

UN MODELO DE CLASIFICACION CON ESTRUCTURAS BINARIAS DE PREFERENCIA DIFUSA

Ana del Amo

Dpto. Estadística e I. Operativa
Facultad de CC. Matemáticas
Universidad Complutense
Madrid 28040
aamo@sunes1.mat.ucm.es

Javier Montero

Dpto. Estadística e I. Operativa
Facultad de CC. Matemáticas
Universidad Complutense
Madrid 28040
monty@sunes1.mat.ucm.es

Resumen

La mayoría de los modelos al uso para clasificación asumen, de manera directa o indirecta, la posibilidad de una representación de los objetos a clasificar dentro de un espacio con buenas propiedades, sobre el que es factible definir algún tipo de distancia. Esa representación subyacente, que con frecuencia es la base de los argumentos de carácter intuitivo que hace el decisor, es la mayor parte de las veces un producto elaborado a partir de la comparación sistemática entre las diferentes opciones que se le han presentado al decisor. En este trabajo se persigue modelizar un problema de clasificación cuando este análisis comparativo forma parte esencial de la información disponible, junto con una somera descripción de la *calidad* del conjunto de opciones presentado.

Palabras Clave: agregación, relaciones de preferencia, clasificación.

1 Introducción

El proceso de un problema estandar de clasificación supone unas *clases* previamente definidas, siendo el objetivo la asignación de una de estas clases a cada objeto que se nos pueda presentar,

dentro de una determinada familia de objetos. En general, estas *clases* no están perfectamente definidas. Quizá simplemente se dispone de una vaga descripción de unos *prototipos* básicos, de tal modo que cada objeto puede no estar al cien por cien en ninguna de esas clases, o estar en varias en intensidades variables. Incluso puede ocurrir que a lo largo del proceso se tenga evidencia de que la familia de clases inicialmente propuesta es insuficiente (algún aspecto de la realidad puede no estar siendo capturado).

La asignación de una clase a cada objeto pasa de hecho por un análisis global de todas las clases disponibles. Este análisis global se puede modelizar en un primer estadio considerando que el individuo lleva a cabo la comparación sistemática de todas las parejas de clases, definiendo por tanto una relación binaria de preferencia difusa, como la arriba descrita. Si esta relación determinase un orden completo nítido, la asignación de una clase podría resultar inmediata (asignar a cada objeto la clase que ocupa el máximo de dicha relación). Aún así, este método de asignación -análogo al de máxima verosimilitud en estadística- puede inducir a error, pues como ya se ha comentado, los objetos no necesariamente han de estar al cien por cien en una y sólo una de las clases consideradas.

La hipótesis de que el análisis global se lleva a cabo comparando sólo parejas es sin duda restrictiva, y puede ser causa de una complejidad de cálculo excesiva (de hecho, lo usual es restringir el análisis de las comparaciones sólo a una subfamilia relevante que contiene las clases más plausibles para cada objeto). Se trata sin embargo de una hipótesis estandar desde el punto de vista matemático. En la realidad, el método utilizado por el decisor para llevar a cabo un análisis

global del conjunto de alternativas o clases depende de su capacidad para comprender una mayor o menor complejidad. La información excesivamente compleja se descompone en unidades asequibles, para luego agregar de alguna manera a todos esos análisis parciales. En este proceso de agregación la condición de asociatividad suele jugar un papel clave, pero sin duda existen condiciones más débiles que garantizan también la operatividad del proceso de cálculo (cfr., por ejemplo [4,19] y también [5,17]). Es precisamente la visión global del problema la causa frecuente de la violación del principio de alternativas irrelevantes en la toma de decisiones. La introducción de una nueva clase puede provocar profundos cambios en la clasificación hasta ese momento llevada a cabo.

En una primera fase, basándonos en una distancia D definida en el espacio real de representación, calcularemos bien la distancia a unos prototipos definidos a partir de experimentaciones previas, bien los centroides para una clasificación inicial. A partir de los prototipos o de la clasificación inicial, se podrá proponer algún algoritmo -preferiblemente interactivo- para obtener una clasificación difusa del conjunto de objetos.

Por ejemplo, todos los colores que vemos en la vida real son combinaciones de tres colores básicos (rojo, azul y amarillo), que en la naturaleza aparecen muy rara vez en su versión pura. Todo color que se nos presente será una combinación de esos tres colores básicos, pero probablemente no sea ninguno de ellos. La asignación de la combinación más adecuada de colores pasa por un análisis comparativo entre los colores puros, para determinar en qué medida el objeto dado es más de un color que de otro. La situación se complicaría desde luego si nos hubiésemos olvidado de incluir un determinado color básico en el listado de colores disponibles para la clasificación. La adición posterior de ese nuevo color básico provocaría la revisión automática de todas las asignaciones anteriores.

