ÍNDICES DE SOLAPAMIENTO ENTRE CONJUNTOS DIFUSOS. CONSTRUCCIÓN A PARTIR DE GRADOS DE SOLAPAMIENTO

Humberto Bustince[1] **Javier Fernández**[1] **Javier Montero**[2]

[1] Departamento de Automática y Computación, Universidad Pública de Navarra, Campus Arrosadia s/n, 31006, Pamplona, España, {bustince,fcojavier.fernandez}@unavarra.es
[2] Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, España, monty@mat.ucm.es

Resumen

En este trabajo presentamos las propiedades básicas que, desde nuestro punto de vista, deben cumplir los grados de solapamiento. Estudiamos diferentes métodos de construcción y analizamos las condiciones bajo las cuales las t-normas continuas son grados de solapamiento. Por último, demostramos que si aplicamos operadores de agregación especiales a dichos grados, entonces obtenemos el índice de solapamiento (overlap) entre conjuntos difusos definido por Dubois y el índice de consistencia propuesto por Zadeh.

Palabras Clave: Grado de solapamiento, Indice de overlap, t-norma.

1 GRADO DE SOLAPAMIENTO. DEFINICION Y PROPIEDADES

Sabemos que la teoría de conjuntos difusos [32] ha sido muy útil en la resolución de problemas descritos mediante modelos imprecisos y con gran cantidad de ruido. Por este motivo, esta teoría es una herramienta apropiada para estudiar el problema de la identificación de los objetos que constituyen una imagen (véase [5, 20, 28, 30]).

Para separar el objeto del fondo de una imagen, lo primero que debemos hacer es representar el objeto mediante un conjunto difuso y el fondo mediante otro. El éxito del método de separación radica en la elección correcta de dichos conjuntos difusos, que ni mucho menos tienen que ser disjuntos en el sentido de Ruspini [29] (véase [1, 2, 19]).

Para construir estos conjuntos es necesario conocer la *propiedad* exacta que caracteriza los píxeles que pertenecen al objeto (fondo). Esta propiedad determina la expresión de la función de pertenencia asociada al conjunto difuso que va a representar al objeto (fondo) (véase [10, 11, 17]). Normalmente, esta función no es conocida de manera exacta en todos y cada uno de los píxeles de la imagen. Hay píxeles para los cuales el experto está seguro de su pertenencia al fondo o al objeto y para otros duda y es precisamente en éstos, donde el valor de la función de pertenencia no es conocido con exactitud.

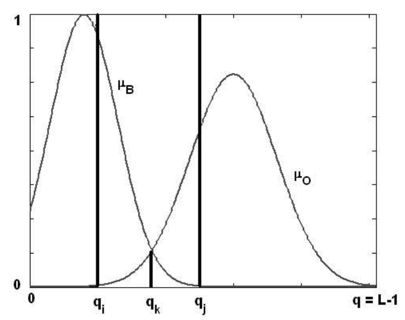

Figura 1: Solapamiento entre dos funciones

Dada una imagen, pedimos a un experto que asigne los siguientes valores a cada píxel de intensidad q:

$\mu_B(q)$: que representa el grado de pertenencia de dicho píxel al fondo.

$\mu_O(q)$: que representa el grado de pertenencia al objeto.

En la Fig.1 mostramos las dos funciones de pertenencia proporcionadas por el experto para representar una imagen dada en la escala de L niveles de gris. De la obsevación de dichas pertenecias deducimos que para intensidades menores que q_i el experto está seguro de que los píxeles pertenecen al fondo. Para intensidades mayores que q_j está seguro de su pertenencia al objeto. Sin embargo, para intensidades entre q_i y q_j el experto no tiene seguridad absoluta de su pertenencia a uno u otro, siendo la intensidad q_k la que presenta máximo desconocimiento.

