

W28
(9232)

Documento de Trabajo
9232

SOBRE UNA PRESENTACION DE LAS
CURVAS DE INDIFERENCIA

Carlos Rodríguez Braun

X480056799



FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID.
Campus de Somosaguas. 28.223 MADRID.

SOBRE UNA PRESENTACION DE LAS CURVAS DE INDIFERENCIA

Carlos Rodríguez Braun

Universidad Complutense

Esta nota es una crítica de la presentación de Mark Blaug de las curvas de indiferencia.¹

El problema resulta interesante por tres razones. En primer lugar porque, como afirma Shackle, la curva de indiferencia es el más eficiente visualizador que poseen los economistas -sólo se le pueden comparar las curvas de oferta y demanda.² En segundo término, el de Blaug es el libro de texto más importante y utilizado de esta asignatura en todo el mundo; así, si alguien estuviese interesado en los orígenes de las curvas de indiferencia, es muy probable que acudiese a Blaug, fuente justamente famosa,³ antes que a cualquier otro manual -ni siquiera a la fuente original de esta parte, que es el artículo de Stigler sobre la teoría de la utilidad, que

¹ Agradezco las críticas de Manuel Santos Redondo y Fernando Méndez Ibisate, que también escribió un comentario a esta nota. Estoy asimismo en deuda con Luis Julián Álvarez González, que formuló numerosas observaciones al borrador original, y me sugirió la forma de continuar la discusión planteada en estas páginas.

² Schackle, G.L.S., The years of high theory, Cambridge University Press, pág. 71 [hay trad. esp. FCE].

³ Aunque brilla más en los clásicos que en los neoclásicos y posteriores. Cf. Rodríguez Braun, Carlos, "A propósito del Walras de Segura", Revista de Historia Económica, VI, 3, otoño 1988, pág. 665.

Blaug sigue bastante fielmente.⁴ Y en tercer lugar, el de Blaug es uno de los pocos libros de historia de las doctrinas económicas que explica con detalle las primeras curvas de indiferencia y además las pinta como lo hizo Edgeworth, es decir, con pendiente positiva.⁵

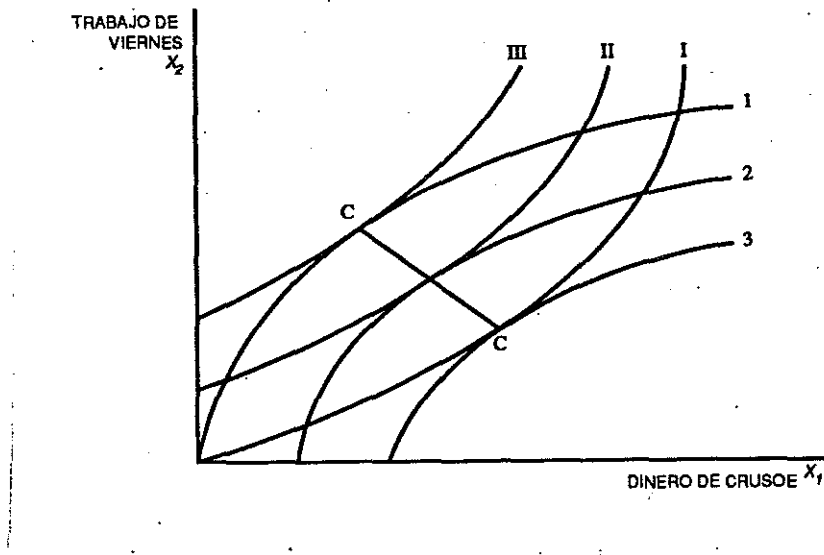
Será conveniente comenzar por la exposición y el gráfico del propio Blaug:

Edgeworth definió una curva de indiferencia como algo que denota una combinación de dos bienes, x_1 y x_2 , tal que ambos bienes producen una utilidad igual. En lugar del diagrama de caja ahora convencional, introducido por Pareto, donde aparecen en cuatro ejes las diversas cantidades de

⁴ Stigler, George J., Essays in the history of economics, University of Chicago Press, 1965. El artículo en cuestión, "The development of utility theory" apareció originalmente en el Journal of Political Economy en 1950 [hay trad. esp. en Spengler, J.J. y Allen, W.R. (eds.), El pensamiento económico de Aristóteles a Marshall, Madrid, Tecnos, 1971].