Además, no es tan frecuente que *a priori* se disponga de una buena familia de *clases*, sino que esta familia de clases se encuentra normalmente a partir de una a veces larga experiencia. Con el tiempo esperamos, precisamente a partir de la experiencia, encontrar una descomposición *canónica* en términos de unas características *elementales*.

Al principio, casi cada objeto es una clase, y luego vamos descubriendo que necesitamos más clases, o que las ya definidas son de alguna manera *redundantes* -o presentan otras propiedades poco convenientes o simplemente no deseables- y deben ser por tanto revisadas. Considerar los colores *azul*, *amarillo* y *verde* como sistema de clasificación será simultáneamente insuficiente y redundante. Además, la eliminación eventual de la clase *verde* presentaría previsiblemente más ventajas que la eliminación de la clase *azul* (todo objeto *verde* es simultáneamente *algo amarillo* y *algo azul*).

La observación secuencial de los diferentes objetos obliga en general a modificar no sólo el número de clases disponibles -creando clases nuevas- sino que también las clases que fueron previamente introducidas son susceptibles de ser modificadas. Se trata de un proceso de mejora sucesiva en el que cada paso puede afectar al modelo particular de clasificación utilizado en el estadio anterior.

En este trabajo vamos a considerar uno de los eslabones de ese proceso de aprendizaje. La decisión sobre la clase se elaborará agregando la información contenida en las relaciones binarias asociadas a cada objeto (en qué medida está cada objeto más en una clase que en otra), pero no supondremos que la familia de clases está ya lograda sea cual sea el nuevo objeto que se presente en el futuro (hipótesis por otra parte normalmente inverificable). A estas relaciones binarias se les dotará de una estructura de preferencia [6,7]. No se pretende desarrollar un modelo de clasificación en base a otras relaciones binarias como las de similaridad (ver, por ejemplo, [18]).

Junto a la clasificación propuesta, debemos simultáneamente conocer de alguna manera hasta qué punto se ha logrado un buen sistema de clasificación. No basta con tener la mejor de las clasificaciones posibles para la familia de clases que hemos considerado, porque aún siendo la mejor de entre las posibles, dicha clasificación puede estar muy lejos de ser considerada *buen*a.

Por tanto, junto a la información de carácter binario (probablemente según más de un criterio), debe existir una información no binaria que ha de valorar el modelo concreto que hemos usado. La clasificación que se lleve a cabo intentará ser en algún sentido *la mejor* de entre las posi-

bles. No se debe de obviar el hecho de que por unos motivos u otros se haya introducido *a priori* alguna importante restricción en la familia de clasificaciones que serán consideradas.

Se plantea de este modo un problema de clasificación que tiene en cuenta dos tipos de información. De una parte, las relaciones binarias que establecen la comparación entre clase y clase, para cada objeto. Y de otra parte, una información no binaria que valora la calidad del modelo en cuanto tal. La clasificación se llevará a cabo teniendo en cuenta estas dos informaciones complementarias (muchos métodos de decisión, como los basados en la idea de *outranking* (ver, por ejemplo, la introducción a los métodos ELECTRE en Roy [14,15]) elaboran a partir de una única valoración numérica unidimensional sendas relaciones binarias con significados diferentes, información multidimensional que luego ha de ser coherentemente agregada). Esta información de carácter global, como ya se ha comentado, nos permitirá evitar versiones excesivamente fuertes de los axiomas de independencia de alternativas (clases) irrelevantes.

2 Estructuras de Preferencias

Sea C_1, C_2, \dots, C_p la familia C de clases inicialmente dada. Sea X_1, X_2, \dots, X_q la familia X de objetos bajo consideración. Cada objeto X_i lo supondremos representado mediante un vector $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \in \mathfrak{R}^n$, siendo X_{ic} el valor de la característica f_c para el objeto X_i . Estos valores podrán ser subproducto elaborado de una serie de valores directamente observados.

Nuestro objetivo es, dados el conjunto de objetos y la familia de *clases*, poder asignar a cada objeto una clasificación difusa en el conjunto de *clases*.

Para ello, a partir de la información agregada mediante un operador basado en los modelos OWA de Yager [20], se define para cada objeto X_i una relación de preferencia difusa [21]

$$\mu_{X_i} : C \times C \rightarrow [0, 1]$$

que asocie a cada par de clases (C_j, C_k) la intensidad de preferencia

$$\mu_{X_i}(C_j, C_k)$$

en la que el objeto X_i está mejor clasificado dentro de la clase C_j que en la clase C_k .