De este análisis deducimos que el grado de solapamiento entre las dos funciones lo podemos interpretar como la representación del desconocimiento que tiene el experto en determinar si el píxel en cuestión pertenece al fondo o pertenece al objeto. Por este motivo, definimos el grado de solapamiento entre $\mu_B(q)$ y $\mu_O(q)$ mediante funciones:

$$G_S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

tales que deben cumplir las siguientes propiedades:

(G_S0) G_S depende únicamente de $\mu_B(q)$ y $\mu_O(q)$.

(G_S1) G_S es simétrica. El grado de solapamiento no depende del orden en que consideremos los grados de pertenencia.

(G_S2) El grado de solapamiento, entre los grados de pertenencia asociados a un píxel de intensidad q, es cero si y sólo si por lo menos uno de los grados de pertenencia vale cero. Es decir,

$G_S(\mu_B(q), \mu_O(q))) = 0$ si y sólo si
$\mu_B(q) = 0$ ó $\mu_O(q) = 0$, (i.e. $\min(\mu_B(q), \mu_O(q)) = 0$)

(G_S3) El grado de solapamiento, entre los grados de pertenencia asociados a un píxel de intensidad q, es uno si y sólo si ambos grados de pertenencia valen uno. Es decir,

$G_S(\mu_B(q), \mu_O(q))) = 1$ si y sólo si
$\mu_B(q) = 1$ y $\mu_O(q) = 1$, (i.e. $\mu_B(q) \cdot \mu_O(q) = 1$).

(G_S4) No decreciente; al aumentar los grados de pertenencia aumenta el grado de solapamiento.

(G_S5) Continuidad. El grado de solapamiento entre las dos pertenencias asociadas a un píxel de intensidad q no debe presentar una reacción caótica ante pequeños cambios del grado de pertenencia de dicho píxel al fondo o al objeto.

Definición 1. *Una función $G_S : [0,1]^2 \to [0,1]$ es un grado de solapamiento si satisface las propiedades: $(G_S0) - (G_S5)$.*

2 CONSTRUCCIÓN

Teorema 1. *$G_S : [0,1]^2 \to [0,1]$ es un grado de solapamiento si y sólo si*

$$G_S(x,y) = \frac{f(x,y)}{f(x,y) + h(x,y)}$$

para algún $f, h : [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que

1) *f y h son simétricas;*

2) *f es no decreciente y h es no creciente;*

3) *$f(x,y) = 0$ si y sólo si $x \cdot y = 0$;*

4) *$h(x,y) = 0$ si y sólo si $x \cdot y = 1$;*

5) *f y h son continuas;*

Ejemplo 1.

1) Si $f(x,y) = \min(x,y)$ y $h(x,y) = \max(1-x, 1-y)$, entonces $G_S(x,y) = \min(x,y)$ es un grado de solapamiento.

2) Si tomamos $f(x,y) = \sqrt{x.y}$ y $h(x,y) = \max(1-x, 1-y)$, entonces la construcción propuesta en el Teorema 1 es un grado de solapamiento.

3) Si $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$ y $h(x,y) = 1 - x \cdot y$, la siguiente expresión es un grado de solapamiento

$$G_S(x,y) = \frac{\sqrt{x \cdot y}}{\sqrt{x \cdot y} + 1 - x \cdot y}$$

Corolario 1. *Bajo las condiciones del Teorema 1 si suponemos que G_S puede ser escrito de dos formas diferentes:*

$$G_S(x,y) = \frac{f_1(x,y)}{f_1(x,y) + h_1(x,y)} = \frac{f_2(x,y)}{f_2(x,y) + h_2(x,y)}$$

para todo $x, y \in [0,1]$ entonces, si definimos

$$F(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$$
$$H(x,y) = h_1(x,y) - h_2(x,y)$$

se cumple:

$$G_S(x,y) = \frac{F(x,y)}{F(x,y) + H(x,y)}.$$

2.1 Caso específico: Uninormas

Sabemos que una uninorma es una función $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ que es conmutativa, asociativa, creciente y tiene como elemento neutro $e \in]0,1[$. Por tanto, toda uninorma satisface las propiedades (G_S1) y (G_S4). Sin embargo, en el siguiente teorema demostramos que no satisfacen, por lo general, todas las condiciones demandadas a los grados de solapamiento.

