Documento de trabajo
9416

CONSIDERACIONES SOBRE LOS METODOS RECURSIVOS DE CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE RUINA: CASO HORIZONTE TEMPORAL FINITO Y TIEMPO DISCRETO.

MIGUEL ARTURO USABEL RODRIGO

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
Campus de Somosaguas 28223 MADRID

CONSIDERACIONES SOBRE LOS METODOS RECURSIVOS DE CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE RUINA:CASO HORIZONTE TEMPORAL FINITO Y TIEMPO DISCRETO.

Por: Miguel Arturo Usábel Rodrigo
Departamento de Economía Financiera y Actuarial.
Universidad Complutense de Madrid.

CONTENIDO

El presente trabajo se centra en estos dos aspectos:

El primero es confirmar que los distintos métodos expuestos de cálculo recursivo de funciones son adecuados para obtener el valor de la probabilidad del suceso supervivencia(complementario del suceso de la ruina)con horizonte finito t y consideración temporal discreta(hecho realizado anteriormente por los autores de cada método).

El segundo aspecto consiste en establecer la forma y las condiciones de equivalencia entre los métodos;de manera que podamos comparar conclusiones o ejemplos obtenidos por alguno de estos métodos con otras consideraciones extraidas de los restantes.

Términos significativos:*Proceso estocástico,probabilidad de supervivencia,método recursivo.*

I.INTRODUCCION.MODELO DE VARIACIÓN DE LAS RESERVAS. (MODELO CLÁSICO)

El proceso estocástico que modeliza el valor de las reservas de la entidad en los distintos instantes temporales discretos $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ puede definirse mediante la ecuación(modelo clásico de la teoría del riesgo):

$$R_i = R_0 + P_i - S_i$$

siendo:

- R_0:Reservas de la entidad en el instante temporal 0 o reservas iniciales.
- P_i:Primas acumuladas hasta el año i,es decir,la suma de las primas anuales correspondientes a los años $j=1,2,\ldots,t$:

$$P_i = \sum_{j=1}^{i} p_j$$

siendo p_j la prima anual correspondiente al año j.

- S_i:Variable aleatoria de un proceso estocástico en tiempo discreto que representa la siniestralidad total acumulada hasta el instante temporal i:

$$\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$$

También puede expresarse como:

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} s_j$$

siendo s_j la variable aleatoria sinestralidad total anual correspondiente al año j.

A partir de este proceso estocástico $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ definimos los conceptos siguientes:

a) Suceso de supervivencia(A_t^c):

Se expresa como el siguiente conjunto cilíndrico:

$$A_t^c = \{\omega \in \mathfrak{B} \; / \; R_i \geq 0 \;\; i=1,2,\ldots,t \}$$

siendo ω una trayectoria perteneciente a $\mathfrak{B}$, la σ-álgebra del conjunto F de las funciones del tipo:

$$f \in F \qquad f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

perteneciente al espacio probabilizable del proceso estocástico $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$.

En otras palabras,el suceso que acontece cuando las reservas de la entidad en los instantes 1,2,etc hasta n son siempre no negativas.

b) Suceso de la ruina(A_t):

SE define como el conjunto cilíndrico:

$$A_t = \{\omega \in \mathfrak{B} \;/\; (\exists\ i \;/\; R_i < 0 \quad i=1,2,\ldots,t)\ \}$$

El suceso acaecido cuando, en algún momento, las reservas de la entidad se hacen negativas.Como podemos ver el suceso de la ruina es complementario del suceso de supervivencia.

La probabilidad de ruina con horizonte temporal finito(n) y tiempo discreto podemos expresarla:

$$\boxed{\mathrm{Prob}(A_t) = 1 - \mathrm{Prob}(A_t^c)}$$

II.METODOS DE CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE RUINA:HORIZONTE TEMPORAL FINITO Y TIEMPO DISCRETO.