Estas preferencias entre clases puede ser entendida en sentido estricto (ver, por ejemplo, [12], aunque como bien se puntualiza en [7,11], debieran considerarse todos los posibles tipos de preferencia, no sólo la preferencia estricta, sino también la indiferencia, la preferencia débil y por supuesto la incomparabilidad. En este sentido, la aproximación propuesta en [6] nos da unas condiciones en las que todas estas relaciones de preferencia quedan determinadas -salvo isomorfismo en el intervalo unidad- por una cualquiera de ellas.

Nuestro modelo de clasificación difusa debe ser capaz de procesar la información contenida en todas esas relaciones binarias de preferencia difusa que conforman nuestra estructura de preferencias.

Nuestra clasificación difusa es entendida como un conjunto difuso

$$\mu : X \times C \rightarrow [0, 1]$$

que nos indique el grado $\mu(X_i, C_j)$ en el que cada objeto X_i está en una clase C_j .

A veces la familia de clases define una partición difusa (cfr. [1]) en el sentido de [16], de tal modo que sea cual sea el objeto dado se tiene

$$\sum_{C_j \in C} \mu(X_i, C_j) = 1$$

Pero es evidente que ésta no debe ser una hipótesis impuesta a priori sin más, sino más bien el resultado de un elaborado análisis de resultados y consideraciones previas.

Como se ha puesto ya de manifiesto en el ejemplo de los colores, ni en general suman la unidad, ni tienen que sumar al menos la unidad, ni han de sumar como mucho la unidad. Una clasificación en términos de una partición difusa es el producto de una experiencia previa que ha permitido, tras aproximaciones sucesivas, la definición de una familia de clases con buenas propiedades. Si las funciones de pertenencia no llegan a sumar la unidad, algún aspecto de nuestro objeto no queda suficientemente bien explicado, y quizá se requiera una clase adicional. Si las funciones de pertenencia suman más de la unidad, convendría en principio revisar la definición de cada una de las

clases, buscando posibles redundancias. La aparición de incomparabilidades a la hora de comparar dos clases podría deberse a un problema de heterogeneidad, lo cual nos podría sugerir la revisión de la familia de clases con la que estamos trabajando.

A partir de una estructura de preferencia, que ha sido definida para cada objeto, se ha de obtener el grado en que ese objeto está en cada clase. Este conjunto difuso se puede obtener mediante un proceso de agregación, justificable axiomáticamente. Sin embargo, ésta no debe ser la única información a tener en cuenta. La relación binaria de preferencia nos habla de la posición relativa entre las clases. Existe en la realidad una información adicional de carácter global, que tenida en cuenta, puede modificar sustancialmente las preferencias que de hecho serán utilizadas para la clasificación. Si la familia de clases es *mala*, esto crea tensiones en la clasificación final que, a modo de *desconfianza* en la misma, puede y debe quedar reflejada de alguna manera.

3 Relación de Outranking Difuso

La relación *estar más en una clase que en otra* es en muchos contextos claramente de naturaleza difusa. No sólo porque las preferencias suelen presentar grados de intensidad, sino porque a veces el concepto de clase no está bien definido. Las fronteras entre una clase y otra no son estrictas, como se puede ver por ejemplo, en la clasificación de cubiertas vegetales en Teledetección (cfr. [8], o el texto en castellano del Prof. Chuvieco [3]). Los problemas de clasificación son sin duda uno de los campos en los que la Teoría de Conjuntos Difusos ha encontrado una más rápida aceptación.

Sin embargo, no es menos cierto que una información parcial puede tener consecuencias directas en el proceso final de evaluación. Basta citar la relación de *outranking* [14,15] (ver también, por ejemplo, Perny-Roy [13] y Martel *et al.* [10]).

Se dice que C_j *outranks* (desplaza a) C_k si la preferencia de C_j sobre C_k ha sido establecida de una manera tan fuerte bajo una de las características f_c , que nunca se aceptará que la alternativa C_k sea desplazada por C_j en el proceso final de selección.

Se trata éste de un enfoque muy adecuado ante un problema de decisión entre varias alter-

nativas concretas, cuando estamos forzados a escoger necesariamente alguna de entre estas alternativas listadas.