Teorema 2. *No existe ninguna uninorma que sea grado de solapamiento.*

Dem. Sabemos (véase [26]) que no existe ninguna uninorma que sea continua en todo el intervalo unidad, por tanto U nunca satisface la propiedad (G_S5).

2.2 Caso especifico: t-normas

En esta subseccion estudiamos las condiciones bajo las cuales las t-normas cumplen las condiciones demandadas a los grados de solapamiento.

Sabemos que una t-norma es una función $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ que es conmutativa, asociativa, creciente y $T(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$. Por tanto, las t-normas cumplen (G_S1) y (G_S4). También cumplen (G_S3), la demostración es la siguiente: $1 = T(x,y) \leq min(x,y)$, entonces $x = y = 1$. El recíproco es directo teniendo en cuenta que el elemento neutro de T es el uno.

Debemos hacer notar que cuando trabajamos con t-normas, la condición necesaria de la propiedad (G_S2) coincide con la definición de t-norma *positiva*, (véase página 4 en [4]).

Teorema 3. *Sea T una t-norma en $[0,1]$. T satisface (G_S2) si y sólo si T no tiene divisores de cero.*

A continuación vamos a estudiar las condiciones bajo las cuales las t-normas que satisfacen la propiedad arquimediana (es decir, $T(x,x) < x$ para todo $x \in (0,1)$) también satisfacen (G_S2).

Empezamos recordando el teorema de representación de t-normas continuas y arquimedianas dado por Ling, Schweizer y Sklar en [25, 31], (más referencias sobre este teorema pueden encontrarse en [16]).

Teorema 4. *Una t-norma T es continua y arquimediana si y sólo si existe una función $f : [0,1] \to [0,\infty]$ con $f(1) = 0$, continua y estrictamente decreciente tal que*

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x)+f(y)),$$

donde $f^{(-1)}$ es la pseudoinversa de f definida por

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) \text{ if } x \leq f(0) \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

La función f recibe el nombre de generador aditivo de T.

Lema 1. *Sea T una t-norma arquimediana que satisface (G_S5) y sea $f : [0,1] \to [0,\infty]$ un generador aditivo de T. Bajo estas condiciones: T satisface (G_S2) si y sólo si para todo $x, y \in]0,1]$, $f(x) + f(y) < f(0)$ se cumple.*

Dem. Basta tener en cuenta el Teorema 4.

Ejemplo 2. Sea $f(x) = -log(x)$, para todo $x, y \in]0,1]$ se cumple $f(x) + f(y) < f(0)$. Tomando este generador aditivo tenemos: $T(x,y) = xy$.

Teorema 5. *Sea T una t-norma que satisface (G_S5). T es estricta si y sólo si T satisface (G_S2) y es arquimediana.*

Teorema 6. *Si una t-norma T es un grado de solapamiento, entonces T es de uno de los tres tipos siguientes:*

1) $T = \min$;

2) T es estricta;

3) T es la suma ordinal de la familia $\{([a_m,b_m],T_m)\}$ tal que si $T(x,y) = 0$ y $(x,y) \in [0,b_m]^2$, entonces el intervalo $[0,b_m]$ tiene asociada una t-norm T_m continua arquimediana y estricta.

Dem. Sabemos que todo grado de solapamiento debe satisfacer (G_S5); es decir, debe ser continuo. Por hipótesis T es una t-norma que es grado de solapamiento, entonces es continua. Por la clasificación de t-normas continuas dadas en la página 11 de [16] (véase [27], [25] y [24]), sabemos que para una t-norma continua T tenemos tres posibilidades:

1.- $T = \min$;

2.- T es arquimediana;

3.- existe una familia $\{([a_m,b_m],T_m)\}$ tal que T es la suma ordinal de esta familia en el sentido presentado en [16].

Por hipótesis T es un grado de solapamiento, entonces satisface (G_S5) y (G_S2). Si además T es arquimediana, por el Teorema 5 tenemos que T es estricta.

