DOCUMENTO DE TRABAJO

9316

ESTIMACION RECURSIVA DE MODELOS LINEALES CON RESTRICCIONES ENTRE LOS PARAMETROS

Jaime Terceiro Lomba
Sonia Sotoca López

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES - UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
Campus de Somosaguas. 28223 MADRID

ESTIMACION RECURSIVA DE MODELOS LINEALES CON RESTRICCIONES ENTRE LOS PARAMETROS

Jaime Terceiro Lomba
Sonia Sotoca López

Departamento de Economía Cuantitativa
Facultad de CC. Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Teléfono: (91) 394-23-78

Septiembre 1993

ESTIMACION RECURSIVA DE MODELOS LINEALES CON RESTRICCIONES ENTRE LOS PARAMETROS

RESUMEN:

En este artículo se demuestra que la estimación recursiva de un modelo de regresión con restricciones lineales puede llevarse aplicando el estimador estándar (por mínimos cuadrados recursivos) a partir de unas condiciones iniciales adecuadas. Las ventajas de este método con respecto a su alternativa (filtros de dimensión reducida) consisten en que 1) el mismo algoritmo puede utilizarse para estimar modelos con y sin restricciones y 2) la contrastación del cumplimiento de dichas restricciones puede llevarse a cabo recursivamente. Los desarrollos teóricos se complementan con un ejemplo, en el que se muestra cómo la aplicación de las técnicas de estimación recursiva proporciona una información valiosa acerca de la estabilidad de los parámetros y del efecto de cada observación sobre las correspondientes estimaciones.

Palabras clave: condiciones iniciales, estimación recursiva, filtro de Kalman, filtro de dimensión reducida, restricciones lineales.

1. Introducción.

A menudo, por razones teóricas o consideraciones de otra índole, resulta conveniente incluir restricciones lineales entre los parámetros de un modelo econométrico. Es bien conocido que la estimación recursiva de un modelo con restricciones lineales entre los parámetros puede llevarse a cabo aplicando un filtro de Kalman de dimensión reducida [ver Anderson y Moore (1979)].

En este artículo se muestra que, para estimar recursivamente un modelo de regresión con restricciones lineales, basta aplicar un filtro de Kalman convencional a partir de unas condiciones iniciales adecuadas. Las ventajas de este método con respecto a los filtros de dimensión reducida consisten en que 1) puede utilizarse el mismo algoritmo para estimar modelos con o sin restricciones y 2) puede contrastarse recursivamente el cumplimiento de dichas restricciones. Además, los filtros de dimensión reducida exigen transformar previamente las variables del modelo, aunque son más eficientes computacionalmente que nuestro método. Este resultado generaliza, por tanto, el uso del algoritmo recursivo sin hacerlo más complejo.

La estructura del artículo es la siguiente:

En el apartado 2, se describe el algoritmo de estimación por Mínimos Cuadrados Recursivos (MCR) y su inicialización. En el apartado 3, se muestra la forma de incorporar restricciones lineales entre los parámetros, inicializando adecuadamente el proceso de estimación. En el apartado 4 se plantea un filtro de dimensión reducida, también aplicable a la estimación restringida, y su relación con nuestro algoritmo. En el apartado 5 se discuten algunos aspectos numéricos del procedimiento que proponemos. En el apartado 6 se aplica el algoritmo desarrollado a la estimación de una ecuación de tipo de cambio para la economía peruana propuesta por Edwards (1983). Esta especificación, escogida por su valor ilustrativo, es un modelo lineal de retardos distribuidos sujeto a un conjunto de restricciones entre los parámetros. La estimación recursiva de sus parámetros, pone de manifiesto la inestabilidad de alguno de ellos a lo largo de la muestra utilizada. Por último, en el apartado 7 se resumen las conclusiones más importantes del trabajo.

2. Algoritmo recursivo (MCR).

Sea el modelo de regresión lineal (MRL):

$$y_t = x_t^T\beta + \epsilon_t \qquad (t=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

donde y_t es la observación t-ésima de la variable dependiente, x_t es un vector $(k\times 1)$ que contiene la observación t-ésima de las variables explicativas, β es un vector $(k\times 1)$ de parámetros desconocidos y ϵ_t es una perturbación aleatoria que se distribuye idéntica e independientemente con esperanza nula y varianza constante σ_ϵ^2.

Suponiendo que el vector β no cambia dentro de la muestra, el modelo (1) puede expresarse en forma de espacio de los estados mediante las siguientes ecuaciones:

$$y_t = x_t^T\beta_t + \epsilon_t \tag{2}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} \tag{3}$$

en donde β_t representa el vector de parámetros correspondiente a una muestra de tamaño t y (3) refleja la hipótesis de ausencia de cambio estructural. Desde el punto de vista de la formulación en espacio de los estados, (2) es la ecuación de observación del modelo y (3) es la ecuación de estado. Por tanto, desde este enfoque, la variable endógena del MRL puede interpretarse como una señal observable del vector de estado que es, a su vez, el vector de parámetros que se desea estimar.

Aplicando el filtro de Kalman a las ecuaciones (2)-(3), se obtienen las siguientes expresiones:

$$\hat{\beta}_t = \hat{\beta}_{t-1} + k_t(y_t - x_t^T\hat{\beta}_{t-1}) \tag{4}$$

$$k_t = V_{t-1}x_t(x_t^T V_{t-1}x_t + 1)^{-1} \tag{5}$$

$$V_t = (I_k - k_t x_t^T)\,V_{t-1} \tag{6}$$

La ecuación (4) indica que la estimación del vector de parámetros se actualiza mediante una función lineal del error de predicción de y_t cometido al estimar β con la información disponible hasta el instante t-1. El factor de ponderación es el vector k_t, conocido como *ganancia* del filtro y calculable de forma óptima a partir de la expresión (5).

La matriz V_t, propagada a través de (6), es proporcional a la matriz de covarianzas de los parámetros estimados con la información disponible hasta el instante t:

$$V_t = (X_t^T X_t)^{-1}$$

donde X_t es una matriz $(t \times k)$ que recoge, por columnas, la información muestral de cada variable explicativa hasta el período t.

Por otra parte, es posible estimar recursivamente la varianza residual del modelo y por tanto, recuperar en cada instante, la matriz de covarianzas de los parámetros estimados. Para ello, definimos el error de predicción estandarizado de y_t, dada la información hasta el instante t-1, como:

$$w_t = \frac{(y_t - x_t^T \hat{\beta}_{t-1})}{(x_t^T V_{t-1} x_t + 1)^{1/2}}$$

y teniendo en cuenta que la suma de cuadrados de los residuos MCO $(\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon})$ coincide con la suma de cuadrados de los residuos recursivos $(\hat{w}'\hat{w})$ [ver Brow et alter (1975)], se obtiene la siguiente ecuación:

$$\hat{w}_t^T \hat{w}_t = \hat{w}_{t-1}^T \hat{w}_{t-1} + (1 + x_t^T V_{t-1} x_t)^{-1} (y_t - x_t^T \hat{\beta}_{t-1})^2$$

O bien, expresando la anterior ecuación en función de la varianza residual recursiva, se obtiene:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{t-k} [(t-1-k)\hat{\sigma}_{t-1}^2 + (1 + x_t^T V_{t-1} x_t)^{-1} (y_t - x_t^T \hat{\beta}_{t-1})^2] \qquad (7)$$

y por tanto, la matriz de covarianzas de los parámetros estimados puede calcularse mediante la expresión:

$$\hat{V}(\hat{\beta}_t) = \hat{\sigma}_t^2 V_t \qquad (8)$$

Evidentemente, es necesario inicializar el algoritmo (4)-(8) con unas condiciones iniciales $(\hat{\beta}_0, V_0)$. Es habitual utilizar el siguiente criterio [ver, entre otros, Young (1984)]:

$$\hat{\beta}_0 = \mathbf{0} \qquad (9)$$

$$V_0 = \tau I_k \qquad (10)$$

donde τ es un escalar positivo y arbitrariamente grande.

Las condiciones iniciales (9)-(10), expresan un elevado grado de incertidumbre acerca de la magnitud y el signo de los parámetros a estimar. Este criterio responde a la idea de que, si no se dispone de información *a priori*, $\hat{\beta}_0$ es una variable aleatoria afectada por una incertidumbre infinita. Existen, asimismo, otros criterios que independizan los resultados del algoritmo MCR de la influencia de condiciones iniciales del tipo (9) y (10) [ver Sotoca (1993)].

El valor inicial de (7) es cero o arbitrario, hasta el momento en que se dispone de un número positivo de grados de libertad. Obsérvese que, de acuerdo con (7), es razonable una condición inicial arbitraria de $\hat{\sigma}_t^2$, ya que a partir del instante $t = k+1$, la evolución de dicho parámetro es independiente de su inicialización.

3. Incorporación de restricciones lineales en el algoritmo MCR.

Un conjunto de restricciones lineales sobre los parámetros del MRL, puede expresarse en forma matricial como:

$$A\beta = c \tag{11}$$

donde A es una matriz de orden $(m \times k)$ y c es un vector de dimensión m, ambos conocidos. Es decir, se imponen m restricciones lineales entre los k parámetros del vector β, lo que equivale a suponer que el rang $(A) = m$.

La incorporación en (1) de las restricciones lineales (11), modifica las expresiones del algoritmo recursivo dado por (4)-(8).

Se puede demostrar [ver Pollack (1978)] que el efecto de imponer restricciones lineales en la estimación de un modelo, equivale a restringir β de forma que se cumpla:

$$\beta = A^+c + (I - A^+A)\gamma \tag{12}$$

donde γ es un vector $(k \times 1)$ arbitrario y A^+ denota una inversa generalizada de la matriz A.

Dado que el rang $(A) = m \leq k$, la inversa generalizada de A será de orden k y tendrá la expresión:

$$A^{+} = A^{T}(AA^{T})^{-1} \tag{13}$$

Sustituyendo (13) en (12), se obtiene:

$$\beta = A^{T}(AA^{T})^{-1}c + [I - A^{T}(AA^{T})^{-1}A]\gamma \tag{14}$$

o bien:

$$\beta = r + M_{a}\gamma \tag{15}$$

en donde:

$$r = A^{T}(AA^{T})^{-1}c \tag{16}$$

$$M_{a} = I_{k} - A^{T}(AA^{T})^{-1}A \tag{17}$$

siendo M_a una matriz idempotente y simétrica de orden $(k \times k)$.

Sustituyendo (15) en (1), el modelo de regresión puede expresarse como:

$$y_{t} = x_{t}^{T}(r + M_{a}\gamma) + \epsilon_{t}$$

o bien:

$$z_{t} = w_{t}^{T}\gamma + \epsilon_{t} \tag{18}$$

siendo:

$$z_{t} = y_{t} - x_{t}^{T}r \tag{19}$$

$$w_{t} = M_{a}x_{t} \tag{20}$$

Se observa que la estimación de (1) sujeta a las restricciones dadas por (11), equivale a la estimación libre del modelo (18). Las variables del modelo transformado se obtienen a partir de las variables originales, por medio de las relaciones (19) y (20). Por tanto, es posible aplicar el criterio MCR sin restricciones al modelo (18), dando lugar al siguiente algoritmo:

$$\hat{\gamma}_{t} = \hat{\gamma}_{t-1} + g_{t}(z_{t} - w_{t}^{T}\hat{\gamma}_{t-1}) \tag{21}$$

$$g_t = \bar{V}_{t-1} w_t (1 + w_t^T \bar{V}_{t-1} w_t)^{-1} \tag{22}$$

$$\bar{V}_t = (I - g_t w_t^T) \bar{V}_{t-1} \tag{23}$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{t-k^*}[(t-1-k^*)\hat{\sigma}_{t-1}^2 + (1 + w_t^T \bar{V}_{t-1} w_t)^{-1}(z_t - w_t^T \gamma_{t-1})^2] \tag{24}$$

$$\hat{V}(\hat{\gamma}_t) = \hat{\sigma}_t^2 \bar{V}_t \tag{25}$$

en donde $k^* = k\text{-}m$. Es decir, los grados de libertad pasan a ser $t\text{-}k\text{+}m$. Utilizando las expresiones (15), (19) y (20), el algoritmo dado por (21)-(25) puede escribirse en función de las variables y parámetros originales:

$$\tilde{\beta}_t = \tilde{\beta}_{t-1} + M_a g_t (y_t - x_t^T \tilde{\beta}_{t-1}) \tag{26}$$

$$g_t = \bar{V}_{t-1} M_a x_t (1 + x_t^T M_a \bar{V}_{t-1} M_a x_t)^{-1} \tag{27}$$

$$\bar{V}_t = (I - g_t x_t^T M_a) \bar{V}_{t-1} \tag{28}$$

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \frac{1}{t-k^*}[(t-1-k^*)\tilde{\sigma}_{t-1}^2 + (1 + x_t^T M_a \bar{V}_{t-1} M_a x_t)^{-1}(y_t - x_t^T \tilde{\beta}_{t-1})^2] \tag{29}$$

$$\hat{V}(\tilde{\beta}_t) = \tilde{\sigma}_t^2 M_a \bar{V}_t M_a \tag{30}$$

y definiendo:

$$\dot{k}_t = M_a g_t \tag{31}$$

$$\dot{V}_t = M_a \bar{V}_t M_a \tag{32}$$

el filtro (26)-(30) pasa a ser el siguiente:

$$\tilde{\beta}_t = \tilde{\beta}_t + \dot{k}_t(y_t - x_t^T\tilde{\beta}_{t-1}) \tag{33}$$

$$\dot{k}_t = \dot{V}_{t-1}x_t(1 + x_t^T\dot{V}_{t-1}x_t)^{-1} \tag{34}$$

$$\dot{V}_t = (I - \dot{k}_t x_t^T)\dot{V}_{t-1} \tag{35}$$

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \frac{1}{t-k^*}[(t-1-k^*)\tilde{\sigma}_{t-1}^2 + (1 + x_t^T\dot{V}_{t-1}x_t)^{-1}(y_t - x_t^T\tilde{\beta}_{t-1})^2] \tag{36}$$

$$\hat{V}(\tilde{\beta}_t) = \tilde{\sigma}_t^2\dot{V}_t \tag{37}$$

Por tanto, el algoritmo (33)-(37), es equivalente al criterio de estimación MCR sin restricciones dado por (4)-(8). Las restricciones lineales pueden incorporarse a la estimación inicializando adecuadamente las expresiones (33)-(37). En concreto, las condiciones iniciales del algoritmo (21)-(25) son:

$$\gamma_0 = 0 \tag{38}$$

$$\bar{V}_0 = \tau I \tag{39}$$

y, teniendo en cuenta (15), (32) y (39), las condiciones iniciales del filtro (33)-(37) son:

$$\tilde{\beta}_0 = r \tag{40}$$

$$\dot{V}_0 = \tau M_a \tag{41}$$

Por tanto, este resultado implica que es posible estimar recursivamente un modelo con restricciones lineales entre los parámetros, sin más que aplicar el algoritmo recursivo estándar a partir de las condiciones iniciales dadas por (40) y (41).

La contrastación recursiva de las restricciones lineales $A\beta = c$, puede llevarse a cabo calculando el estadístico:

$$\frac{\tilde{\sigma}_t^2(t-k^*) - \hat{\sigma}_t^2(t-k)}{m\hat{\sigma}_t^2} \sim F_{(m,t-k)}$$

donde $k^* = k-m$, $\tilde{\sigma}_t^2$ es la varianza residual resultante de la estimación recursiva del modelo restringido con t observaciones y $\hat{\sigma}_t^2$ es la varianza residual resultante de la estimación del modelo libre, después de haber procesado t observaciones. Consecuentemente, el contraste recursivo puede aplicarse a partir del instante $t = k+1$, es decir, con grados de libertad positivos.

4. Filtros de dimensión reducida.

Un filtro de dimensión reducida se obtiene teniendo en cuenta que siempre es posible particionar el sistema de restricciones lineales $\mathbf{A}\beta = \mathbf{c}$, de la forma:

$$[A_1 \quad A_2]\begin{bmatrix}\beta_{1t}\\ \beta_{2t}\end{bmatrix} = c \tag{44}$$

donde:

$\mathbf{A}_1$: es una matriz cuadrada de orden m no singular,
$\mathbf{A}_2$: es una matriz de orden $m\times(k\text{-}m)$,
β_{1t} : es un vector de $(m\times 1)$ parámetros sujetos a m restricciones y
β_{2t} : es un vector de los $(k\text{-}m)\times 1$ parámetros libres.

A partir de (44), se puede obtener la relación que existe entre los parámetros restringidos y los libres:

$$\beta_{1t} = A_1^{-1}c - A_1^{-1}A_2\beta_{2t} \tag{45}$$

Particionando el modelo de regresión dado por (1) de la siguiente forma:

$$y_t = [x_{1t}{}^T \quad x_{2t}{}^T]\begin{bmatrix}\beta_{1t}\\ \beta_{2t}\end{bmatrix} + \epsilon_t \tag{46}$$

y sustituyendo la expresión (45) en (46), se obtiene el modelo restringido:

$$y_t = x_{1t}^T A_1^{-1} c + (x_{2t}^T - x_{1t}^T A_1^{-1} A_2)\beta_{2t} + \epsilon_t \tag{47}$$

Por tanto, la ecuación de observación correspondiente al modelo restringido dado por (47) se puede escribir como:

$$y_t^* = x_t^* \beta_{2t} + \epsilon_t \tag{48}$$

donde:

$$y_t^* = y_t - x_{1t}^T A_1^{-1} c \tag{49}$$

$$x_t^* = x_{2t}^T - x_{1t}^T A_1^{-1} A_2 \tag{50}$$

y la nueva ecuación de estado es:

$$\beta_{2t} = \beta_{2t-1} \tag{51}$$

Aplicando el filtro de Kalman a las ecuaciones (48) y (51), se obtendría la estimación recursiva de los parámetros no restringidos. La diferencia entre el filtro (21)-(25) y el filtro aplicado al modelo restringido (47), consiste en la reducción de la dimensión del vector de estado, ya que β_{2t} es un vector de dimensión (k-m) mientras que γ_t tiene dimensión k. Es decir, la utilización de este filtro exigiría transformar previamente las variables observables en la forma dada por (49) y (50) y posteriormente, aplicar el algoritmo MCR para estimar los parámetros libres del modelo.

5. Consideraciones numéricas.

Al introducir restricciones lineales entre los parámetros, puede que algún(os) autovalor(es) de la matriz V_t sea(n) nulo(s), con lo que esta matriz es siempre semidefinida positiva. Aún más, al ser idempotente la matriz de proyección M_a, sus autovalores serán siempre *1* ó *0* y, por tanto, los autovalores de V_0 serán siempre τ ó *0*. Consecuentemente, los posibles errores de propagación en la misma no puedan resolverse mediante las factorizaciones clásicas de Potter o Bierman, descomposiciones que parten de una matriz de covarianzas definida positiva [ver Bierman (1977)]. Para reducir estos problemas numéricos pueden reemplazarse las expresiones (28) y (35) por sus correspondientes versiones más estables:

$$\bar{V}_t = (I - g_t x_t^T M_a) \bar{V}_{t-1} (I - g_t x_t^T M_a)^T + g_t g_t^T \tag{52}$$

$$\dot{V}_t = (I - \dot{k}_t x_t^T) \dot{V}_{t-1} (I - \dot{k}_t x_t^T)^T + \dot{k}_t \dot{k}_t \tag{53}$$

pudiendo demostrarse que un error en el cálculo de g_t o k_t por medio de (27) ó (34), respectivamente, lleva a un error de primer orden en el cálculo de $\bar{V}_t$ o $\dot{V}_t$ cuando se utilizan las expresiones (28) ó (35). Sin embargo, este error es de segundo orden si se utilizan en su lugar las ecuaciones (52) ó (53).

Por último, cabe señalar que cuando se utiliza el algoritmo dado por (33)-(37), la propagación de errores de redondeo en el cálculo de $\dot{V}_t$ puede hacer que dicha matriz deje de ser ortogonal a la matriz A a lo largo del proceso recursivo. Si deja de cumplirse dicha ortogonalidad, dejan de cumplirse las restricciones entre los parámetros[1]. Ante este problema, puede ser conveniente imponer la ortogonalidad de dichas matrices en cada instante de tiempo. Para ello, sería aconsejable utilizar el algoritmo dado por las ecuaciones (26)-(30), en lugar de (33)-(37).

6. Aplicación empírica.

Como ejemplo ilustrativo del análisis teórico desarrollado en los apartados anteriores, se ha escogido la estimación de una ecuación de determinación del tipo de cambio para la economía peruana propuesta por Edwards (1983).

Edwards (1983) se plantea estudiar, desde una perspectiva monetarista, cómo funcionan los sistemas de tipo de cambio flotante en los países menos desarrollados. Para ello, analiza la experiencia de Perú con tipo de cambio flotante a inicios de los años 50. Contrasta una versión a corto plazo de la aproximación monetarista de la determinación de tipos de cambio, usando datos mensuales desde el año 1950 hasta 1954, inclusive. Esa aproximación supone que el logaritmo del tipo de cambio depende del diferencial de la cantidad de dinero y de un retardo distribuido infinito de los diferenciales de renta y tipos de interés. Es decir:

$$\ln S_t = \beta_0 + \beta_1(\ln M - \ln M^*)_t + \sum_{j=0}^{k} \beta_{2j}(\ln Y - \ln Y^*)_{t-j} + \sum_{j=0}^{k} \beta_{3j}(i - i^*)_{t-j} + \beta_4 d_{t-1} + \epsilon_t \tag{54}$$

donde:

S_t : es el tipo de cambio Sol/US \$,

M : es el agregado monetario M1 en Perú (ajustado estacionalmente),

M^* : es el agregado monetario M1 en EEUU (ajustado estacionalmente),

Y : es la renta real en Perú,

Y^* : es la renta real en EEUU,

i : es el tipo de interés nominal en Perú,

i^* : es el tipo de interés nominal en EEUU,

$$d_t = \ln S_t - (\ln P_t - \ln P_t^*)$$

siendo:

P : el índice de precios en Perú,

P^* : el índice de precios en EEUU y

ϵ_t : una perturbación aleatoria ruido blanco.

Además, se supone que los coeficientes β_{2j} y β_{3j} del modelo (54) siguen un polinomio de Almon de tercer grado, con restricciones de punto final. Es decir:

$$\begin{aligned} \beta_{2j} &= \alpha_{20} + \alpha_{21}j + \alpha_{22}j^2 + \alpha_{23}j^3 \qquad \forall j = 0,1,2,\ldots,k \\ \beta_{3j} &= \alpha_{30} + \alpha_{31}j + \alpha_{32}j^2 + \alpha_{33}j^3 \qquad \forall j = 0,1,2,\ldots,k \end{aligned} \tag{55}$$

donde:

$$\begin{aligned} \beta_{2,-1} &= 0 \qquad \beta_{2,k+1} = 0 \\ \beta_{3,-1} &= 0 \qquad \beta_{3,k+1} = 0 \end{aligned} \tag{56}$$

y el máximo retardo k permitido es de 18 meses. Las restricciones de punto final (56) suponen las siguientes restricciones lineales entre los parámetros α:

$$\begin{aligned} \alpha_{20} - \alpha_{21} + \alpha_{22} - \alpha_{23} &= 0 \\ \alpha_{20} + (k+1)\alpha_{21} + (k+1)^2\alpha_{22} + (k+1)^3\alpha_{23} &= 0 \\ \alpha_{30} - \alpha_{31} + \alpha_{32} - \alpha_{33} &= 0 \\ \alpha_{30} + (k+1)\alpha_{31} + (k+1)^2\alpha_{32} + (k+1)^3\alpha_{33} &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

El modelo (54) sujeto a las restricciones dadas por (55) puede escribirse como:

$$\ln S_t = \beta_0 + \beta_1(\ln M - \ln M^*)_t + \alpha_{20}\sum_{j=0}^{18}(\ln Y - \ln Y^*)_{t-j} + \alpha_{21}\sum_{j=0}^{18}[j(\ln Y - \ln Y^*)_{t-j}]$$

$$+ \alpha_{22}\sum_{j=0}^{18}[j^2(\ln Y - \ln Y^*)_{t-j}] + \alpha_{23}\sum_{j=0}^{18}[j^3(\ln Y - \ln Y^*)_{t-j}] + \alpha_{30}\sum_{j=0}^{18}(i - i^*)_{t-j} +$$

$$+ \alpha_{31}\sum_{j=0}^{18}[j(i - i^*)_{t-j}] + \alpha_{32}\sum_{j=0}^{18}[j^2(i - i^*)_{t-j}] + \alpha_{33}\sum_{j=0}^{18}[j^3(i - i^*)_{t-j}] + \beta_4 d_{t-1} + \epsilon_t \quad (58)$$

donde las elasticidades a largo plazo con respecto a la renta y a los tipos de interés pueden recuperarse a partir de los parámetros α de la forma:

$$\sum_{j=0}^{18}\beta_{2j} = 19\alpha_{20} + \sum_{j=0}^{18}j\alpha_{21} + \sum_{j=0}^{18}j^2\alpha_{22} + \sum_{j=0}^{18}j^3\alpha_{23}$$

$$\sum_{j=0}^{18}\beta_{3j} = 19\alpha_{30} + \sum_{j=0}^{18}j\alpha_{31} + \sum_{j=0}^{18}j^2\alpha_{32} + \sum_{j=0}^{18}j^3\alpha_{33}$$

En la Tabla 1 se presentan los resultados de la estimación del modelo (58) sujeto a las restricciones de punto final, obtenidos con los criterios de MCO[2] (Mínimos Cuadrados Ordinarios) y MCRR (Mínimos Cuadrados Recursivos Restringidos). Los valores entre paréntesis son las desviaciones típicas de los parámetros estimados y SCR es la suma de cuadrados residual al final de la muestra. Además, hay que decir que se han estimado recursivamente todos los parámetros eliminando la influencia de condiciones iniciales arbitrarias.