⁵ La idea de Edgeworth de pintar curvas de indiferencia con pendiente positiva no tuvo seguidores. La profesión abrazó unánimemente la línea paretiana y las curvas de indiferencia con pendiente positiva quedarán, a los ojos de los estudiantes de economía, no para retratar el intercambio sino para distinguir el caso de los "males" frente a los "bienes" en la elección individual. Cf. Varian, Hal R., Intermediate microeconomics, 2da. edición, Nueva York, W.W. Norton, 1990 [hay trad. cast. Antoni Bosch], págs. 41-2; Quirk, James y Saposnik, Rubin, Introducción a la teoría del equilibrio general y a la economía del bienestar, Barcelona, Bosch, 1972, pág. 33; Ahijado, Manuel, Problemas resueltos de microeconomía, macroeconomía y teorías clásicas del valor y la distribución, Madrid, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces, 1983, pág. 21. En un reciente manual de macroeconomía con fundamentación microeconómica, el de Robert J. Barro, se emplean curvas de indiferencia para el caso de Robinson Crusoe, con pendiente positiva. La diferencia crucial con Edgeworth, sin embargo, es que Viernes nunca aparece. Cf. Barro, Robert J., Macroeconomía, Madrid, Alianza, 1991, cap. 2.

ambos bienes poseídas por cada uno de los individuos, Edgeworth gira los ejes y hace que la abscisa represente el dinero ofrecido por Crusoe por el trabajo de Viernes -la cantidad de x_1 obtenida por el individuo- y que la ordenada represente el trabajo ofrecido por Viernes, o sea la cantidad entregada de x_2 . Dado que el individuo insistirá en recibir cantidades adicionales de x_1 para contrarrestar la pérdida de una cantidad dada de x_2 , la pendiente de las curvas de indiferencia será positiva. Dado que dx_1MU_1 será la ganancia de utilidad derivada de un aumento dx_1 , y dx_2MU_2 será la pérdida de utilidad derivada de un decremento dx_2 , la pendiente de las curvas de indiferencia con respecto al eje x_1 será: $dx_2/dx_1=MU_1/MU_2$, dada por la condición de que $dx_1MU_1=dx_2MU_2$ para los movimientos a lo largo de la curva de indiferencia. Edgeworth trazó sólo una curva para cada una de las partes, pero hay en realidad una familia de curvas de indiferencia que llena el plano.⁶



⁶ Blaug, Mark, Teoría económica en retrospectiva, México, FCE, 1985, pág. 394.

Hay aquí diversos puntos insatisfactorios, que tienen mayoritariamente un patrón común: Blaug analiza el tema de las curvas de indiferencia a la manera del equilibrio del consumidor en la microeconomía tradicional, con lo que se da una contradicción entre el texto y el gráfico. (Blaug alega que para trazar sus curvas, Edgeworth "gira los ejes", una forma típica de la economía tal como es enseñada hoy; más adelante se verá que Edgeworth no necesita tal giro.)

En el gráfico dibujado por Blaug hay aspectos que no están claros. Uno, la curva de contrato es una línea recta, supuesto que no parece necesario. Dos, se comprende que "hay en realidad una familia de curvas de indiferencia que llena el plano", como sostiene Blaug, pero el gráfico impide ver que las curvas importantes son 1 y 3. El propio hecho de numerarlas de forma distinta confunde.⁷

Afirma Blaug que Edgeworth traza "sólo" dos curvas, y al lector le queda la impresión de que así el gran economista se quedó corto y que debió pintar más. Blaug nos oculta que las

⁷ Nótese que Stigler no cae en esa confusión: identifica a dichas dos curvas con el mismo subíndice y aclara que son los límites que determinan los contratos posibles; op.cit., pág. 104.