Supongamos ahora que T es la suma ordinal de la familia $\{([a_m,b_m],T_m)\}$; es decir:

$$T(x,y) = \begin{cases} a_m + (b_m - a_m)T_m(\frac{x-a_m}{b_m-a_m}, \frac{y-a_m}{b_m-a_m}) \\ \qquad \text{if } (x,y) \in [a_m,b_m]^2 \\ \min(x,y) \text{ otherwise} \end{cases}$$

Sabemos que toda t-norm cumple la siguiente propiedad: si $x \cdot y = 0$, entonces $T(x,y) = 0$. Además por hipotesis la t-norm anterior tambien satisface el recíproco, por ser grado de solapamiento. Entonces si $T(x,y) = 0$ pueden ocurrir dos cosas:

a) (x,y) no pertenece a ningun $[a_m,b_m]^2$, en cuyo caso tenemos que $T(x,y) = min(x,y)$ para ese (x,y).

b) El punto (x,y) pertenece a $[a_m,b_m]^2$. Como $T(x,y) = 0 = a_m + (b_m - a_m)T_m(\frac{x-a_m}{b_m-a_m}, \frac{y-a_m}{b_m-a_m})$, entonces $a_m = 0$ y además $b_m \neq 0$ ya que en caso contrario el intervalo considerado sería $[0,0]$ y $x = y = 0$. Sabemos que T cumple (G_S2) y si $T(x,y) = 0$, entonces $T_m(\frac{x}{b_m}, \frac{y}{b_m}) = 0$, luego T_m tambien cumple (G_S2). Por tanto, tenemos que la t-norma continua y arquimediana T_m asociada al intervalo $[0,b_m]$ también cumple (G_S2), entonces por Teorema 5 es estricta.

Ejemplo 3. 1) En la construcción del siguiente grado de solapamiento utilizamos el item 3) del Teorema 6. En estas condiciones tomamos la t-norma producto, (la cual es stricta, continua y arquimediana), para el correspondiente intervalo $[0, b_m]$.

$$G_S(x,y) = \begin{cases} 2xy \text{ if } (x,y) \in [0,0.5]^2 \\ \min(x,y) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

2) En la construcción del siguiente grado de solapamiento tomamos las t-normas producto y la de Lukasiewicz (véase página 84 de [21]). Nótese que en este grado de solapamiento no consideramos ningun intervalo de la forma $[0, b_m]$.

$$G_S(x,y) = \begin{cases} 0.1 + 2.5(x-0.1)(y-0.1) \text{ if } (x,y) \in [0.1,0.5]^2 \\ 0.7 + \max(x+y-1.6,0) \text{ if } (x,y) \in [0.7,0.9]^2 \\ \min(x,y) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

3) La siguiente t-norma no satisface la propiedad (G_S2). Esto es debido a que en $[0, 0.25]^2$ tomamos la t-norma de Lukasiewicz la cual es continua y arquimediana pero no es stricta.

$$T(x,y) = \begin{cases} \max(x+y-0.25,0) \text{ if } (x,y) \in [0,0.25]^2 \\ \min(x,y) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

3 INDICE DE SOLAPAMIENTO. CONSTRUCCIÓN A PARTIR DE GRADOS DE SOLAPAMIENTO

En esta sección vamos a construir índices de solapamiento (overlap) agregando grados de solapamiento. Por esta razón, empezamos recordando los conceptos de overlap y de consistencia. A continuación justificamos los motivos por los cuales la mayor parte de los índices de overlap que existen en la literatura no satisfacen una de las cuatro condiciones exigidas por Dubois y Prade. Seguidamente mostramos las propiedades que debemos pedir a los operadores de agregación para que al aplicarlos a los grados de solapamiento, estudiados anteriormente, obtengamos índices de solapamiento. Terminamos mostrando la construcción de dichos índices y la forma de obtener las dos expresiones más utilizadas.