Adoptado el modelo anterior para definir el proceso estocástico que explica la variación de las reservas en el tiempo,realizamos un recorrido por la literatura actuarial existente sobre el cálculo de la probabilidad de ruina en el caso de horizonte temporal finito y tiempo discreto,encontrando los siguientes métodos de cálculo:

A)FÓRMULAS BÜHLMANN.[3]

(1)Definimos el suceso $B_t(x)$ como el siguiente conjunto cilíndrico:

$$B_t(x) = \{\omega \in \mathfrak{C} \;/\; S_t \le x\ \}$$

(1)procedimiento alternativo de demostración ;no es el utilizado en la bibliografía.

siendo ω una trayectoria pertenenciente a $\mathfrak{C}$,la σ-álgebra del conjunto F(definido en el epígrafe anterior) correspondiente al espacio probabilizable del proceso estocástico en tiempo discreto: $\{S_l\}_{l=1}^{\infty}$.

Se ve claramente que el suceso B_t puede definirse también como:

$$B_t(x) = [S_t \leq x]$$

siendo S_t la variable aleatoria que explica el valor de la siniestralidad acumulada en el instante temporal t.

Expresando el suceso $[x;A^c_{t-1}]$ como:

$$[x;A^c_{t-1}] = B_t(X) \cap A^c_{t-1}$$

decimos que dicho suceso se presenta cuando el proceso no ha incurrido en ruina hasta el instante t-1 y además en el instante t la siniestralidad total acumulada es menor que el valor x.

Escribiendo la ecuación que definía el valor de las reservas:

$$R_t = R_0 + P_t - S_t$$

deducimos que :

$$R_t \geq 0 \Leftrightarrow S_t \leq R_0 + P_t$$

por tanto escribimos:

$$[R_0 + P_t;A^c_{t-1}] = B_t(R_o+P_t) \cap A^c_{t-1} =$$

$$= \{\omega \in \mathfrak{C} \ / \ S_t \leq R_0+P_t \ \} \cap \{\omega \in \mathfrak{B} \ / \ R_l \geq 0 \ \ l=1,2,\ldots,t \ \} = A^c_t$$

$$\boxed{A^c_t = [R_0 + P_t;A^c_{t-1}]}$$

Definiendo $G_i(x)$ como la función de distribución de la siniestralidad total anual correspondiente al año i:

$$(2)G_i(x) = \text{Prob}\{s_i \leq x\}$$

introducimos la *restricción* de suponer las variables aleatorias siniestralidad total anual correspomdiente al año $i(s_i)$ como independientes e igualmente distribuidas lo cual implica que la siniestralidad total acumulada es una variable aleatoria estacionaria:

restricción:siniestralidad acumulada estacionaria.

$$S_t - S_{t-1} = S_{t+n} - S_{t+n-1} \Leftrightarrow G_i(x) = G(x) \quad i=1,2,...$$

podemos afirmar,entonces,que:

$$\text{Prob}[B_i(x)] = G(x)$$

Si definimos el suceso siguiente:

$$C_{t-1}(y) = \left[[S_{t-1} = y] \cap A^c_{t-2} \right]$$

Expresando el siguiente suceso condicionado:

(2)La siniestralidad es siempre no negativa.

$$D_t(x/y)=\left\{ B_t(x) \,/\, C_{t-1}(y) \right\}$$

mediante el teorema de Bayes podemos escribir:

$$\text{prob}[D_t(x/y)] = \frac{\text{Prob}[\,B_t(x) \cap C_{t-1}(y)\,]}{\text{Prob}[C_{t-1}(y)]} \quad \text{expresión 1}$$

siendo:

$$[x;A^c_{t-1}] = \bigcup_{y \le R_0+P_{t-1}} B_t(x) \cap C_{t-1}(y) \left\{ \begin{array}{l} \text{sucesos} \\ \text{disjuntos dos} \\ \text{a dos.} \end{array} \right\}$$

teniendo en cuenta la independencia de las siniestralidades anuales la condición de Markov debe cumplirse:

$$D_t(x/y)=\left\{ B_t(x) \,/\, S_{t-1}=y \cap A^c_{t-2} \right\} = \left\{ B_t(x) \,/\, S_{t-1}=y \right\}$$

resultando:

$$\text{Prob}[D_t(x/y)] = G(x-y)$$

expresando:

$$\text{Prob}[x;A^c_{t-1}] = H^{*t-1}(x)$$

podemos deducir que:

$$\mathrm{Prob}[C_{t-1}(y)] = d_y H^{*t-1}(x) = \frac{d\ H^{*t-1}(y)}{dy} dy = h^{*t-1}(y)dy$$

y por tanto escribir:

$$\mathrm{Prob}[x;A^c_{t-1}] = \mathrm{Prob}\left[\bigcup_{y \le R_0+P_{t-1}} B_t(x) \cap C_{t-1}(y)\right]$$

La probabilidad de la unión de sucesos disjuntos es la suma de las probabilidades,al tratarse de una suma finita no numerable podemos representarla mediante una integral:

$$\mathrm{Prob}\left[\bigcup_{y \le R_0+P_{t-1}} B_t(x) \cap C_{t-1}(y)\right] = \int_0^{R_0+P_{t-1}} \mathrm{Prob}\left[B_t(x) \cap C_{t-1}(y)\right]$$

aplicando el Teorema de Bayes,escribimos:

$$\mathrm{Prob}\left[B_t(x) \cap C_{t-1}(y)\right] = \mathrm{prob}[D_t(x/y)]\ \mathrm{Prob}\left[C_{t-1}(y)\right]$$

sustituyendo obtenemos finalmente:

$$\boxed{\mathrm{Prob}[x;A^c_{t-1}] = H^{*t}(x) = \int_0^{R_0+P_{t-1}} G(x-y) d_y(H^{*t-1}(y))}$$

Fórmula I

que constituye una especie de convolución truncada.Mediante esta fórmula recursiva podemos calcular el valor de la probabilidad del suceso supervivencia:

$$\boxed{\mathrm{Prob}[A_t^c] = \mathrm{Prob}[R_0+P_t;A_{t-1}^c] = H^{*t}(R_0+P_t)}$$

<u>Nota:</u>*Hans Bühlmann ,en la referencia bibliográfica[1] utiliza un procedimiento distinto para deducir la fórmula I,a través de integrales múltiples*

Si queremos hallar una fórmula alternativa(3) para $H^{*t}(R_0+P_t)$ podemos utilizar un <u>argumento de renovación</u>:

El suceso $[R_0+P_t;A_{t-1}^c]=A_t^c$ podría expresarse como una unión de sucesos excluyentes o disjuntos;siendo cada termino de dicha unión la intersección de los dos sucesos siguientes:

- Suceso definido como que la siniestralidad en el primer año haya tenido el valor y:

$$[C_1(y)].$$

-suceso de supervivencia condionado al hecho de que la siniestralidad del primer año sea y:

$$E_t(R_0+P_t/y) = \left[[R_0+P_t;A_{t-1}^c] \big/ C_1(y) \right] = \left[(R_0+P_1-y)+\sum_{i=2}^{t} p_i;A_{t-2}^c \right]$$

debido a la estacionariedad del proceso equivaldría al suceso de supervivencia en t-1 años partiendo de unas reservas iniciales: R_0+P_1-y.

(3)Esta fórmula no figura en la bibliografía citada.

De manera que expresamos mediante el teorema de la Probabilidad total:

$$[R_0+P_t;A^c_{t-1}] = \left[\bigcup_{y\leq R_0+P_1}\left[C_1(y) \cap E_t(R_0+P_t/y\right]\right]$$

(disjuntos)