(Insertar Tabla 1)

Los resultados de la Tabla 1 muestran que la estimación final de los parámetros coincide aproximadamente con los dos procedimientos utilizados. La elasticidad estimada a largo plazo con respecto a la renta es negativa y significativamente distinta de cero, mientras que la elasticidad a largo con respecto a los tipos de interés es positiva y no significativa.

Por otro lado, el modelo teórico del que parte Edwards sugiere que el coeficiente asociado al logaritmo del diferencial de M1 (entre Perú y EEUU) es unitario, indicando que, *ceteris paribus*, un incremento en la cantidad de dinero doméstica resultará en una devaluación de la moneda doméstica de igual proporción. Edwards obtiene un coeficiente asociado a los diferenciales de la cantidad de dinero de 1.053 con una desviación típica de 0.101, y por tanto, no significativamente distinto de la unidad. Estimando con MCRR se obtiene una estimación de 0.889 con una desviación típica de 0.123, también estadísticamente igual a la unidad. Se ha reestimado el modelo (58) imponiendo la restricción de un coeficiente unitario, para comprobar si la evolución temporal de los parámetros libres cambia en el modelo con y sin esta restricción. Los resultados de la estimación por MCO y MCRR del modelo (58) sujeto a (55) y a que $\beta_1 = 1$, se ofrecen en la Tabla 2.

(Insertar Tabla 2)

En la Tabla 2 puede observarse que no cambian estadísticamente las estimaciones de los parámetros en presencia de una nueva restricción, salvo la elasticidad a largo con respecto a los tipos de interés que ahora sí es estadísticamente distinta de cero.

A continuación, se ofrecen los gráficos de evolución temporal de los parámetros del modelo (58), así como los correspondientes al modelo (58) restringido.

(Insertar Figuras 1 a 25)

En la Figura 1 puede apreciarse la inestabilidad del parámetro asociado a la variable diferencial de M1, que muestra una tendencia claramente creciente al final de la muestra. Además, la Figura 22 indica que la elasticidad a largo con respecto a la renta tampoco es estable en el modelo no restringido y la elasticidad a largo con respecto a los tipos de interés presenta una evolución creciente para las últimas observaciones de la muestra (ver Figura 24). Ambas elasticidades parecen ser más estables cuando se impone la restricción de que $\beta_1 = 1$, pero aunque dicha hipótesis se acepte al final de la muestra, no parece adecuado imponerla cuando este parámetro es claramente inestable.

Por último, en las Figuras 26 y 27 se ofrece el perfil de la evolución temporal de las dos elasticidades a largo estimadas tanto en el modelo sin restringir (MSR) como en el restringido (MR) a que $\beta_1 = 1$ (MR).

(Insertar Figuras 26 y 27)

6. Conclusiones.

Las principales conclusiones de este trabajo son las siguientes:

- Se propone un método que generaliza el uso del algoritmo recursivo estándar para estimar los coeficientes de regresión de un modelo en presencia de restricciones lineales entre los parámetros. La forma de incorporar dichas restricciones en la estimación consiste en elegir unas condiciones iniciales apropiadas.

- La inicialización propuesta para la estimación recursiva restringida hace que las restricciones se satisfagan exactamente desde el instante inicial hasta el final de la muestra.

- Es fácil contrastar, de una manera recursiva, si dichas restricciones se cumplen o no en la muestra considerada, a partir del momento en que se dispone de grados de libertad positivos.

- Los filtros de dimensión reducida, aunque son más eficientes computacionalmente que nuestro método, exigen transformar previamente las variables del modelo. En nuestro caso, sólo es necesario inicializar de forma distinta cuando se quiere estimar recursivamente con o sin restricciones y el filtro sigue expresado en función de los datos originales.

- Utilizando un ejemplo con datos reales, se ha mostrado que la utilización de este criterio recursivo permite estudiar si la incorporación de restricciones provoca inestabilidades en la estimación de los parámetros libres o no, aspecto importante si después quiere usarse el modelo restringido con fines de predicción o simulación.

Tabla 1: Resultados de la estimación del modelo (58) por MCO y MCRR.

Modelo (58)	MCO (en bloque)	MCRR $\tau=1$	Modelo (58)	MCO (en bloque)	MCRR $\tau=1$
$\hat{\beta}_0$	-13.650 (4.0625)	-13.600 (4.0230)	$\hat{\alpha}_{30}$	-0.02175 (0.00775)	-0.02193 (0.00759)
$\hat{\beta}_1$	0.8904 (0.1239)	0.8889 (0.1227)	$\hat{\alpha}_{31}$	0.6815×10^{-2} (0.1716×10^{-2})	0.6865×10^{-2} (0.1716×10^{-2})
$\hat{\alpha}_{20}$	0.02611 (0.05020)	0.02760 (0.05009)	$\hat{\alpha}_{32}$	-0.2505×10^{-4} (0.2910×10^{-4})	-0.2586×10^{-4} (0.2892×10^{-4})
$\hat{\alpha}_{21}$	-0.03119 (0.00837)	-0.03147 (0.00850)	$\hat{\alpha}_{33}$	-0.2118×10^{-4} (0.6060×10^{-5})	-0.2137×10^{-4} (0.6057×10^{-5})
$\hat{\alpha}_{22}$	-0.5208×10^{-4} (0.6390×10^{-4})	-0.5106×10^{-4} (0.6362×10^{-4})	$\hat{\beta}_4$	0.3488 (0.1411)	0.3468 (0.1405)
$\hat{\alpha}_{23}$	0.8821×10^{-4} (0.2610×10^{-4})	0.8907×10^{-4} (0.2623×10^{-4})	$\Sigma \hat{\beta}_{3j}$	0.0799 (0.0708)	0.0768 (0.0706)
$\Sigma \hat{\beta}_{2j}$	-2.3686 (0.6554)	-2.3595 (0.6698)	SCR	0.0100	0.0105

Notas:

- Las cifras entre paréntesis son las desviaciones típicas de los parámetros estimados.
- MCO: Mínimos Cuadrados Ordinarios.
- MCRR: Mínimos Cuadrados Recursivos Restringidos.
- SCR: Suma de Cuadrados de los Residuos.

Tabla 2: Resultados de la estimación del modelo (58) restringido por MCO y MCRR.

Modelo (58)	MCO (en bloque)	MCRR $\tau=1$	Modelo (58)	MCO (en bloque)	MCRR $\tau=1$
$\hat{\beta}_0$	-16.834 (1.9031)	-16.830 (1.8200)	$\hat{\alpha}_{30}$	-0.02356 (0.00707)	-0.02374 (0.00713)
$\hat{\beta}_1$	1.0000	1.0000	$\hat{\alpha}_{31}$	0.6829×10^{-2} (0.1738×10^{-2})	0.6871×10^{-2} (0.1672×10^{-2})
$\hat{\alpha}_{20}$	0.4641×10^{-3} (0.4062×10^{-1})	0.5034×10^{-3} (0.3921×10^{-1})	$\hat{\alpha}_{32}$	-0.6910×10^{-5} (0.2090×10^{-4})	-0.7382×10^{-5} (0.2005×10^{-4})
$\hat{\alpha}_{21}$	-0.02998 (0.00837)	-0.03020 (0.00817)	$\hat{\alpha}_{33}$	-0.2027×10^{-4} (0.6040×10^{-5})	-0.2042×10^{-4} (0.5814×10^{-5})
$\hat{\alpha}_{22}$	-0.8739×10^{-4} (0.5050×10^{-4})	-0.8695×10^{-4} (0.4842×10^{-4})	$\hat{\beta}_4$	0.3767 (0.1392)	0.3753 (0.1333)
$\hat{\alpha}_{23}$	0.8281×10^{-4} (0.2570×10^{-4})	0.8348×10^{-4} (0.2484×10^{-4})	$\hat{\Sigma \beta_{3j}}$	0.1128 (0.0608)	0.1119 (0.0622)
$\hat{\Sigma \beta_{2j}}$	-2.8978 (0.2913)	-2.8961 (0.3294)	SCR	0.0105	0.0102

Notas:

- Las cifras entre paréntesis son las desviaciones típicas de los parámetros estimados.
- MCO: Mínimos Cuadrados Ordinarios.
- MCRR: Mínimos Cuadrados Recursivos Restringidos.
- SCR: Suma de Cuadrados de los Residuos.

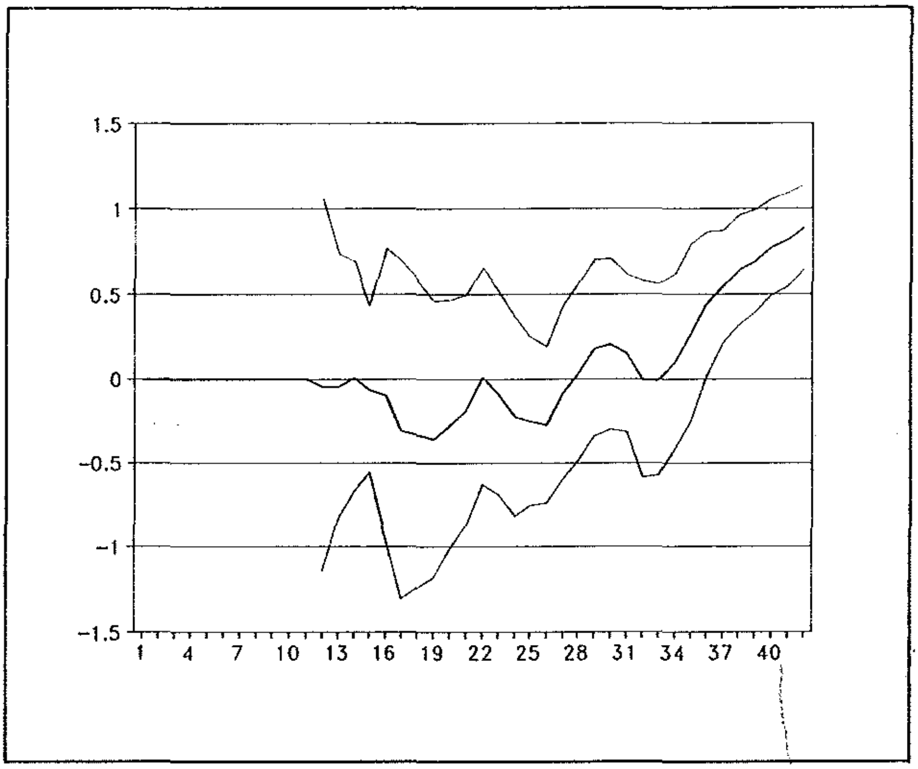

Figura 1: Evolución temporal de la estimación de β_1 en el modelo (58).