Denotamos con $F(U)$ al conjunto de todos los conjuntos difusos sobre el referencial finito no vacío U ($Cardinal(U) = n$). A los conjuntos difusos sobre U los vamos a representar de la siguiente forma:

$$A = \{(u, \mu_A(u)) | u \in X\}$$

En 1978 Zadeh [33] presentó la extensión natural a la teoría de conjuntos difusos del concepto clásico de índice de overlap (solapamiento) al que llamó *consistencia*:

$$O(A,B) = Sup_{i=1}^n(\min(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i))).$$

Obviamente, $O(A,B) = 0$ si A y B son completamente disjuntos y $O(A,B) = 1$ si existe un elemento $u_i \in U$ tal que $\mu_A(u_i) = \mu_B(u_i) = 1$.

En 1982 Dubois y Prade [15] presentaron la siguiente axiomatización para el índice de overlap:

Definición 2. *Un índice de overlap es una función $O(A,B)$ de $F(U) \times F(U)$ en el intervalo unidad tal que:*

($O1$) $O(A,B) = 0$ *si y sólo si A y B tienen soportes disjuntos;*

($O2$) $O(A,B) = 1$, *siempre que* ($\mu_A(u_i) = 0$ *ó* $\mu_B(u_i) = 1$) *ó* ($\mu_A(u_i) = 1$ *ó* $\mu_B(u_i) = 0$)*;*

($O3$) $O(A,B) = O(B,A)$*;*

($O4$) *Si $B \leq C$, entonces $O(A,B) \leq O(A,C)$.*

La condición ($O2$) de esta definición tiene la ventaja de que si A no es difuso, entonces $O(A,A) = 1$. Sin embargo, Dubois, Ostasiewicz y Prade en [14] establecen lo siguiente:

1. Para conjuntos difusos subnormales (es decir, $\mu_A(u_i) < 1$ y $\mu_B(u_i) < 1$ para todo $u_i \in U$), ($O2$) *debe ignorarse.*

2. El índice *ROC* (véase [15]) no cumple esta propiedad.

También es interesante hacer notar lo siguiente:

Si $A = \{(u_i, \mu_A(u_i) = 0) | u_i \in U\}$, entonces $\min(A,A) = \{(u_i, \mu_{\min(A,A)}(u_i) = 0) | u_i \in U\}$ y por ($O1$) resulta $O(A,A) = 0$. Si imponemos a la vez ($O2$), entonces $O(A,A) = 1$. Es decir, tenemos una contradicción.

Estas consideraciones hacen que a los índices de overlap normalmente se les exija sólamente las condiciones: ($O1$),($O3$) y($O4$) de la Definición 2.

En el siguiente teorema presentamos un método de construcción de índices de overlap. En este método vamos a agregar funciones de solapamiento. Para llevar a cabo estas construcciones a los operadores de agregación M les vamos a pedir las siguientes propiedades: (véase [9, 12, 23, 18]).

Un operador de agregación de dimensión n [9] es una función:

$$M : [0,1]^n \to [0,1]$$

que satisface las siguientes propiedades (ver también [12] y [13, 3]):

$A1$. $M(x_1, \cdots, x_n) = 0$ si y sólo si $x_i = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$.

$A2$. $M(x_1, \cdots, x_n) = 1$ si y sólo si $x_i = 1$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$.

$A3$. Para cualquier par de n-tuplas $(x_1, \cdots, x_n)$ y $(y_1, \cdots, y_n)$ tales que $x_i, y_i \in [0,1]$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, entonces

$$M(x_1, \cdots, x_n) \leq M(y_1, \cdots, y_n);$$

es decir, M es monótona creciente en todos sus argumentos.