Deduciendo obtenemos:

$$\text{Prob}[E_t(R_0+P_t/y)]=\text{Prob}\left[(R_0+P_1-y)+\sum_{i=2}^{t} p_i;A^c_{t-2}\right]=H^{*t-1}\left(R_0+P_1-y+\sum_{i=2}^{t} p_i\right)$$

$$\text{Prob}[C_1(y)] = d_yG(y)$$

aplicando el Teorema de Bayes de forma similar que en la expresión 1 escribimos:

$$\text{Prob}[R_0+P_t;A^c_{t-1}] = \text{Prob}\left[\bigcup_{y\leq R_0+P_1}\left[C_1(y) \cap E_t(R_0+P_t/y\right]\right] =$$

$$= \int_0^{R_0+P_1} H^{*t-1}\left((R_0+P_1-y)+\sum_{i=2}^{t} p_i\right)d_yG(y)$$

$$\boxed{H^{*t}(R_0+P_t) = \int_0^{R_0+P_1} H^{*t-1}\left((R_0+P_1-y)+\sum_{i=2}^{t} p_i\right)d_yG(y)}$$

Fórmula II

B)FÓRMULA DE VYLDER & GOOVAERTS.[4]

Aceptando las siguientes *restricciones:*

1. *Estacionariedad del proceso estocástico de la siniestralidad total*, como se supuso en el epígrafe anterior.
2. *Estacionariedad del proceso determinista de cobro de las primas:*

$$P_t - P_{t-1} = P_{t+n} - P_{t+n-1} \Rightarrow p_t = p_{t+n} = c \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{P_t = ct}$$

definimos la siguiente función de forma recursiva:

$$\begin{cases} U_{1.1}(R_0) = G(R_0+c) \\ U_{1,t}(R_0) = \displaystyle\int_0^{R_0+c} U_{1.t-1}(R_0+c-y)\,d_yG(y) \quad t\geq 2 \end{cases}$$

Vamos a demostrar que las expresiones $U_{1,t}(R_0)$ obtenidas mediante las fórmulas recursivas anteriores coinciden con la probabilidad de ruina.(1)

En el epígrafe anterior quedó probado de manera justificada que la probabilidad de ruina ($\mathrm{Prob}[A_t^c]$)podía igualarse a la expresión:

$$H^{*t}(R_0+P_t) = \int_0^{R_0+P_1} H^{*t-1}\left((R_0+P_1-y)+\sum_{i=2}^{t} p_i\right) d_yG(y)$$

(1)procedimiento alternativo de demostración ;no es el utilizado en la bibliografía.

probaremos:

$$\boxed{U_{1,t}(R_0) = H^{*t}(R_0+P_t) = \quad \forall\ t}$$

utilizando la <u>inducción</u> <u>completa</u>:

Paso 1: $U_{1,1}(R_0)=G(R_0+c)$

Incorporando la restricción del proceso de primas primas estacionario y definiendo $H^{*0}(x)$ como la dist. de Heaviside:

$H^{*1}(R_0+P_1)=G(R_0+c)$

Paso 2:

Suponiendo:

$H^{*t-1}(R_0+P_{t-1})=U_{1,t-1}(R_0)$

debido a la estacionariedad de las primas:

$P_1=c$

$\sum_{l=2}^{t} P_l=c(t-1)=P_{t-1}$

deduciendo que:

$H^{*t-1}(R_0+P_1-y+\sum_{l=2}^{n} p_l)=H^{*t-1}((R_0+c-y)+P_{t-1})=U_{1,t-1}(R_0+c-y)$

sustituyendo en la fórmula II:

$$H^{*t}(R_0+P_t) = \int_0^{R_0+c} U_{1,t-1}(R_0+c-y)d_yG(y)=U_{1,t}(R_0)$$

Q.E.D.

Por tanto podemos escribir la igualdad:

$$\mathrm{Prob}[A_t^c] = H^{*t}(R_0+P_t) = U_{1,t}(R_0)$$

aceptadas las restricciones de estacionariedad.

De esta manera hemos probado que el uso de las expresiones recursivas utilizadas por De Vylder & Goovaerts garantiza la obtención de la probabilidad de supervivencia.