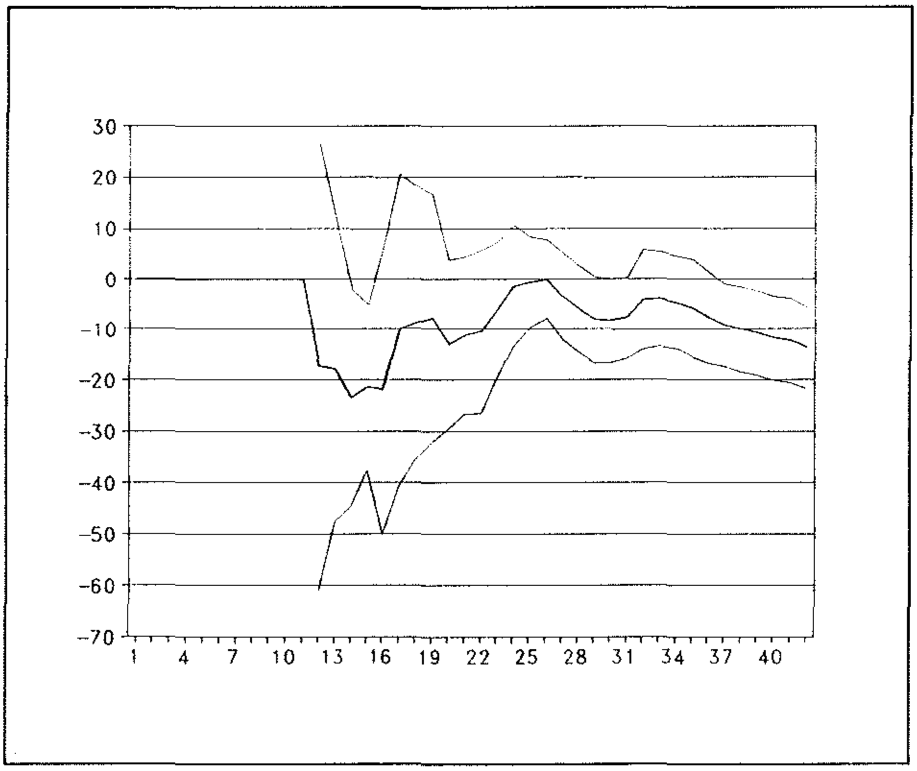

Figura 2: Evolución temporal de la estimación de β_0 en el modelo (58).

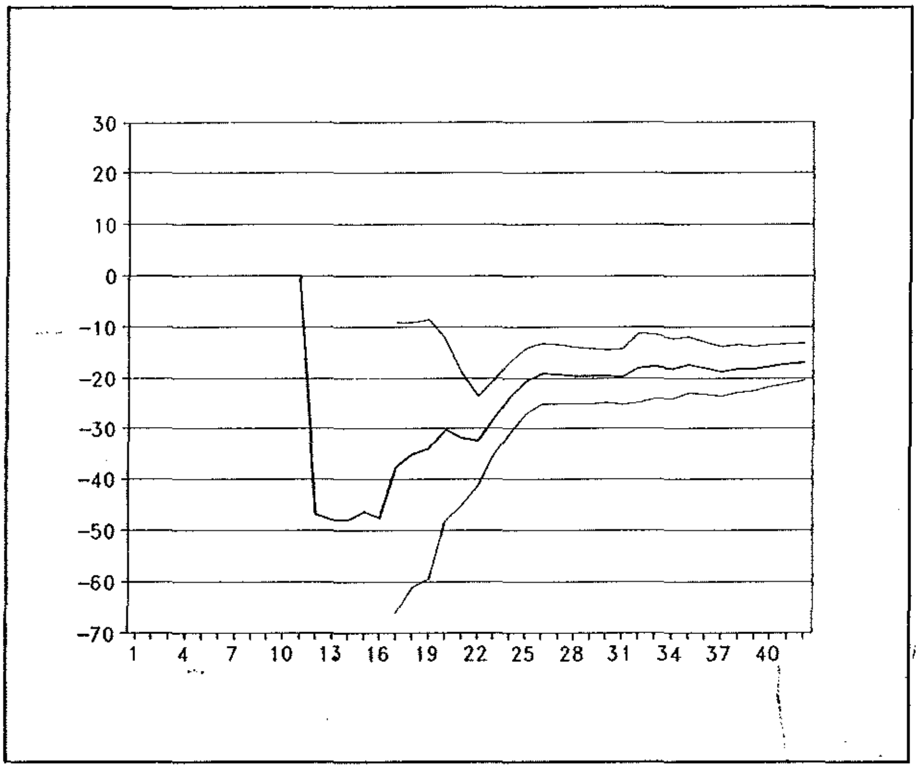

Figura 3: Evolución temporal de la estimación de β_0 en el modelo (58) restringido.

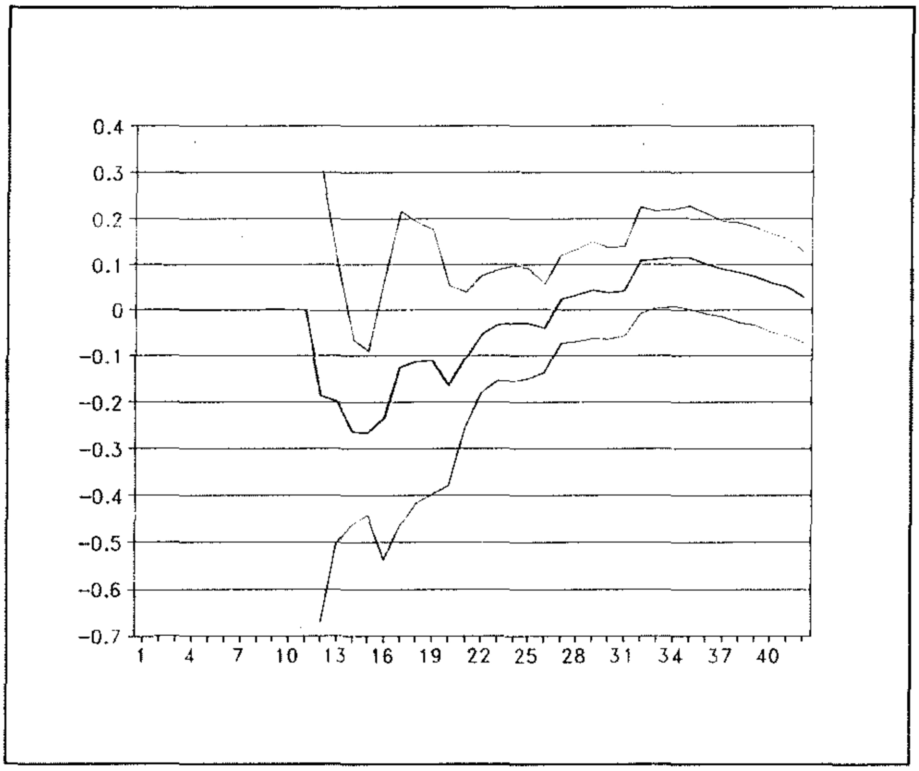

Figura 4: Evolución temporal de la estimación de α_{20} en el modelo (58).

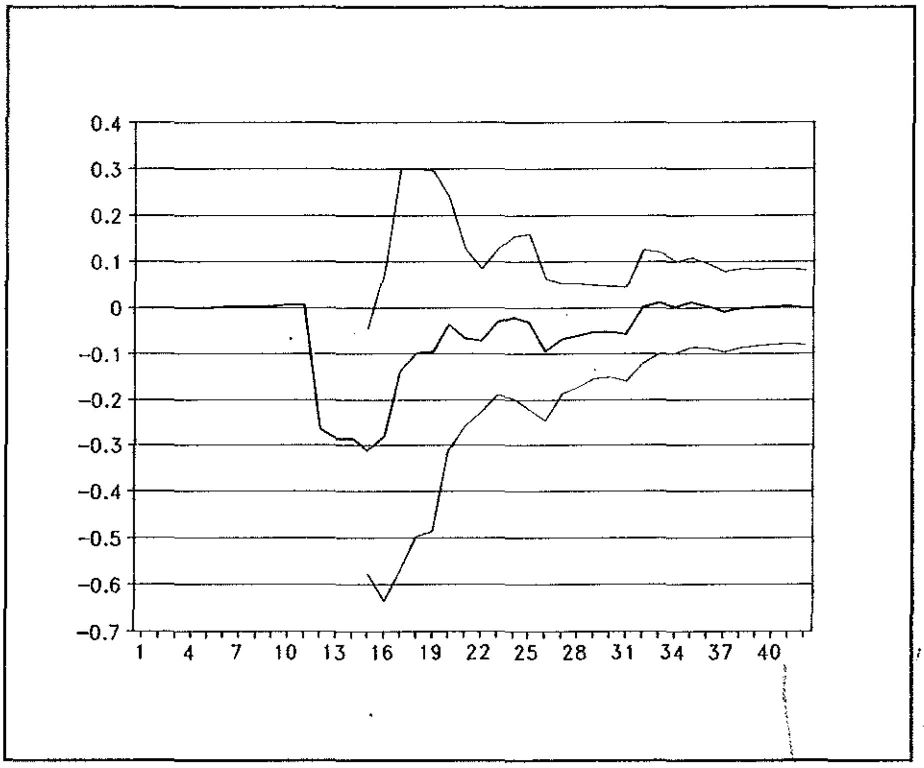

Figura 5: Evolución temporal de la estimación de α_{20} en el modelo (58) restringido.

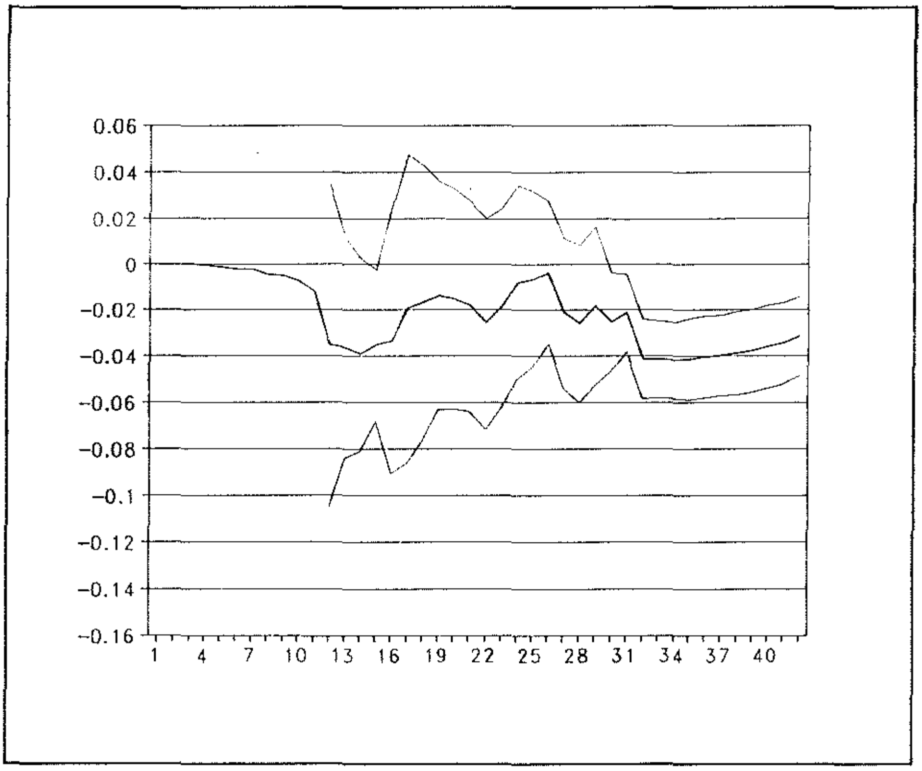

Figura 6: Evolución temporal de la estimación de α_{21} en el modelo (58).