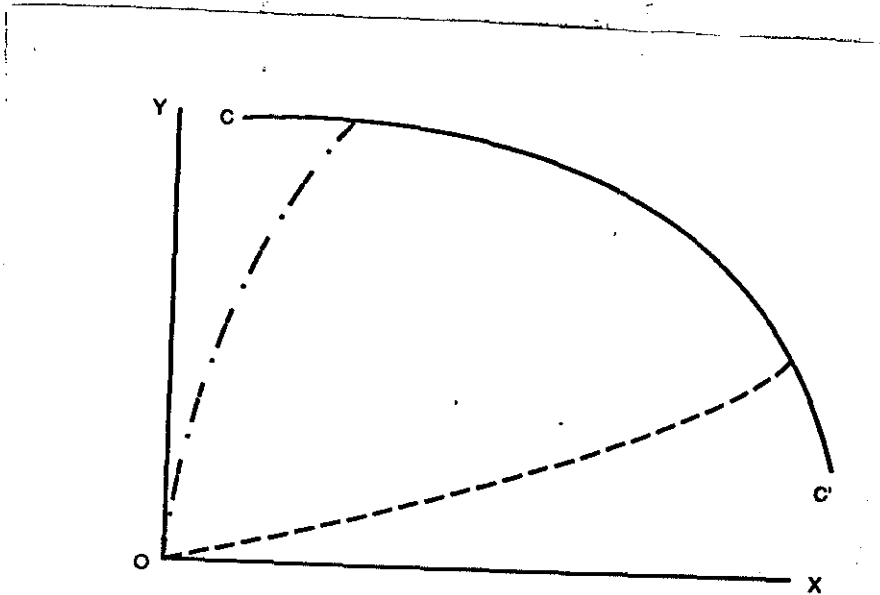
curvas I y 3 son esenciales porque se cruzan en el origen de coordenadas. Es decir, todas las combinaciones de su trabajo a cambio del dinero de Crusoe que se sitúen en la curva 3, serán para Viernes iguales a la combinación cero trabajo/cero dinero. Otro tanto, desde el punto de vista de Robinson Crusoe, para las combinaciones de su dinero a cambio del trabajo de Viernes que se hallen a lo largo de la curva I.

No se trata simplemente de que las curvas I y 3 delimiten la curva de contrato. Delimitan el problema posible. El pintar varias curvas de indiferencia iguales a I y 3 incita a la confusión porque cualquier punto fuera de éstas últimas curvas carece de sentido económico, o requiere la introducción de supuestos específicos -por ejemplo, la violencia.⁸ Cualquier punto al norte de 3 no sería aceptable para Viernes porque supone que el dinero que recibe de Crusoe a cambio de su trabajo le reporta una utilidad menor a la de no trabajar y no recibir pago alguno. Y cualquier punto al sur de I no sería aceptable para Crusoe, porque significa una utilidad menor a la de no recibir ningún trabajo de Viernes y no pagarle nada. El gráfico, así resultaría más comprensible si se borrara todo

⁸ En el modelo de Edgeworth, Crusoe y Viernes negocian un contrato de mutuo acuerdo, y la violencia queda excluida explícitamente, Edgeworth, Francis Ysidro, Mathematical psychics. An essay on the application of mathematics to the moral sciences [1881], Nueva York, Kelley, 1967, pág. 20. La realización de intercambios fuera de las curvas señaladas puede demostrarse con un supuesto inverso al de la violencia, como el amor. Véase Boulding, Kenneth E., La economía del amor y del temor, Madrid, Alianza Universidad, 1973. Boulding analiza las donaciones, un caso particular de las externalidades.

trazo que quedara fuera de I y 3, incluidos los trazos de ambas curvas más allá de su intersección.

El gráfico quedaría más claro si Blaug hubiese reproducido el que pintó el propio Edgeworth en 1881.⁹



El gráfico de Edgeworth ilumina un aspecto chocante del texto de Blaug, cuando éste dice que la pendiente de las curvas de indiferencia resulta positiva porque "el individuo insistirá en recibir cantidades adicionales de x_1 para contrarrestar la pérdida de una cantidad dada de x_2 ".

Obsérvese que la forma de expresarse de Blaug -más de un

⁹ Edgeworth, F.Y., op.cit., pág. 28.

bien para compensar la pérdida de otro- es típica de la presentación moderna inicial de las curvas de indiferencia, con un individuo y combinaciones de dos bienes que le reportan la misma utilidad. Pero en tal caso, evidentemente, la pendiente de las curvas resultantes será negativa. No podrá ser de otra manera si un individuo exige más de x_1 por la pérdida de x_2 .