C)PRIMERA FÓRMULA DE BEARD[1]

Definiendo el proceso estocástico en tiempo discreto $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$;como el formado por las variables aleatorias:

$$Z_i=p_i-s_i$$

teniendo como función de densidad $F_i(Z_i)$ establecemos que:

$$R_i=R_0+P_i-S_i=R_0+\sum_{j=1}^{i} p_j - \sum_{j=1}^{i} s_j =R_0+\sum_{j=1}^{i} (p_j-s_j)=R_0+\sum_{j=1}^{i} Z_j$$

recordando que el suceso de supervivencia se definía como el conjunto cilíndrico siguiente:

$$A_t^c = \{\omega \in \mathbb{B} \ / \ R_i \geq 0 \quad i=1,2,\ldots,t \}$$

mediante el Teorema de Kolmogorov podemos escribir la siguiente probabilidad conjunta:

$$\mathrm{Prob}[A_t^c] = \mathrm{Prob}\left[R_1\geq 0 \ ;R_2\geq 0 \ ;\ldots;R_t\geq 0\right]$$

siendo R_i variables aleatorias pertenecientes al proceso estocástico $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$.Expresando esta probabilidad en forma de integral:

$$\int_{-R_0}^{p_1}\int_{-R_0-Z_1}^{p_2}\cdots\int_{-R_0-Z_1-Z_2,\ldots,-Z_{t-1}}^{p_t} d_{z1}F_1(Z_1)d_{z2}F_2(Z_2)\ldots d_{zt}F_t(Z_t)$$

si asumimos las dos restricciones del epígrafe anterior:

- estacionariedad de la siniestralidad total
- estacionariedad de las primas.

podemos decir que:

$$\bar{Z}_i = p_i - \bar{s}_i = c - \bar{s}_i \;\Rightarrow\; F(Z_i) \quad \forall i$$

por ser $\bar{s}_i$ la variable aleatoria siniestralidad total anual la cual se distribuye de manera idéntica para cualquier i ,debido a la restricción impuesta.

Por tanto escribimos la integral:

$$^{R_0}Prob_t = \int_{-R_0}^{c} \int_{-R_0-Z_1}^{c} \cdots \int_{-R_0-Z_1-Z_2-\ldots-z_t}^{c} d_{z1}F(Z_1)\, d_{z2}F(Z_2) \ldots d_{zt}F(Z_t)$$

(integral 1)

deduciendo la siguiente expresión recursiva:

$$\boxed{^{R_0}Prob_t = \int_{-R_0}^{c} {}^{R_0+Z_1}Prob_{t-1}\; d_{zi}F(Z_i)}$$

sin embargo podemos decir también que:

$$F(Z_i) = Prob(\bar{Z}_i \leq Z_i) = Prob(c - \bar{s}_i \leq Z_i) = Prob(\bar{s}_i > c - Z_i)$$

y por tanto:

$$d_{zi}F(Z_i) = -g(c - Z_i)dZ_i$$

siendo g(x) la función de densidad de la siniestralidad anual.

Si sustituimos en la expresión anterior:

$$ {}^{R_0}\text{Prob}_t = \int_{-R_0}^{c} {}^{R_0+Z_1}\text{Prob}_{t-1}\ d_{z1}F(Z_1) \quad = $$

$$ = - \int_{-R_0}^{c} {}^{R_0+Z_1}\text{Prob}_{t-1}\ g(c-Z_1)dZ_1 $$

realizando el cambio de variable:

$$ c-Z_1 = y $$

y sustituyendo en la expresión anterior,obtenemos:

$$ {}^{R_0}\text{Prob}_t = \int_{0}^{R_0+c} {}^{R_0+c-y}\text{Prob}_{t-1} d_yG(y) $$

expresión idéntica a la utilizada en el epígrafe anterior.

$$ \boxed{U_{1,t}(R_0) = {}^{R_0}\text{Prob}_t = H^{*t}(R_0+P_t)} $$

NOTA:Obsérvese que la demostración de que la expresión $U_{1.t}(R_0)$ puede utilizarse para el cálculo de la probabilidad de supervivencia, puede basarse en la igualdad anterior.