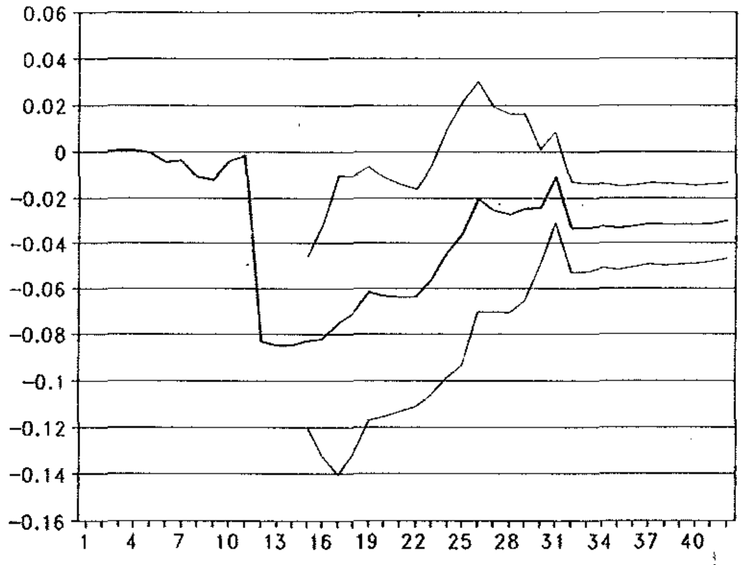

Figura 7: Evolución temporal de la estimación de α_{21} en el modelo (58) restringido.

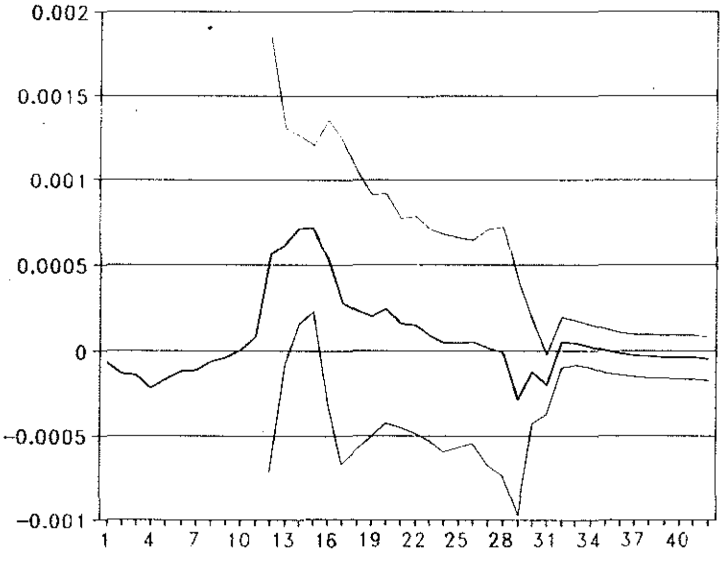

Figura 8: Evolución temporal de la estimación de α_{22} en el modelo (58).

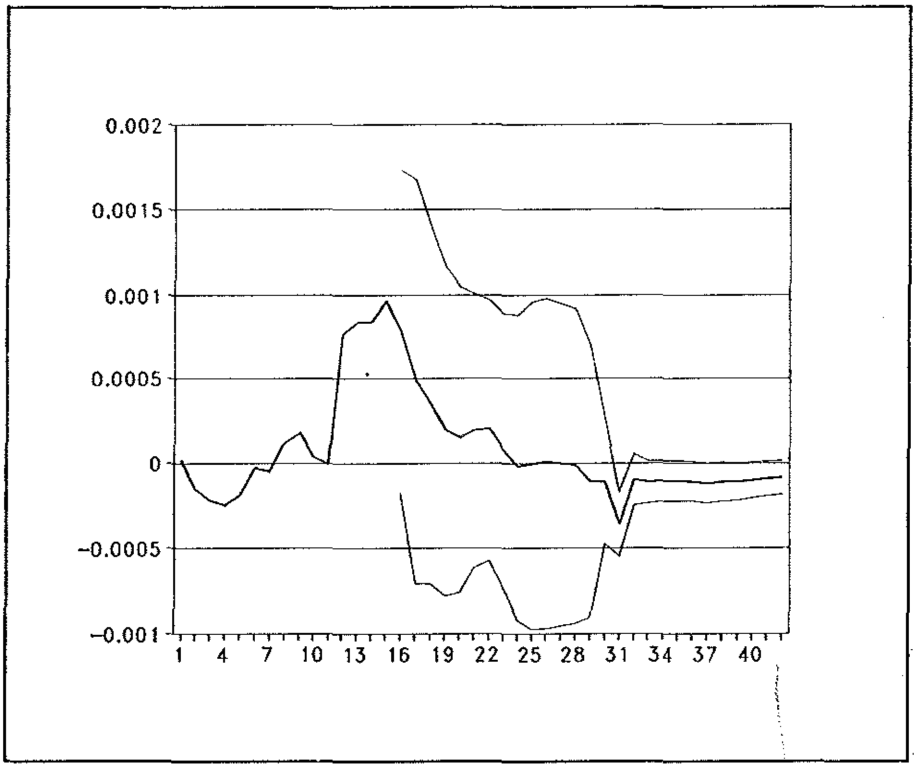

Figura 9: Evolución temporal de la estimación de α_{22} en el modelo (58) restringido.

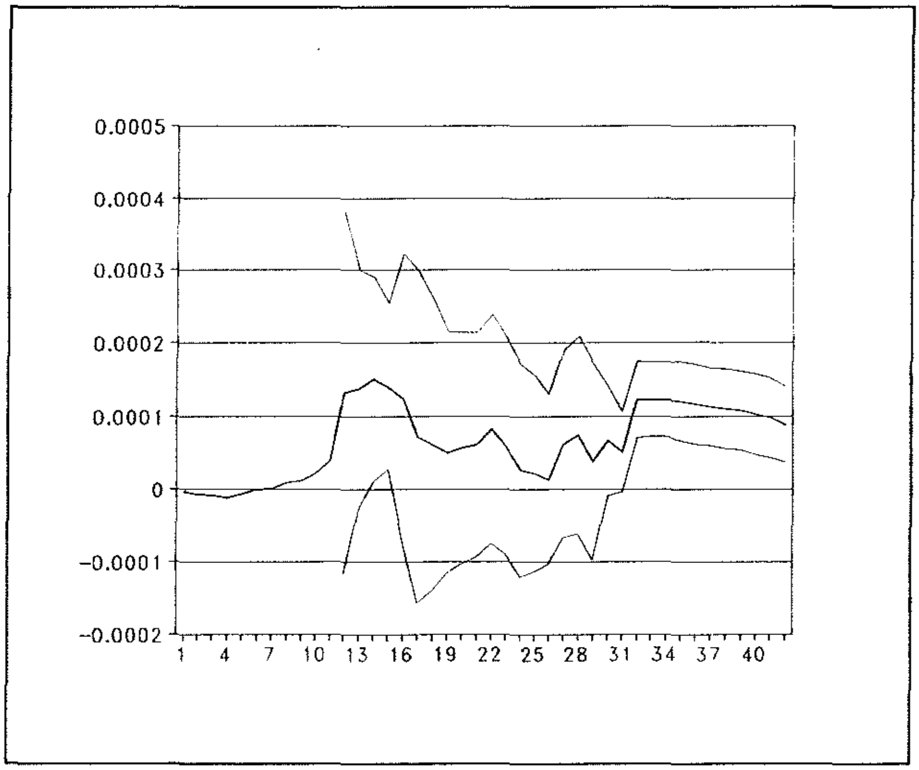

Figura 10: Evolución temporal de la estimación de α_{23} en el modelo (58).

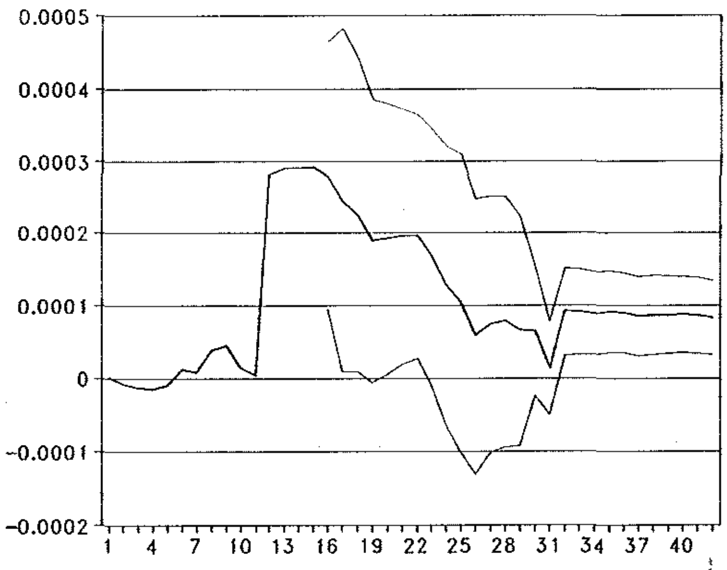

Figura 11: Evolución temporal de la estimación de α_{23} en el modelo (58) restringido.

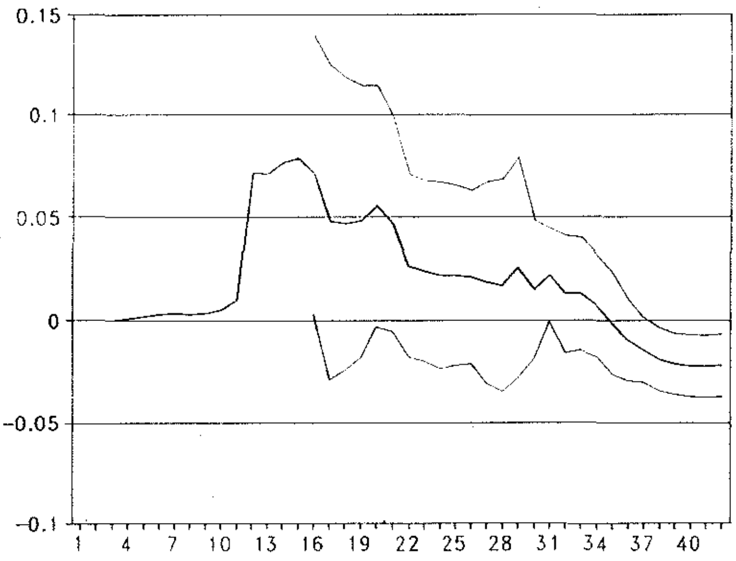

Figura 12: Evolución temporal de la estimación de α_{30} en el modelo (58).

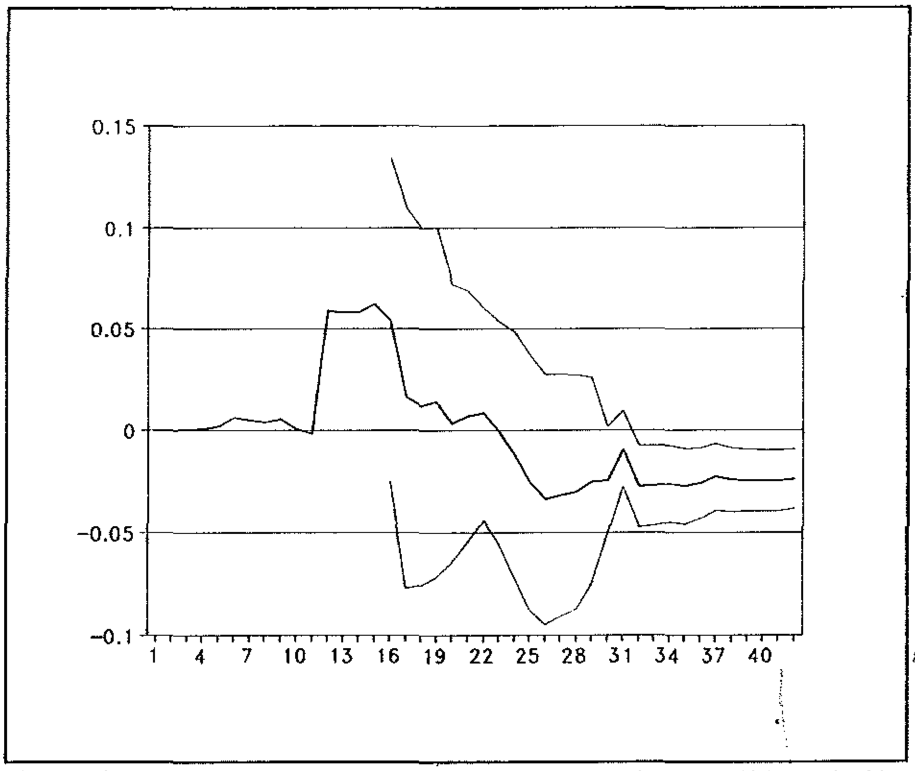

Figura 13: Evolución temporal de la estimación de α_{30} en el modelo (58) restringido.