La forma de presentar el problema apunta en otra dirección a la originalmente postulada por Edgeworth. Nótese que Blaug reduce la cuestión a un individuo ("el individuo insistirá...") que da y recibe. Es esencial al argumento de Edgeworth el que haya dos individuos distintos que negocian. De ahí que plantee el caso paradigmático de Crusoe y Viernes. El final de las historias antigua y moderna es distinto: los alumnos de hoy emplean las curvas de indiferencia para determinar el equilibrio del consumidor. Edgeworth las emplea para demostrar que ese equilibrio sólo es determinado en la competencia perfecta, cuando la curva de contrato queda reducida a un punto. En los demás casos será indeterminado, alcanzando una indeterminación máxima en el caso incorrectamente analizado por Jevons, el del monopolio bilateral.

El párrafo anterior revela las limitaciones del propio Edgeworth desde la perspectiva de la teoría económica moderna, en especial la relativa a la existencia y la unicidad del equilibrio, problemas fundamentales del equilibrio general, sobre los que existe una vasta literatura. Puede haber equili-

brios múltiples o ausencia de equilibrio; y la competencia perfecta no es el único caso de perfecta determinación del equilibrio.¹⁰

La curva de contrato, que aparece más realizada por Edgeworth que por Blaug, está limitada por curvas de indiferencia cuya pendiente no puede ser sino positiva porque no hay un individuo y dos bienes alternativos y deseables. Si transformamos el análisis de Edgeworth en uno de un agente y dos bienes, hurtamos la característica esencial del argumento, que es la negociación. Y en un intercambio, cada sujeto entregará más de su mercancía a cambio de recibir más de la otra: sólo así puede concebirse que se mantengan ambos en una misma curva de indiferencia. Como Robinson Crusoe pedirá más trabajo si paga más salario, y Viernes no trabajará más si no le pagan más, las curvas de indiferencia se inclinarán hacia la derecha y hacia arriba. Además, si los ejes son los mencionados, la curva de Viernes es la superior y la de Crusoe la inferior.

Este último punto exige ver el problema edgeworthiano

¹⁰ Varian, op.cit., págs. 491ss., presenta ejemplos de intercambio entre un individuo precio-aceptante y otro monopolista o monopolista perfectamente discriminador. Véase un gráfico con equilibrios múltiples en Quirk, James y Saposnik, Rubin, op.cit., pág. 164, y otro que ilustra la inexistencia del equilibrio en Segura, Julio, Análisis microeconómico, Madrid, Alianza, 1986, pág. 285. De éste último texto pueden verse también las págs. 291, 303, 313-14. Resulta, entonces, una simplificación el afirmar, como hace Blaug: "Este problema de la indeterminación no surge bajo el intercambio competitivo porque entonces todas las partes afrontan los mismos precios dados para todos los bienes", op.cit., pág. 395.

como un juego negociador. En este juego, supongamos una misma cantidad de dinero a entregar por Crusoe y pensemos qué cantidad de trabajo ofrecida por Viernes corresponderá a las dos curvas de indiferencia que parten del origen, es decir, qué cantidad de trabajo de Viernes no será suficiente como para que él decida trabajar a cambio de ese dinero, y no será suficiente como para que Crusoe decida contratarlo a cambio del mismo dinero. Está claro que la segunda cantidad será menor que la primera. En caso contrario, el área entre las curvas de indiferencia representará el área en la cual no es posible la contratación entre Viernes y Crusoe.

Las condiciones del problema, por otro lado, se ajustan bien al "paradigma contractual" de Buchanan. No hay información sobre las cantidades que posee cada individuo -Edgeworth no dibuja "su" caja.¹¹ El problema de Edgeworth no es igual al de un agente que enfrenta a combinaciones simétricas de dos bienes que rinden la misma utilidad -las manzanas y las nueces de Marshall- de tal forma que una cantidad mayor de un bien comporta una cantidad menor del otro. Y como no lo es, para llegar a su curva de contrato no parece necesario "girar" eje

¹¹ Véase Jaffé, William, "Edgeworth's contract curve: Part 1. A propaedeutic essay in clarification", History of Political Economy, otoño 1974, pág. 344. Con relación al primer párrafo de la página 395 del Blaug no es claro que sea necesario especificar que Viernes posee x_2 pero no x_1 , y al revés en el caso de Crusoe -véase también González, Manuel Jesús, "Forma y fondo en la obra de Edgeworth Mathematical Psychics", Información Comercial Española, No. 549, mayo 1979, pág. 124.

alguno: basta con superponer dos gráficos.