D)SEGUNDA FÓRMULA DE BEARD.[2]

Si tenemos el siguiente conjunto cilíndrico:

$$ {}^{y}Q_t = \{\omega \in \mathbb{C}\ /\ R_t \geq y\ ; R_i \geq 0\ \ i=1,2,\ldots,t-1\} $$

es decir,el suceso que acontece cuando las reservas en el instante t son superiores a y ,además el proceso no ha estado en ruina anteriormente.La probabilidad de supervivencia en el momento t puede expresarse:

$$ \text{Prob}[A_t^c] = \text{Prob}[{}^{0}Q_t] $$

Definiendo la siguiente función de manera recursiva:

$$W(Y,1) = G(R_0+P_1-Y)$$

$$W(Y,t) = -\int_0^{R_0+P_{t-1}} G(Z+p_t-Y)d_zW(Z,t-1) \qquad t\geq 2$$

vamos a demostrar que:

$$\boxed{W(Y,t) = H^{*t}(R_0+P_t-Y) \quad \forall t}$$

utilizando la inducción completa damos estos pasos:

Paso 1:

De la propia definición de la función W(Y,1):

$$W(Y,1) = H^{*1}(R_0+P_1-Y) = G(R_0+P_1-Y)$$

Paso 2:

La hipótesis de inducción sería:

$$W(Y,t-1) = H^{*t-1}(R_0+P_{t-1}-Y)$$

por tanto:

$$d_yW(Y,t-1) = d_yH^{*t-1}(R_0+P_{t-1}-Y)$$

sustituyendo en lás fórmulas anteriores obtenemos:

$$W(Y,t) = -\int_0^{R_0+P_{t-1}} G(z+p_t-Y)d_zH^{*t-1}(R_o+P_{t-1}-z)$$

realizando el siguiente cambio de variable:

$$b = R_0+P_{t-1}-z$$

deducimos la expresión:

$$\int_0^{R_0+P_{t-1}} G((R_0+P_t-Y)-b)d_bH^{*t-1}(b) = H^{*t}(R_0+P_t-Y)$$

Q.E.D.

Recordando que:

$$\mathrm{Prob}[A_t^c] = H^{*t}(R_0+P_t)$$

podemos establecer la igualdad:

$$\mathrm{Prob}[A_t^c] = \mathrm{Prob}[{}^0Q_t] = W(0,t)$$

en general:

$$\mathrm{Prob}[{}^yQ_t] = W(y,t)$$

por lo tanto lás fórmulas recursivas vistas anteriormente son aptas para el cálculo de la probabilidad de supervivencia,tomando $y = 0$.*Observese que la equivalencia se produce sin asumir la restricción de estacionariedad en el proceso de cobro de las primas.*

E)<u>TERCERA FÓRMULA DE BEARD.</u>[2]

(1)Definiendo previamente estos sucesos elementales mediante conjuntos cilíndricos:

- $A_i^{(y)} = \{\omega \in \mathbb{C} \ / \ R_i \geq y\}$
- $B_i = \{\omega \in \mathbb{C} \ / \ R_j \geq 0 \quad j=i+1,i+2,\ldots,n\}$
- $C_i^{(y)} = \{\omega \in \mathbb{C} \ / \ R_i = y\}$

expresamos el siguiente suceso:

$$\bigcup_{y\leq 0}\left[(A_t^{(0)} \cap B_i) \cap C_i^{(y)}\right] = \left[A_t^{(0)} \cap B_i \cap \bar{A}_i^{(0)}\right]$$

que representa la situación de superavit de reservas en el instente temporal t habiendo tenido déficit por última vez al final del año i.

(1)Procedimiento alternativo de demostración;no es el utilizado en la bibligrafía.