Sin embargo, en los problemas de clasificación sobre los que estamos trabajando, éstas clases no están totalmente definidas en muchos casos, sino que se admite la posibilidad de definir nuevas clases. El hecho de tener información discordante es esencial para este objetivo. Parte de esta discordancia debe ser capturada en forma de incomparabilidad, pero también se ha de guardar en mente el hecho de que una clase se adapte mucho mejor bajo un criterio que otra clase, y que esta última clase en ningún caso deba convertirse en la clase finalmente escogida. Se trata pues de un enfoque dual al de *outranking* que tiende a eliminar clases. Al contrario de los modelos de *outranking*, este proceso puede perfectamente conducir a descubrir que ninguna de las clases tenidas en cuenta se adapta bien al objeto considerado. Pero consideramos este enfoque no sólo más acorde con la realidad, sino que además nos aporta información muy útil a la hora de definir las requeridas nuevas clases.

La crítica anterior es también aplicable a los modelos de Toma de Decisiones que hacen uso del concepto de *outranking* (de hecho, parte de los análisis gráficos desarrollados para los modelos PROMETHEE-GAIA [2,9] persiguen de algún modo una mejor visualización de las alternativas para mejor negociar y encontrar nuevas alternativas o soluciones de compromiso).

4 Objetivo de este Trabajo

En este trabajo se propone un algoritmo adaptado a problemas de clasificación en Teledetección, a partir de procedimientos ya existentes basados en el concepto de *outranking*, y que tiene en cuenta las consideraciones anteriores.

En particular, se presenta un primer algoritmo sobre el que se pueda construir un proceso más elaborado de análisis para clasificación que, de una parte, aproveche la potencialidad inherente de las estructuras de preferencia (incomparabilidad incluida), y de otra, sea suficientemente versátil ante las propias sugerencias del análisis realizado.

El procedimiento presentado es sólo una pieza dentro de un complejo proceso de clasificación, intuido éste no como una *caja negra*, sino como

un proceso sobre el que el propio decisor debe ir actuando, redefiniendo el problema a la luz de los resultados que se van obteniendo.

References

- [1] J.C. Bezdek and J.D. Harris, Fuzzy partitions and Relations: an axiomatic basis for clustering, *Fuzzy Sets and Systems* 1:111-127 (1978)
- [2] J.P. Brans, B. Mareschal and Ph. Vincke, How to select and how to rank projects: the PROMETHEE method for MCDM, *European Journal of Operational Research* 24:228-238 (1986)
- [3] E. Chuvieco, *Fundamentos de Teledetección Espacial* (Rialp, Madrid, 1990)
- [4] V. Cutello and J. Montero, Recursive families of OWA operators, *FUZZ-IEEE'94* (IEEE Press, Piscataway, NJ, 1994)
- [5] V. Cutello and J. Montero, Hierarchical aggregation of OWA operators, basic measures and related computational problems, *Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 3:17-26 (1995)
- [6] V. Cutello and J. Montero, A general model for deriving preference structures from data, *European Journal of Operational Research* (to appear)
- [7] J.C. Fodor and M. Roubens, Valued preference structures, *European Journal of Operational Research*, 79:277-286 (1994)
- [8] J.R. Jensen, *Introductory Digital Image Processing: a Remote Sensing Perspective*, (Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995)
- [9] B. Mareschal, Geometrical representations for MCDA: the GAIA procedure, *European Journal of Operational Research* 34:69-77 (1988)
- [10] J.M. Martel, G.R.D. D'Avignon and J. Couillard, Fuzzy outranking relation in multicriteria decision making, *European Journal of Operational Research*, 25:258-271 (1986)
- [11] S. Ovchinnikov, Structure of fuzzy binary relations. *Fuzzy Sets and Systems* 6:169-195 (1981)
- [12] S. Ovchinnikov and M. Roubens, On strict preference relations, *Fuzzy Sets and Systems* 43:319-326 (1991)
- [13] P.P. Perny and B. Roy, The use of fuzzy outranking relations in preference modelling, *Fuzzy Sets and Systems* 49:33-53 (1992)
- [14] B. Roy, Partial preference analysis and decision-aid: the fuzzy outranking relation concept, in: D. Bell, R. Keeney and H. Raiffa (eds.) *Conflicting Objectives in Decisions*, Wiley, New York (1977)
- [15] B. Roy, The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods, *Theory and Decisions* 31:49-73 (1991)
- [16] E.H. Ruspini, A new approach to clustering, *Information and Control* 15:22-32 (1969)
- [17] T.L. Saaty, Exploring the interface between hierarchies, multiple objectives and fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 1:57-68 (1978)
- [18] S. Tamura, S. Higuchi and K. Tanaka, , *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* 1:61-66 (1971)
- [19] R.R. Yager, Quasi-associative operations in the combination of evidence, *Tech. Rep. MII-505* (Iona College, New Rochelle, NY)
- [20] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18:183-190 (1988)
- [21] L.A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *Information Science* 3:177-200 (1971)