La "pérdida" de la que habla Blaug, asociada a un movimiento hacia el Este o el Norte desde el origen de coordenadas es la pérdida de utilidad que comporta para Crusoe un aumento de x_1 (desplazamiento hacia el Este) y para Viernes un aumento de x_2 (desplazamiento hacia el Norte).

Ahora podemos reinterpretar el pasaje de Blaug, que debería aclarar mejor que cuando habla de "el individuo" en realidad se refiere a Viernes.

La oración:

Dado que el individuo insistirá en recibir cantidades adicionales de x_1 para contrarrestar la pérdida de una cantidad dada de x_2 , la pendiente de las curvas de indiferencia será positiva.

debería en propiedad leerse:

Dado que Viernes insistirá en recibir cantidades adicionales de x_1 (dinero de Crusoe) para contrarrestar la pérdida de utilidad asociada a la entrega de una cantidad mayor de x_2 (trabajo de Viernes), la pendiente de las curvas de indiferencia será positiva.

Blaug, ha de admitirse, habla de ganancia y pérdida de utilidad en la oración siguiente del mismo párrafo, pero la exposición es confusa. Veamos los supuestos de que parte:

Dado que dx_1MU_1 será la ganancia de utilidad derivada de un aumento dx_1 , y dx_2MU_2 será la pérdida de utilidad derivada de un decremento dx_2

Aquí se nos oculta que en realidad hay dos agentes diferentes. En efecto, la expresión sólo es correcta si se explicita así (subrayo el texto que falta):

Dado que dx_1MU_1 será la ganancia de utilidad para Viernes derivada de un aumento dx_1 , y dx_2MU_2 será la pérdida de utilidad para Crusoe derivada de un decremento dx_2 ,...

Y a continuación Blaug presenta lo que dice es la ecuación de la curva de indiferencia con respecto al eje de abscisas: $dx_2/dx_1 = MU_1/MU_2$.

Ahora bien, Blaug no aclara si está hablando de un individuo o dos. Supongamos, para ser coherentes con lo anterior, que estamos hablando solamente de Viernes. En ese caso falta un signo, porque como la utilidad marginal para Viernes asociada a un incremento de su trabajo será verosímelmente negativa siempre -dejo de lado el tramo inicial de la notable curva de oferta de trabajo que dibujó Jevons-, la ecuación anterior sólo será verdadera si:

$$- dx_2/dx_1 = MU_1/MU_2.^{12}$$

En efecto, una curva de indiferencia se define como el lugar de las combinaciones de dos bienes que proporcionan una misma utilidad U . Esto quiere decir que sobre una curva de indiferencia se dará que

¹² Así lo indica el propio Edgeworth, op.cit., pág. 36.

$$dU = dU/dx_1 dx_1 + dU/dx_2 dx_2 = 0$$

lo que implica que

$$dx_2/dx_1 = - dU/dx_1 / dU/dx_2$$

Así, si dibujamos la curva sobre dos ejes de coordenadas, su pendiente deberá ser igual a la razón negativa de las utilidades marginales: la relación marginal de sustitución. Obsérvese que esto nada indica sobre la pendiente efectiva de la curva de indiferencia, que dependerá del signo de las utilidades marginales. En el equilibrio del consumidor se suele suponer que las utilidades marginales son positivas -es decir, que se trata de dos bienes deseables- con lo que su razón negativa comporta una curva de indiferencia con pendiente negativa.¹³

En el caso de Edgeworth, ocurre que los individuos enfrentan a bienes que son uno deseable y el otro indeseable. Por lo tanto, en cada caso habrá una utilidad marginal que será negativa: la de x_1 para Crusoe y la de x_2 para Viernes. La razón entre las utilidades marginales será siempre negativa y, en consecuencia, la pendiente de la curva de indiferencia será siempre positiva.