Aplicando el teorema de Bayes podemos expresar:

$$\text{Prob}\left[(A_t^{(0)} \cap B_i) \cap C_i^{(y)}\right] = \text{Prob}\left[(A_t^{(0)} \cap B_i) \Big/ C_i^{(y)}\right] \text{Prob}[C_i^{(y)}]$$

el suceso de supervivencia puede definirse de esta manera:

$$A_t^c = \bigcap_{i=1}^{t} A_i^{(0)} = A_t^{(0)} \cap \bigcap_{i=1}^{t-1} A_i^{(0)}$$

si efectúo la unión de los siguientes sucesos disjuntos obtengo:

$$\bigcup_{i=1}^{t-1}\left[A_t^{(0)} \cap B_i \cap \bar{A}_i^{(0)}\right] = A_t^{(0)} \cap \bigcup_{i=1}^{t-1}\left[B_i \cap \bar{A}_i^{(0)}\right]$$

expresando el suceso $A_t^{(0)}$ como la siguiente unión:

$$A_t^{(0)} = A_t^{(0)} \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{t-1}\left[B_i \cap \bar{A}_i^{(0)}\right]} \cup A_t^{(0)} \cap \bigcup_{i=1}^{t-1}\left[B_i \cap \bar{A}_i^{(0)}\right]$$

comprobamos fácilmente:

$$\underbrace{\bigcup_{i=1}^{t-1}\left[B_i \cap \bar{A}_i^{(0)}\right] = \{\omega \in \mathbb{C} \;/\; \exists\; i \;; R_i<0 \;\; i\in(1,2,\ldots,t-1)\}}_{\text{suceso de la ruina } A_{t-1}}$$

por tanto:

$$\bigcup_{i=1}^{t-1}\left[B_i \cap \overline{A_i}^{(0)}\right] = A_{t-1}^{c} = \bigcap_{i=1}^{t-1} A_i^{(0)}$$

de manera que :

$$A_t^{(0)} = A_t^{(0)} \cap \bigcup_{i=1}^{t-1}\left[B_i \cap \overline{A_i}^{(0)}\right] \cup \underbrace{A_t^{(0)} \cap \bigcap_{i=1}^{t-1} A_i^{(0)}}_{A_t^{c}}$$

la expresión anterior refleja la unión de dos sucesos disjuntos por ello:

$$\mathrm{Prob}[A_t^{c}] = \mathrm{Prob}[A_t^{(0)}] - \mathrm{Prob}\left[A_t^{(0)} \cap \bigcup_{i=1}^{t-1}\left[B_i \cap \overline{A_i}^{(0)}\right]\right]$$

expresión 2

recordamos que:

$$\mathrm{Prob}\left[A_t^{(0)} \cap \bigcup_{i=1}^{t-1}\left[B_i \cap \overline{A_i}^{(0)}\right]\right] = \mathrm{Prob}\left[\bigcup_{i=1}^{t-1}\left[\bigcup_{y\leq 0}\left[(A_t^{(0)} \cap B_i) \cap C_i^{(y)}\right]\right]\right]$$

si se admiten las restricciones de estacionariedad en la siniestralidad total y en las primas puedo expresar la siguiente probabilidad mediante una función que depende sólo del tiempo interno:

$$\text{Prob}\left[(A_t^{(0)} \cap B_i) \big/ C_i^{(y)}\right] = w(y,t-i) \Rightarrow \text{Prob}[A_t^c] = w(R_0,t)$$

y deduciendo que:

$$\text{Prob}[C_i^{(y)}] = d_y G^{*i}(y)$$

Convolución i-ésima de la función de distribución de la siniestralidad total anual.