Teorema 7. *Sea $M : [0,1]^n \to [0,1]$ un operador de agregación que satisface A1, A3 y es idempotente ($M(x, \cdots, x) = x$ para todo $x \in [0,1]$)*

Sea $G_S : [0,1]^2 \to [0,1]$ y sea la función:
$O : F(U) \times F(U) \to [0,1]$ *dada por*
$O(A,B) = M_{i=1}^n (G_S(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)))$

En estas condiciones los siguientes ítems se cumplen:

i) O satisface $(O1)$ si y sólo si G_S satisface (G_S2);

ii) O satisface $(O3)$ si y sólo si G_S satisface (G_S1);

iii) Si G_S satisface (G_S4), entonces O satisface $(O4)$.

Ejemplo 4.

1. $O(A,B) = \bigvee_{i=1}^n G_S(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i))$
2. $O(A,B) =$
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (G_S(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i))^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}, \beta \neq 0$$

Notas al ejemplo

1. Si en la expresión 1. tomamos $G_S(x,y) = \min(x,y)$, entonces tenemos el índice de consistencia dado por Zadeh (véase [33]).
2. Si existe un único u_i tal que $G_S(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)) = 1$, entonces por la expresion 1. tenemos $O(A,B) = 1$. El hecho de que un único elemento u_i haga que $O(A,B) = 1$ nos sugiere utilizar la expresion 2. en lugar de la 1).
3. La expresión 2. cumple la siguiente propiedad:

   $O(A,B) = 1$ if and only if $G_S(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)) = 1$

   En estas condiciones, si $G_S(x,y) = \min(x,y)$ ó $G_S(x,y) = x \cdot y$ ó $G_S(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$, entonces:

   $$O(A,B) = 1 \text{ si y sólo si}$$

   $$A = B = \{(u_i, \mu_A(u_i) = \mu_B(u_i) = 1) | u_i \in U\}$$

   por tanto la expresión 2., al igual que la mayor parte de expresiones dadas para el índice de overlap (véase [6, 7, 8, 14, 15]), no satisface la condicion $(O2)$ de la definición 2.

Corolario 2. *Bajo las condiciones del Teorema 7 si imponemos que la funcion $M : [0,1]^2 \to [0,1]$ satisfaga A2, entonces la siguiente propiedad se cumple: Si G_S satisface (G_S3), then*

$O(A,B) = 1$ si y sólo si $A = B = \{u_i, \mu_A(u_i) = 1) | u_i \in U\}$;

4 CONCLUSIONES

La relevancia de los problemas de solapamiento en el contexto de la clasificación difusa es evidente, tanto en cuanto no van a existir procedimientos sencillos, como existen en el caso no difuso, para reformular el problema sin solapamientos (véase por ejemplo [1, 2]). En este trabajo hemos propuesto una definición formal para las medidas de solapamiento, relacionándolas con algunas propuestas de índices con fines análogos. Además, hemos caracterizado su aspecto funcional bajo ciertas hipótesis.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos de referencia: TIN2006-06190, TIN2007-65981.

Referencias

[1] A. Amo, D. Gómez and J. Montero, Spectral fuzzy classification: a supervised approach, *Mathware and Soft Computing*, **10**, Pág. 141-154, 2003.

[2] A. Amo, J. Montero, G. Biging and V. Cutello, Fuzzy classification systems, *European Journal of Operational Research*, **156**, Pág. 459-507, 2004.

[3] A. Amo, J. Montero, D. Gómez and E. Molina, Representation of consistent recursive rules, *European Journal of Operational Researchg*, **130**, Pág. 29-53, 2001.

[4] M. Baczynski and B. Jayaram, (S,N) - and R-implications: A state-of-the-art survey, *Fuzzy Sets and Systems*, 159, **14**, Pág. 1836-1859, 2007.

[5] J.C. Bezdek, J. Keller, R. Krisnapuram and N. R. Pal, Fuzzy Models and algorithms for pattern recognition and image processing, in *The Handbooks of Fuzzy Sets Series*, Series Editors: D. Dubois and H. Prade, Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht, 1999.

[6] H. Bustince, M. Pagola, E. Barrenechea, Construction of fuzzy indices from fuzzy DI-subsethood measures: Application to the global comparison of images, *Information Sciences*, 177, **3**, Pág. 906-929, 2007.