Por otro lado, y dejando el problema del signo de lado,

¹³ Chiang, Alpha C., Fundamental methods of mathematical economics, 3ra. edición, McGraw-Hill, 1984, pág. 401 [hay trad. esp. 2da. ed., Amorrortu].

si hablamos de dos individuos, a la ecuación anterior le falta un miembro que exprese la relación entre las utilidades marginales del otro agente:

$$dx_2/dx_1 = MU_1/MU_2 = MU'_1/MU'_2$$

Pero en este caso no estamos indicando la ecuación de la curva de indiferencia sino sólo de aquellos puntos en los que la relación entre las utilidades marginales de ambos bienes es la misma para los dos agentes. Es decir, se trata de la ecuación de la curva de contrato, la curva determinada por las tangentes de las curvas de indiferencia. Esta sería la ecuación equivalente a la de Jevons:

$$F_1(a-x)/f_1(y) = F_2(x)/f_2(b-y)$$

Blaug formula dos apreciaciones sobre las curvas: una derivada implícitamente del gráfico, y a la que se ha hecho referencia antes, la curva de contrato es una recta. Y la otra apreciación aparece en el texto, cuando Blaug afirma que Edgeworth pinta las curvas de indiferencia de Viernes y Crusoe cóncavas respectivamente a los ejes de abscisas y ordenadas, pero que no demuestra la concavidad.

Si decimos que la curva de contrato es recta estamos introduciendo un supuesto sobre las formas de las curvas de indiferencia, un supuesto restrictivo que Blaug no explica. La expresión $dy/dx = MU_2/MU_1$, que he criticado a raíz de su ausente signo negativo, podría interpretarse como una repre-

sentación simplificada de lo que se ve en el gráfico. Por un lado se supone -por el razonamiento visto antes- que el signo final es positivo. Por otro lado, como en el gráfico las curvas de indiferencia son iguales para ambos partenaires, la curva de contrato no puede sino ser recta. Ello incluso puede facilitar el ocultamiento de la dimensión doble del problema y la consiguiente reducción del intercambio a un sólo individuo y dos bienes.

La cuestión de la concavidad y convexidad tiene amplias derivaciones en la teoría económica, que la ha expandido desde las curvas hasta los conjuntos, y está volviendo obsoletos a los manuales de historia de las doctrinas económicas que no la abordan.¹⁴

La expresión que emplea Blaug en su texto es "cantidades adicionales". Resulta claro que hablar de cantidades adicionales sirve mientras permanezcamos sólo en el terreno de las primeras derivadas. Si Viernes pide una cantidad adicional de dinero a cambio de una cantidad adicional de trabajo, su curva de indiferencia tendrá una primera derivada positiva.

¹⁴ Por fortuna, el gusto de los economistas por la historia de su disciplina no se ha perdido, y eso constituye como siempre la gran mina de oro para los historiadores del pensamiento económico. Por ejemplo, el papel de Edgeworth en el análisis económico del siglo veinte resulta breve pero sugerentemente expuesto en Walsh, Vivian Charles, Introduction to contemporary microeconomics, Nueva York, McGraw-Hill, 1970 [hay trad. esp. Vicens Vives].

La forma de la curva de indiferencia ya requiere ingresar en el campo de las segundas derivadas. Tal como Blaug pinta las curvas, su "traducción" al lenguaje escrito -aunque no hubiese demostración alguna- resultaría mucho más estricta que las palabras de Blaug. De las curvas de Crusoe y Viernes no se concluye sólo que la primera derivada es positiva sino que la segunda derivada es negativa para Viernes y positiva para Crusoe -y al revés si se refieren las derivadas al eje de ordenadas.

La pendiente de las curvas de Viernes indica no sólo que el negro exigirá más dinero a cambio de más trabajo, sino que por cantidades adicionales iguales de trabajo exigirá cantidades adicionales mayores de dinero.

Por su parte, Robinson Crusoe no le pedirá a Viernes simplemente que trabaje más a cambio de más dinero, sino que por cantidades adicionales iguales de dinero exigirá a Viernes cantidades adicionales mayores de trabajo.

El lenguaje gráfico, entonces, vuelve a estar divorciado del texto, y expone hipótesis que, aunque razonables e intuitivamente aceptables, no están explícitas y van en realidad mucho más allá de las palabras escritas por Blaug.