$$\text{Prob}\left[\bigcup_{i=1}^{t-1}\left[\bigcup_{y\leq 0}\left[(A_t^{(0)} \cap B_i) \cap C_i^{(y)}\right]\right]\right] = \sum_{i=1}^{t-1} \int_{-\infty}^{0} w(y,t-i)d_yG^{*i}(y)$$

por último ,es obvio que:

$$\text{Prob}[A_t^{(0)}] = 1 - G^{*t}(R_0+P_1)$$

por tanto escribimos la expresión 2 mediante la expresión recursiva:

$$\boxed{\text{Prob}[A_t^c] = w(R_0,t) = \left(1 - G^{*t}(R_0+P_1)\right) - \sum_{i=1}^{t-1} \int_{-\infty}^{0} w(y,t-i)d_yG^{*i}(y)}$$

$$\boxed{w(R_0,t) = H^{*t}(R_0+P_t)}$$

III. CONCLUSIONES.

- Hemos demostrado(apartado A) que la probabilidad del conjunto cilíndrico que representa el suceso de supervivencia(A_t^c),*asumiendo la restricción de estacionariedad de la variable aleatoria siniestralidad total anual*,podía encontrarse calculando el valor de una función($H^{*t}(x)$,definida recursivamente)en el punto R_0+P_t.
  El cálculo recursivo de $H^{*t}(R_0+P_t)$ podía hacerse mediante la fórmula I o bien la fórmula II.

- Definiendo una función $U_{1,t}(R_0)$ de manera recursiva según las las fórmulas indicadas en el apartado B) y *aceptando las restricciones de estacionariedad de primas y siniestralidad total*;demostramos ,por inducción completa ,que el valor de dicha función coincide con $H^{*t}(R_0+ct)$ y por lo tanto expresa el valor de la probabilidad de supervivencia.

- Se ha demostrado ,a su vez, que la probabilidad del suceso supervivencia,*aceptando las restricciones de estacionariedad de primas y siniestralidad total*,coincide con el valor de la función ${}^{R_0}\mathrm{Prob}_t$ de cálculo recursivo según las fórmulas del apartado C).Además mediante un cambio de variable deducíamos que el valor de dicha función coincide con $U_{1,t}(R_0)$,pues se obtienen de la misma expresión recursiva.Por tanto podemos decir que coincide a su vez con la expresión $H^{*t}(R_0+ct)$.
- En el apartado D) definíamos una función de forma recursiva W(y,t),demotrábamos ,mediante inducción completa, que el valor de dicha función coincidía con la expresión $H^{*t}(R_0+P_t-Y)$,*admitiendo la restricción de estacionariedad de la siniestralidad total únicamente*,podemos decir que el valor de la probabilidad del suceso supervivencia coincide con W(0,t),por coincidir con $H^{*t}(R_0+P_t)$.
-Por último,en el apartado E),hemos demostrado que la probabilidad del suceso supervivencia(Prob[A_t^c]),*aceptando las restricciones de estacionariedad de primas y siniestralidad total*,puede obtenerse mediante una función de cálculo recursivo $w(R_0,t)$,por lo tanto coincidirá con $H^{*t}(R_0+ct)$.

Resumiendo:

restricción:estacionariedad siniestralidad total

$$\boxed{\mathrm{Prob}[A_t^c] = H^{*t}(R_0+P_t) = W(0,t)}$$

- *restricción-1:estacionariedad siniestralidad total*
- *restricción-2:estacionariedad primas.*

$$\boxed{\mathrm{Prob}[A_t^c] = H^{*t}(R_0+ct) = {}^{R_0}\mathrm{Prob}_t = w(R_0}$$

* * *

BIBLIOGRAFIA

[1] Beard,R.E.(1971):*On the calculation of the ruin probability for a finite time period.*ASTIN bulletin.Dec.1971.Vol.VI. Part.2.Pgs 129-133.

[2] Beard,R.E.;Pentikäinen,T and Pesonen,E(1984):*Risk Theory.* Chapman and Hall publishers.New York.Pgs 227-233.

[3] Bühlmann,H(1970):*Mathematical methods in risk theory.* Springer-Verlag,Berlin.Pgs. 137-139

[4] De Vylder,F and Goovaerts,M.J.(1988):*Recursive calculation of finite time ruin probabilities.*Insurance:mathematics and economics;7.1988;pgs 93-97.

[5] Wikstad,N(1971):*Exemplification of ruin probabilities.* ASTIN bulletin 6;pgs 147-152