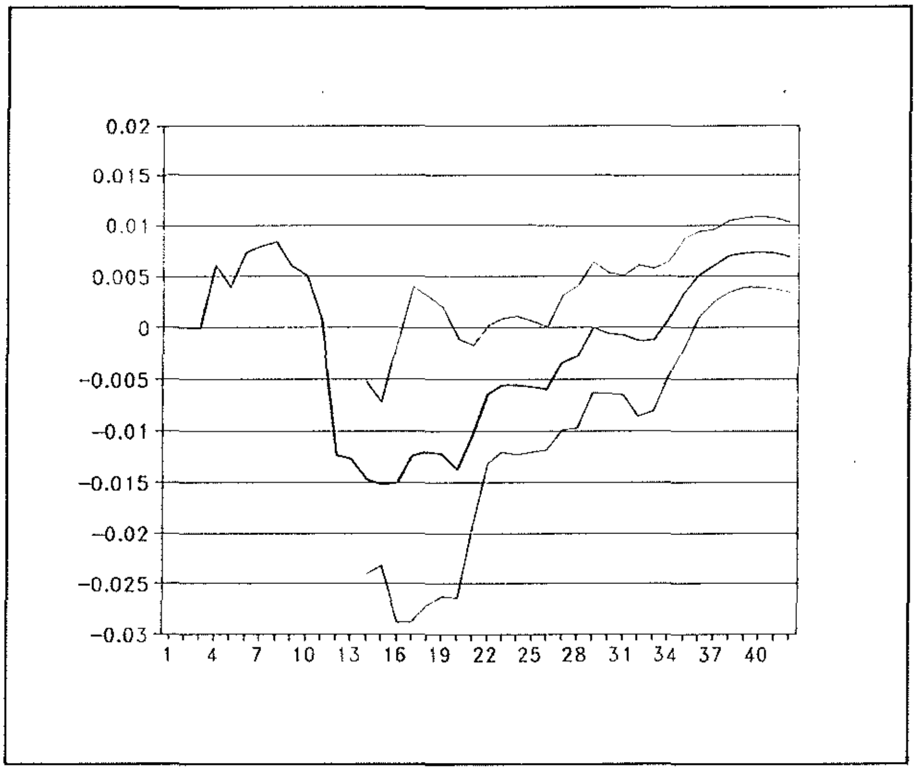

Figura 14: Evolución temporal de la estimación de α_{31} en el modelo (58).

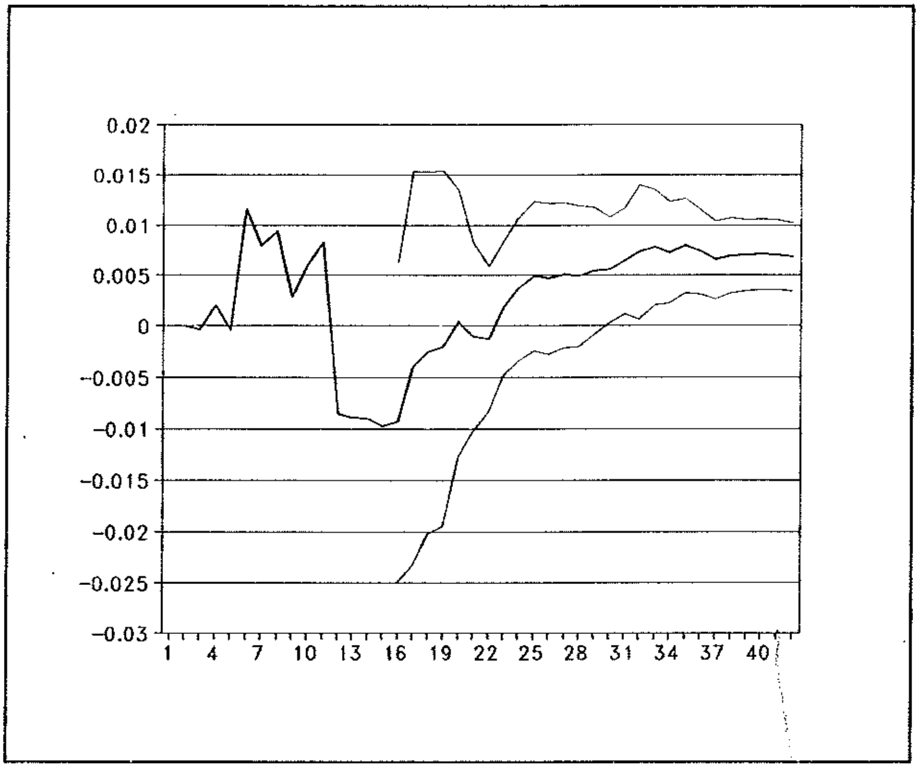

Figura 15: Evolución temporal de la estimación de α_{31} en el modelo (58) restringido.

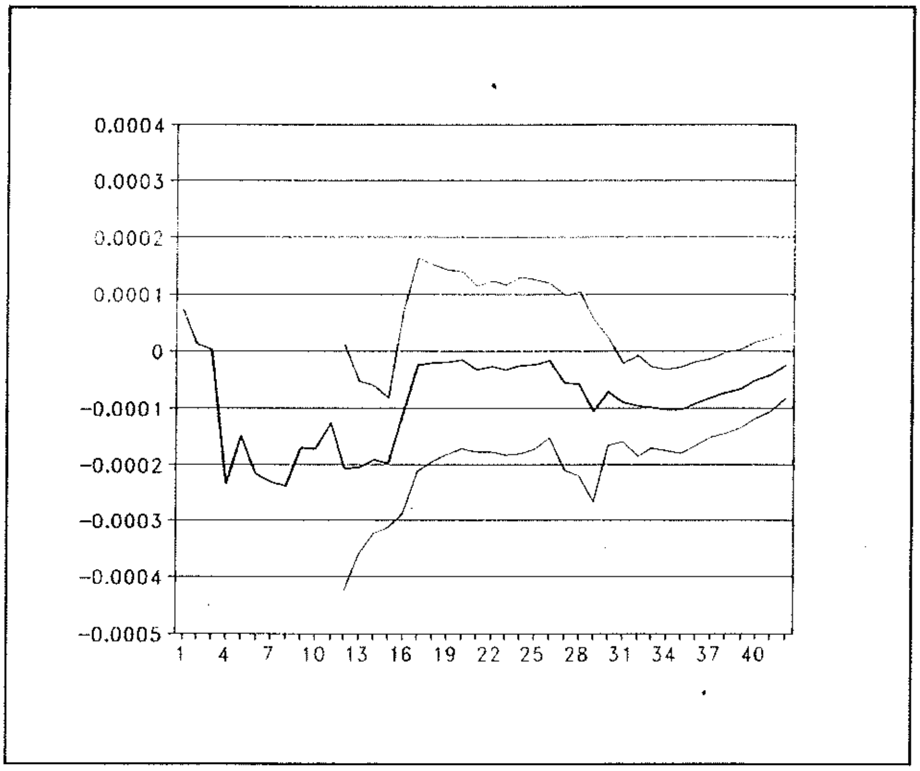

Figura 16: Evolución temporal de la estimación de α_{32} en el modelo (58).

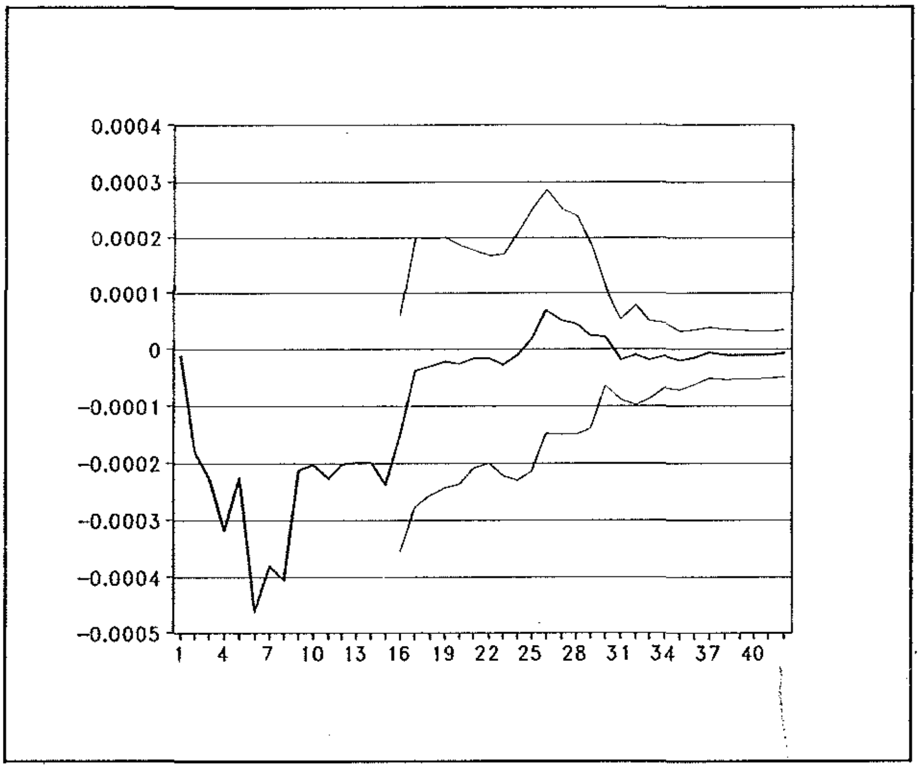

Figura 17: Evolución temporal de la estimación de α_{32} en el modelo (58) restringido.

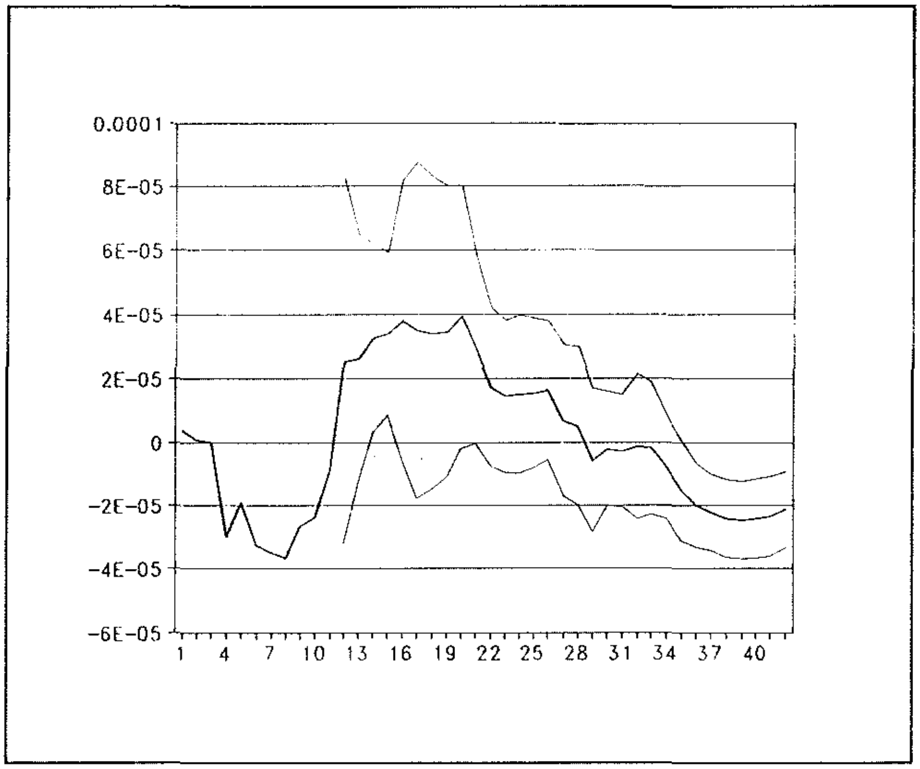

Figura 18: Evolución temporal de la estimación de α_{33} en el modelo (58).