Ahora pasemos a Edgeworth. Vamos a razonar la forma de la curva de indiferencia de Robinson Crusoe -para éste las absci-

sas son el sacrificio y las ordenadas la remuneración. La utilidad de Crusoe (F) es función de x e y , y la primera derivada de la curva de indiferencia será:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{dF/dx}{dF/dy} = - F'_x / F'_y$$

Recordemos que aunque tratamos con dos funciones, sobre la curva de indiferencia y es ella misma una función de x , por lo que F'_x y F'_y pueden ser consideradas ambas funciones de x . Así, podemos tomar la segunda derivada total, y no parcial, de la curva de indiferencia con respecto a x . Así, y tomando en cuenta los efectos indirectos que un cambio en x ejerce sobre F a través de y , resulta:

$$d^2 y/dx^2 = 1/(F'_y)^2 [-F''_y (F''_{xx} + F''_{yx} dy/dx) + F'_x (F''_{xy} + F''_y dy/dx)]$$

Egdeorth hace esto mismo. Expone la ecuación de la segunda derivada de la curva de indiferencia, con el propósito explícito de determinar la convexidad de la curva con respecto al eje de abscisas, y aclara los signos probables de las primeras y segundas derivadas de la función F con respecto a x e y ¹⁵. Así, postula que

$$F'_x < 0$$

$$F'_y > 0$$

¹⁵ Edgeworth, F.Y., op.cit., págs. 34-36. Chiang, A.C., op.cit., págs. 166, 402.

$$F''_{xx} < 0$$

$$F''_{yy} < 0$$

$$F''_{xy} < 0$$

Aplicando esto a la ecuación anterior, y recordando que por los supuestos iniciales sobre el carácter de x e y será razonable esperar que $dy/dx > 0$, resulta que

$$d^2 y/dx^2 > 0$$

lo cual quiere decir que estamos frente a una curva convexa con respecto al eje de abscisas. Si se argumenta al revés se puede demostrar, siguiendo los mismos pasos, que la curva de Viernes es cóncava con respecto al eje de abscisas y convexa con respecto al de ordenadas, es decir, con respecto al eje que mide su sacrificio.

Se podría criticar a Edgeworth por postular unos signos absurdos, o bien por no preocuparse en aclarar por qué son éstos los signos y no otros. Ambas críticas, empero, serían injustificadas.

Es razonable suponer que cuanto mayor sea el sacrificio de Robinson Crusoe, menor será su utilidad, o sea:

$$F'_x < 0$$

y que cuanto mayor sea su remuneración, mayor será su utilidad, es decir:

$$F'_y > 0$$

En el postulado siguiente encontramos un problema por que si, como dice Edgeworth

$$F''_x < 0$$

entonces la tasa de crecimiento¹⁶ de la utilidad marginal con respecto al sacrificio disminuye a medida que el sacrificio aumenta.

En cambio, parece lógico que la tasa de aumento de la utilidad disminuya a medida que la remuneración que provoca dicha utilidad aumenta, o sea:

$$F''_y < 0$$

En lo que hace a las segundas derivadas cruzadas, aunque son iguales,¹⁷ será ilustrativo razonarlas en ambos sentidos. F''_{xy} denota la derivada de F'_y con respecto a x . Es decir, el problema es averiguar la tasa de crecimiento de la utilidad marginal con respecto a la remuneración, cuando ésta no cambia y se modifica el sacrificio. Sabemos, por lo antes postulado, que el aumento del sacrificio disminuye la utilidad ($F'_x < 0$), pero menos que proporcionalmente (el conflictivo postulado de $F''_x < 0$). En tal caso, se admitirá que, por ejemplo, un aumento del sacrificio aumentará el ritmo de crecimiento de la utilidad marginal con respecto a la remuneración, pero menos que proporcionalmente. O sea:

¹⁶ Es decir, de decrecimiento, puesto que $F'_x < 0$.

¹⁷ Son iguales si ambas derivadas cruzadas son continuas. Chiang, A.C., op.cit., pág. 313.

$$F''_{xy} < 0$$

El sentido de derivar F'_x con respecto a y , para obtener F''_{yx} , es averiguar la tasa de crecimiento de la utilidad marginal con respecto al sacrificio cuando éste permanece constante y cambia la remuneración. Como el aumento de la remuneración aumenta la utilidad ($F'_y > 0$) pero menos que proporcionalmente ($F''_y < 0$), es razonable pensar, por ejemplo, que un aumento en la remuneración aumentará el ritmo de crecimiento de la utilidad marginal con respecto al sacrificio, pero menos que proporcionalmente. En suma:

$$F''_{yx} < 0$$

Edgeworth expone un razonamiento similar al que se acaba de exponer. No obstante, no sólo desarrolla su argumentación con cuidado, sosteniendo siempre que se trata de probabilidades sujetas a restricciones que pueden alterar el resultado final, sino que además reconoce que el postulado $F''_x < 0$ es problemático.¹⁸

