980-04	11095.7	1983-12	19657.5	1987-08	31106.7
1980-05	11143.3	1984-01	20002.4	1987-09	31423.4
1980-06	11291.1	1984-02	19904.2	1987-10	31876.6
1980-07	11628.9	1984-03	20098.2	1987-11	31974.4
1980-08	11765.2	1984-04	20314.3	1987-12	32748.1
1980-09	11838.3	1984-05	20396.0	1988-01	33162.9
1980-10	11979.3	1984-06	20677.6	1988-02	33082.8
1980-11	12049.1	1984-07	21426.5	1988-03	33518.2
1980-12	12351.9	1984-08	21507.9	1988-04	33962.0
1981-01	12527.3	1984-09	21678.0	1988-05	34133.9
1981-02	12496.6	1984-10	21905.5	1988-06	34320.6
1981-03	12650.6	1984-11	21848.8	1988-07	34960.6
1981-04	12850.3	1984-12	22488.6	1988-08	35084.5
1981-05	12976.1	1985-01	22742.7	1988-09	35351.0
1981-06	13085.5	1985-02	22835.6	1988-10	35728.4
1981-07	13493.1	1985-03	23116.8	1988-11	35828.8
1981-08	13671.9	1985-04	23437.9	1988-12	36722.1
1981-09	13739.4	1985-05	23647.3	1989-01	37245.9
1981-10	13920.1	1985-06	23947.9	1989-02	37291.3
1981-11	14001.7	1985-07	24348.0	1989-03	37660.9
1981-12	14413.0	1985-08	24420.4	1989-04	38193.1
1982-01	14684.5	1985-09	24636.7	1989-05	38535.9
1982-02	14675.1	1985-10	24827.0	1989-06	39082.3
1982-03	14900.3	1985-11	24854.5	1989-07	40023.9
1982-04	15206.4	1985-12	25479.7	1989-08	39935.4
1982-05	15411.2	1986-01	25750.8	1989-09	40147.9
1982-06	15587.6	1986-02	25838.8	1989-10	40296.2
1982-07	16043.3	1986-03	26202.3	1989-11	40128.4
1982-08	16198.6	1986-04	26441.1	1989-12	40544.7

Serie: ALP desestacionalizado (media de datos diarios)

Fuente: Banco de España.

Unidad: Miles millones pts.

1979-01	9049.2	1982-09	16349.3	1986-05	26628.6
1979-02	9182.6	1982-10	16597.8	1986-06	26940.3
1979-03	9313.5	1982-11	16808.3	1986-07	27127.9
1979-04	9445.8	1982-12	16882.9	1986-08	27334.8
1979-05	9552.5	1983-01	17192.6	1986-09	27579.2
1979-06	9684.3	1983-02	17398.2	1986-10	27780.3
1979-07	9863.8	1983-03	17611.3	1986-11	28066.4
1979-08	9944.4	1983-04	17843.2	1986-12	28461.9
1979-09	10037.9	1983-05	18083.0	1987-01	28707.8
1979-10	10181.4	1983-06	18243.5	1987-02	28981.7
1979-11	10318.0	1983-07	18433.6	1987-03	29306.2
1979-12	10534.8	1983-08	18639.1	1987-04	29641.9
1980-01	10673.9	1983-09	18885.3	1987-05	29948.0
1980-02	10793.1	1983-10	19068.7	1987-06	30164.8
1980-03	10935.1	1983-11	19329.4	1987-07	30561.5
1980-04	11102.1	1983-12	19573.7	1987-08	31121.0
1980-05	11196.8	1984-01	19810.8	1987-09	31457.0
1980-06	11338.5	1984-02	19974.6	1987-10	31904.7
1980-07	11506.3	1984-03	20151.2	1987-11	32315.0
1980-08	11708.5	1984-04	20293.2	1987-12	32645.6
1980-09	11850.4	1984-05	20474.9	1988-01	32955.6
1980-10	12004.5	1984-06	20852.4	1988-02	33157.7
1980-11	12152.4	1984-07	21230.2	1988-03	33549.4
1980-12	12276.4	1984-08	21411.5	1988-04	33903.4
1981-01	12420.7	1984-09	21683.4	1988-05	34179.7
1981-02	12548.3	1984-10	21913.8	1988-06	34505.2
1981-03	12692.2	1984-11	22077.3	1988-07	34742.0
1981-04	12846.1	1984-12	22374.5	1988-08	35016.6
1981-05	13029.2	1985-01	22586.4	1988-09	35322.7
1981-06	13164.9	1985-02	22918.6	1988-10	35747.7
1981-07	13359.9	1985-03	23171.2	1988-11	36203.9
1981-08	13600.0	1985-04	23448.4	1988-12	36619.6
1981-09	13748.4	1985-05	23735.8	1989-01	37027.8
1981-10	13939.0	1985-06	24018.5	1989-02	37383.6
1981-11	14140.1	1985-07	24101.0	1989-03	37686.9
1981-12	14336.4	1985-08	24341.7	1989-04	38140.5
1982-01	14552.8	1985-09	24638.4	1989-05	38578.3
1982-02	14735.5	1985-10	24882.5	1989-06	38996.1
1982-03	14949.9	1985-11	25096.5	1989-07	39474.0
1982-04	15200.5	1985-12	25358.3	1989-08	39720.6
1982-05	15471.4	1986-01	25580.2	1989-09	40089.4
1982-06	15683.6	1986-02	25912.9	1989-10	40320.4
1982-07	15884.5	1986-03	26232.4	1989-11	40454.1
1982-08	16118.3	1986-04	26420.5	1989-12	40749.6