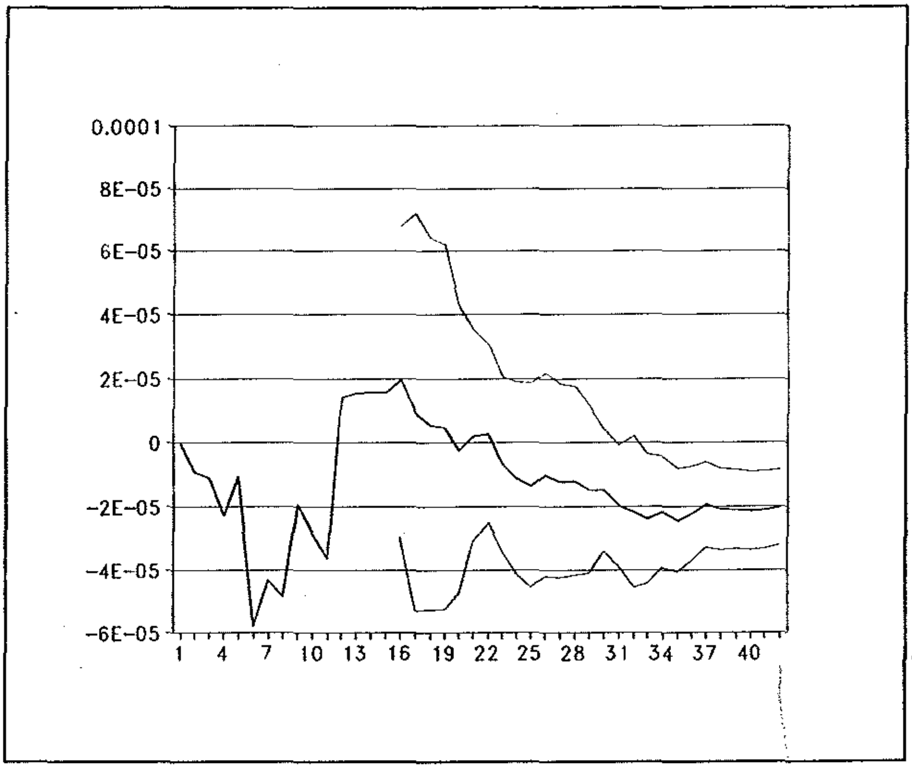

Figura 19: Evolución temporal de la estimación de α_{33} en el modelo (58) restringido.

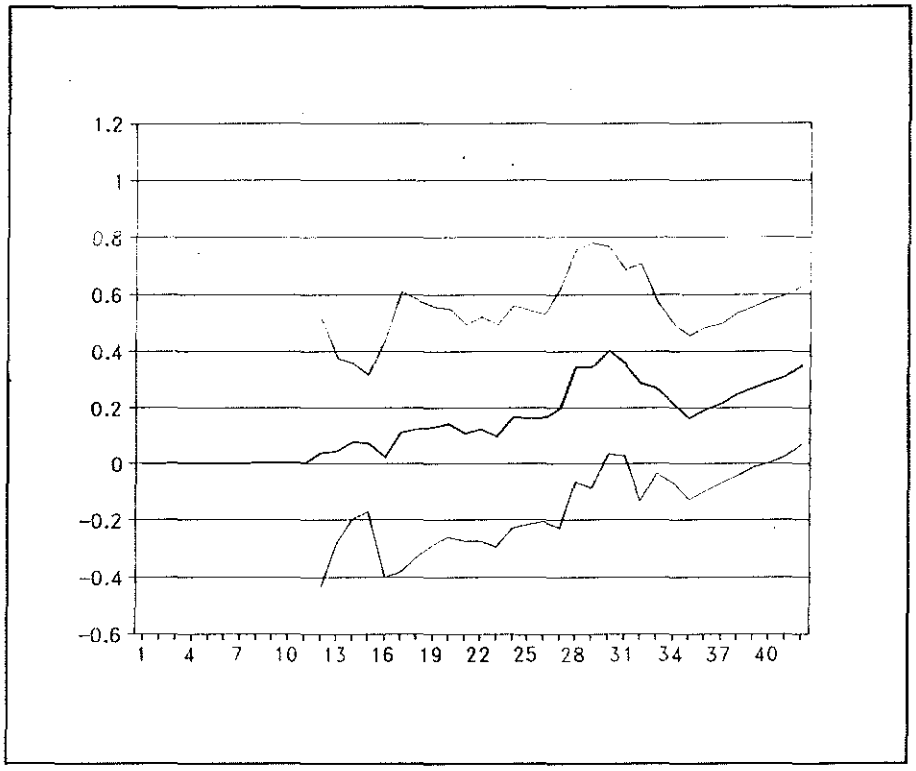

Figura 20: Evolución temporal de la estimación de β_4 en el modelo (58).

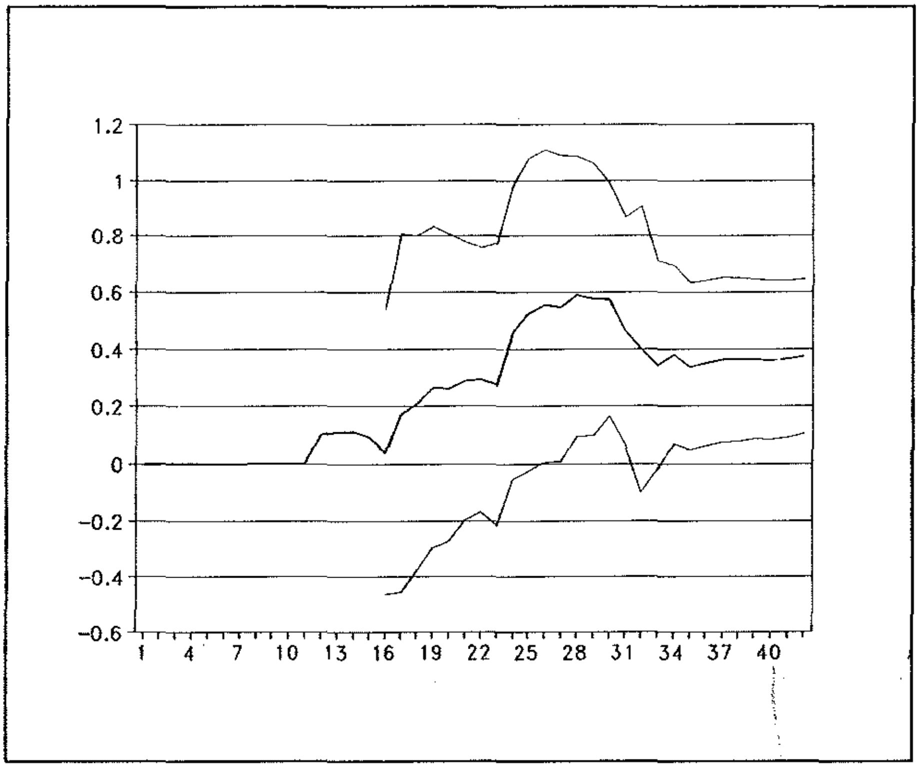

Figura 21: Evolución temporal de la estimación de β_4 en el modelo (58) restringido.

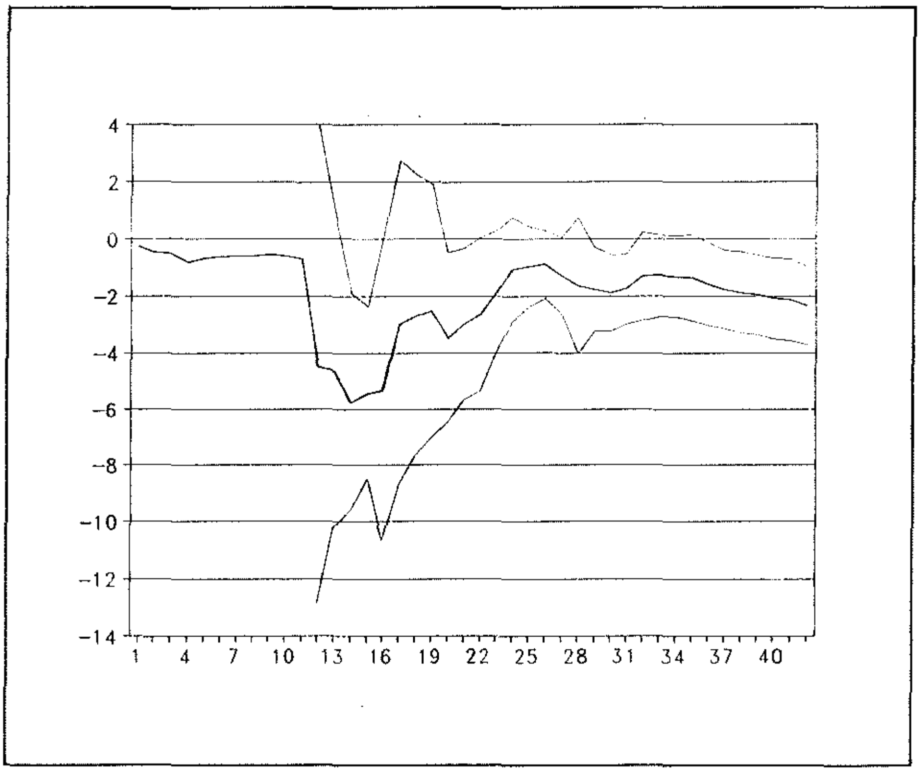

Figura 22: Evolución temporal de la estimación de $\Sigma\, \beta_{2j}$ en el modelo (58).

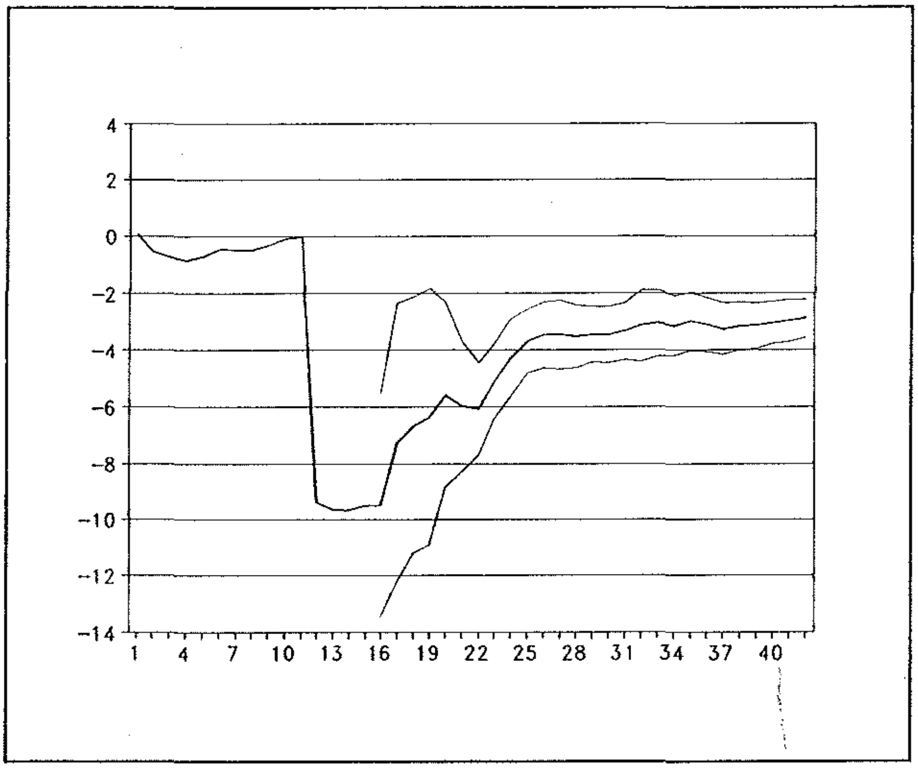

Figura 23: Evolución temporal de la estimación de $\Sigma\, \beta_{2j}$ en el modelo (58) restringido.