[7] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, et al., Weak fuzzy S-subsethood measures. Overlap index, *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14 **5**, Pág. 537-560, 2006.

[8] H. Bustince, V. Mohedano, E. Barrenechea, et al. Definition and construction of fuzzy DI-subsethood measures, *Information Sciences*, 176, **21**, Pág. 3190-3231, 2006.

[9] H. Bustince H., J. Montero, E. Barrenechea and M. Pagola, Semiautoduality in a restricted family of aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 158, **12**, Pág. 1360-1377, 2007.

[10] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, Restricted equivalence functions, *Fuzzy Sets and Systems*, 157 **17**, Pág. 2333-2346, 2006.

[11] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, Image thresholding using restricted equivalence functions and maximizing the measures of similarity, *Fuzzy Sets and Systems*, 158, **5**, Pág. 496-516, 2007.

[12] T. Calvo, A. Kolesarova, M. Komornikova and R. Mesiar: Aggregation operators: properties, classes and construction methods. In T. Calvo, G. Mayor and R. Mesiar (Eds.): *Aggregation Operators New Trends and Applications* (Physica-Verlag, Heidelberg); Pág. 3-104, 2002.

[13] V. Cutello and J. Montero, Recursive connective rules, *International Journal of Intelligent Systems*, 14, Pág. 3-20, 1999.

[14] D. Dubois and J.L. Koning, Social choice axioms for fuzzy set aggregation. *Fuzzy Sets and Systems* 58, Pág. 339-342, 1991.

[15] D. Dubois, W. Ostasiewicz, H. Prade, Fuzzy Sets: History and Basic Notions, in: D. Dubois, H. Prade (Eds), *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Kluwer, Boston, MA, Pág. 21-124, 2000.

[16] J. Fodor and M. Roubens, Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, in: *Theory and Decision Library* (Kluwer Academic Publishers) 1994.

[17] M.G. Forero, Fuzzy thresholding and histogram analysis, in *Fuzzy Filters for Image Processing*, Edited by M. Nachtegael, D. Van der Weken, D. Van de Ville and E.E. Kerre, Springer, Pág. 129-152, 2003.

[18] D. Gómez and J. Montero: A discussion on aggregation operators. *Kybernetika* 40, Pág. 107-120, 2004.

[19] D. Gómez, J. Montero and H. Bustince, On the relevance of some families of fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 158, Pág. 2429-2442, 2007.

[20] L.K. Huang and M.J. Wang, Image thresholding by minimizing the measure of fuzziness, *Pattern recognition*, 28, **1**, Pág. 41-51, 1995.

[21] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular Norms, Trends in Logic. *Studia Logica Library*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[22] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, On the relationship of associative compensatory operators to triangular norms and conorms, *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems*, 4, Pág. 129-144, 1996.

[23] G.J. Klir and T.A. Folger: *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[24] G. M. Krause, *A strengthened form of Ling's theorem on associative functions*, PhD Thesis, Illinois Institute of Technology, Chicago, 1981.

[25] C.H. Ling, Representation of associative functions, *Publ. Math. Debrecen*, 12, Pág. 189-212, 1965.

[26] R. Mesiar, V. Novák, Open problems from the 2nd International conference of fuzzy sets theory and its applications, *Fuzzy Sets and Systems*, 81, Pág. 185-190, 1996.

[27] P.S. Mostert, A.L. Shields, On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary, *Ann. of Math.*, 65, Pág. 117-143, 1957.

[28] N. R. Pal and S. K. Pal, A review of image segmentation techniques, *Pattern recognition*, 26, Pág. 1277-1294, 1993.

[29] E.H. Ruspini, A new approach to clustering, *Information and Control*, 15, Pág. 22-32, 1969.

[30] B. Sankur and M. Sezgin, Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation, *J. Electron. Imaging*, 13, **1**, Pág. 146-165, 2004.

[31] B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1983.

[32] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information Control*, 8, Pág. 338-353, 1965.

[33] L. A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets Syst*, 1,Pág. 3–28, 1978.