La intuición sugiere que el signo de la segunda derivada debería ser positivo, y que la curva de la utilidad con respecto al sacrificio -medido éste en el eje de abscisas- debería ser cóncava y la utilidad derrumbarse a un ritmo creciente hacia el cuadrante negativo. Este es un punto conflictivo de

¹⁸ Edgeworth, F.Y., op.cit., págs. 34, 56ss.

Mathematical psychics a propósito de la convexidad o concavidad de las curvas de indiferencia, puesto que Edgeworth no parece presentar una explicación clara de dicho supuesto.¹⁹

La afirmación de Blaug de que Edgeworth no aborda la cuestión de la segunda derivada es, en todo caso, errada, y así lo admite implícitamente el propio Blaug, que modificó esas líneas en la cuarta, y hasta el momento última, edición de su manual.²⁰

Es claro que los problemas aquí planteados exigen desarrollar con más amplitud tanto el pensamiento de Edgeworth como el análisis microeconómico que desde Pareto hasta la axiomatización de Arrow y Debreu -pasando por Slutsky, Hicks y Allen- emplea funciones de utilidad ordinales, en las que únicamente se hace hincapié en la clasificación según el orden

¹⁹ Con respecto al trabajo, un axioma de Edgeworth es que "la tasa de crecimiento de la fatiga aumenta a medida que aumenta el trabajo", op.cit., pág. 65.

²⁰ Blaug, Mark, Economic theory in retrospect, 4ta. edición, Cambridge University Press, 1985, pág. 311. La cuestión es en todo caso complicada, como se ve en los errores que cometen ocasionalmente los historiadores que abordan las teorías de Edgeworth. Escribe por ejemplo Manuel Jesús González: "Los ejes [del gráfico de Edgeworth] miden salario y trabajo y, naturalmente, las curvas de indiferencia son cóncavas hacia los ejes que representan los bienes cedidos en cada caso (no son convexas como en las representaciones modernas)", op.cit., pág. 125. Las curvas de indiferencia que pinta Edgeworth son convexas hacia los ejes que representan los bienes cedidos: las de Crusoe con convexas hacia las abscisas (el dinero que Crusoe cede) y las de Viernes convexas hacia las ordenadas (el trabajo que Viernes cede). William Jaffé equivoca también la convexidad en op.cit., pág. 350; la convexidad, en cambio, está bien señalada al pie del Gráfico 3, pág. 355.

de preferencia de las distintas cestas de bienes.

Hoy es habitual concluir que las curvas de indiferencia son estrictamente convexas con respecto al origen o que, equivalentemente, la relación marginal de sustitución es continuamente decreciente. Sin embargo esta propiedad [de estricta convexidad] garantizada por los axiomas no depende ni tiene relación alguna con el decrecimiento de las utilidades marginales [el signo de las F''] que con frecuencia se considera como intuitivamente razonable.²¹

Las proposiciones sobre la utilidad marginal creciente o decreciente no tienen significado en la microeconomía más avanzada ya que siempre existe al menos una función que representa las mismas preferencias obtenida por transformación monótona creciente, que las contradice.

Es curioso constatar que el decrecimiento continuo de la relación marginal de sustitución, es decir, la estricta convexidad, en el caso de las funciones de utilidad aditivas exige el de las utilidades marginales, por ser las derivadas parciales cruzadas nulas. Los marginalistas -el caso de Walras- emplean funciones de utilidad aditivas (aquellas en las que la utilidad marginal es independiente de las cantidades consumidas de los otros bienes), pero fue Edgeworth el que introdujo

²¹ Segura, Julio, *op. cit.*, pág. 45.



las funciones de utilidad no aditivas. Y en estas funciones la convexidad de las curvas de indiferencia no implica utilidades marginales decrecientes. Según la teoría moderna de la utilidad, en general el signo de las segundas derivadas no está determinado.

Pero estas cuestiones serán objeto de un trabajo futuro en el que se procurará avanzar más en analizar las curvas de indiferencia de Edgeworth desde la perspectiva de los tiempos modernos.