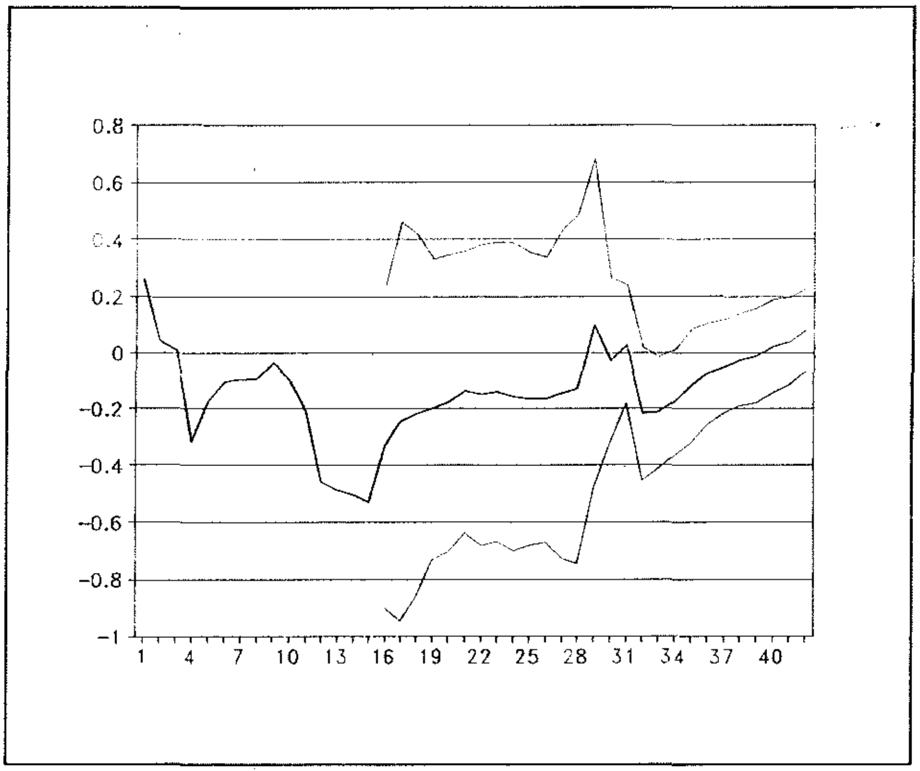

Figura 24: Evolución temporal de la estimación de $\Sigma\, \beta_{3j}$ en el modelo (58).

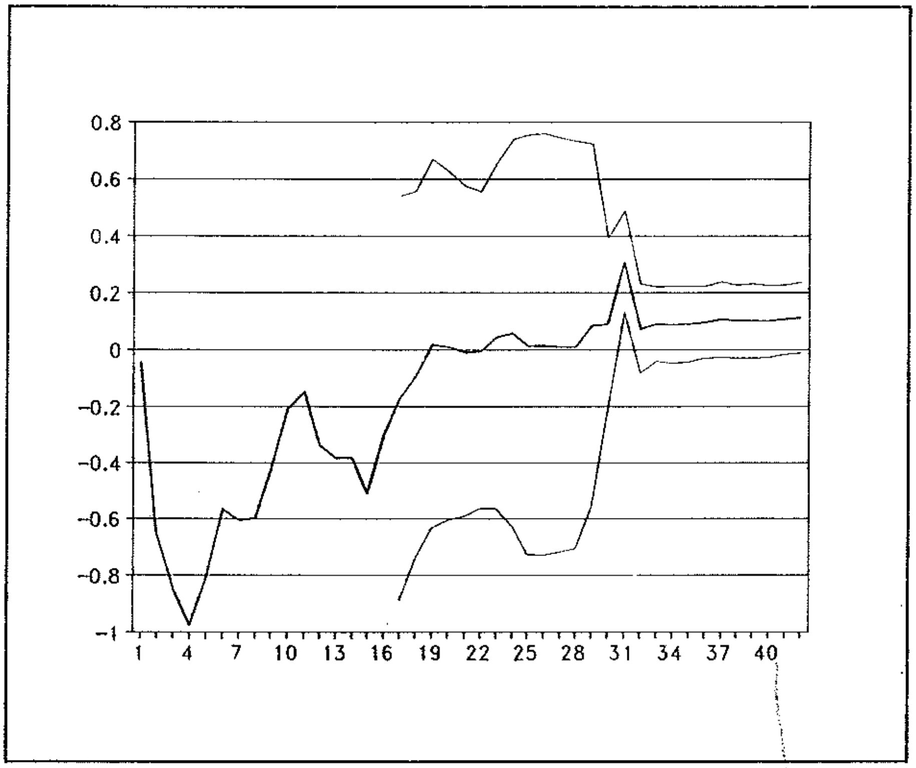

Figura 25: Evolución temporal de la estimación de $\Sigma\, \beta_{3j}$ en el modelo (58) restringido.

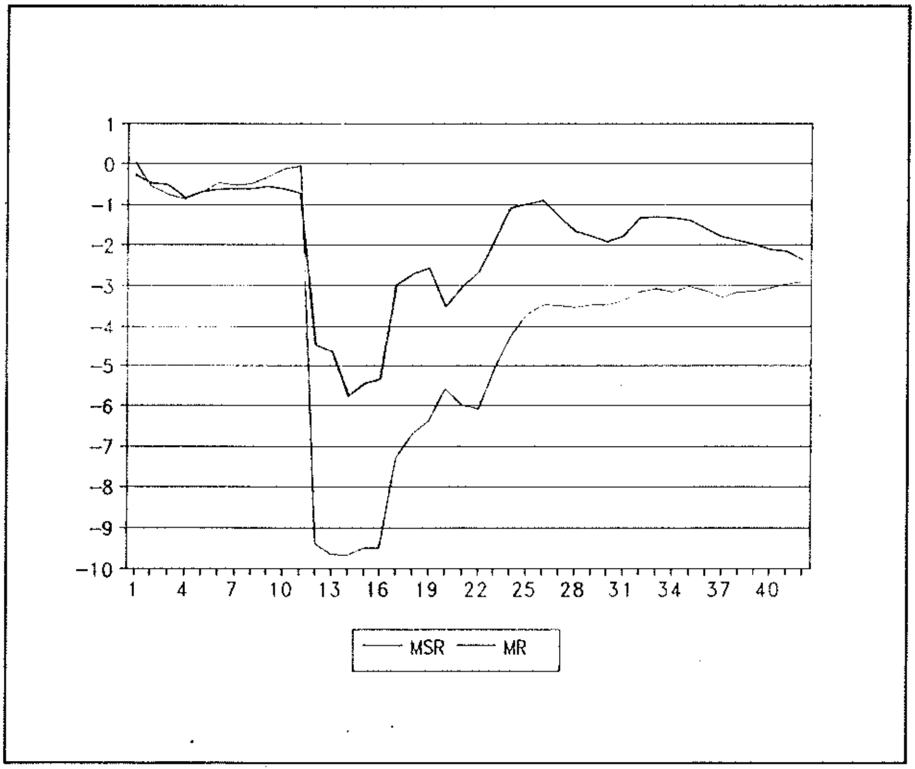

Figura 26: Evolución temporal de la estimación de $\Sigma\, \beta_{2j}$ en el modelo (58) (MSR) y (58) restringido (MR).

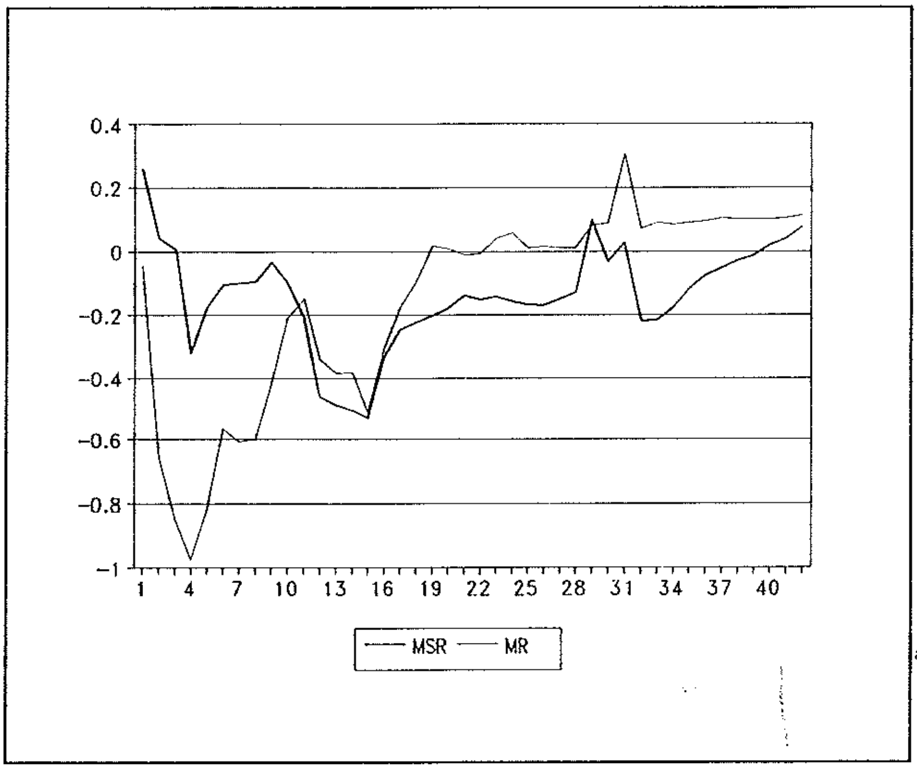

Figura 27: Evolución temporal de la estimación de $\Sigma\ \beta_{3j}$ en el modelo (58) (MSR) y (58) restringido (MR).

Notas:

[1] Para que las restricciones $A\beta_t = c$ se satisfagan en todo instante de tiempo, es suficiente que $A\beta_0 = c$, lo cual se cumple dada la condición inicial (40) y teniendo en cuenta la ortogonalidad entre las matrices A y M_a. Por tanto, la matriz V_t es también ortogonal a A en todo instante de tiempo [ver ecuación (35)].

[2] El paquete utilizado para la estimación del modelo (58) por MCO es TSP, versión 4.0.

Referencias:

Aitchison, J. y S.D. Silvey (1958). "Maximun-likelihood estimation of parameters subject to restraints". *Annals of Mathematical Statistics*, 29, pág. 813-828.

Anderson, B.D.O. y J.B. Moore (1979). *Optimal filtering*. Prentice-all, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Bierman, G.J. (1977). *Factorization methods for discrete sequential estimation*. Mathematics in Science and Engineering, vol. 128. Academic Press, Inc.

Brow, R.L., T. Durbin y J.M. Evans (1975). "Techniques for testing the constancy of regression relations over time" (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B*, 37, pág. 149-192.

Davidson, J., D. Hendry, F. Sraba y J. Yeo (1978). "Econometric modelling of the aggregate time series relationships between consumers expenditure and income in the U.K." *Economic Journal.*

Dufour, J-M. (1982). "Recursive stability analysis of linear regression relationships (an exploratory methodology)". *Journal of Econometrics*, 19, pág. 31-76.

Edwards, S. (1983). "Floating Exchange Rates in Less-Developed Countries. A Monetary Analysis of the Peruvian Experience, 1950-54". *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 15, nº 1, pág. 73-81.

Kalaba, R. y N. Rasakhoo (1986). "Algorithms for generalized inverses". *Journal of Optimization Theory and Applications*, 48, pág. 427-435.

Leybourne, S.J. (1993). "Estimation and Testing of Time-varying Coefficient Regression Models in the Presence of Linear Restrictions". *Journal of Forecasting*, vol.12, pág. 49-62.

Lott, W.F. y S.C. Ray (1992). *Applied Econometrics: Problems with Data Sets*. The Dryden Press. San Diego: Harcourt Brace Jovanovich, Inc.

Sotoca, S. (1993). "El problema de las condiciones iniciales en los algoritmos de estimación recursiva de modelos lineales". *Estadística Española*, vol. 35, nº 132, pág. 89-115.

Young, P. (1984). *Recursive estimation and time-series analysis. An introduction*. Springer-Verlag. Heidelberg.

RECURSIVE ESTIMATION OF LINEAL MODELS WITH RESTRICTIONS BETWEEN THE COEFFICIENTS

SUMMARY:

In this paper we show that recursive estimates of a linearly constrained model parameters can be obtained by initializing adequately the standard method (recursive least squares). The advantage of this approach with regard to it alternative (reduced-dimension filters) are 1) the same algorithm can be used for estimating constrained and unconstrained models and 2) it allows a recursive constraint testing. The theoretical analysis is completed with an example, which shows how the recursive estimation provides useful insights about the parameter stability and the effect of each observation over the estimates.

Key words: initial conditions, recursive estimation, Kalman filter, reduced-dimension filter, linear constraints.