27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa
Lleida, 8–11 de abril de 2003

UNA NUEVA APROXIMACIÓN A LA TEORÍA DE LA DIMENSIÓN

Daniel Gómez [1], Javier Montero[2], Javier Yáñez [2], Jacinto González-Pachón[3]

[1]Departamento de Estadistica e Investigación Operativa III
Universidad Complutense de Madrid, España
E-mail: dagomez@estad.ucm.es
[2]Departamento de Estadística e Investigación Operativa I
Universidad Complutense de Madrid, España
[3] Departamento de Inteligencia Artificial
Universidad Politécnica de Madrid, España

RESUMEN

En la mayoría de los problemas de decisión se supone un conocimiento a priori acerca de los criterios que influyen en nuestras decisiones. Sin embargo, esta hipótesis parece no ser la más adecuada en muchas situaciones. El concepto de dimensión fue desarrollado por Dushnik y Miller, de tal modo que una relación de preferencias con estructura de orden parcial se representa como intersección de órdenes lineales. Los órdenes lineales son entendidos como criterios subyacentes del decisor. En esta comunicación se analizan los principales problemas asociados a este concepto. Para paliar algunos de estos problemas se da un nuevo concepto de dimensión así como diversas aproximaciones para su cálculo.

Palabras y frases clave: Teoría de la decisión, Decisión multicriterio, Representación de preferencias.
Clasificación AMS: 91B06.

1 Introducción

Los problemas de decisión están presentes en cualquier momento de nuestras vidas. La mayoría de las veces que nos enfrentamos a uno de estos problemas se utiliza la lógica, intuición, experiencia, etc ... para tratar de tomar una decisión acertada. Sin embargo, existen muchas situaciones en las que la incertidumbre, cantidad de información, disparidad de criterios o simplemente complejidad del problema hacen que la razón, la intuición o la experiencia den lugar a decisiones erróneas. Es en estos casos cuando se requiere de un buen análisis. Por este motivo surgen los *sistemas de ayuda a la decisión* que permiten analizar y comprender el problema que el decisor tiene entre manos. Una buena comprensión del problema incluye la identificación de los distintos criterios que influyen en la decisión; una valoración adecuada de éstas permitirá al decisor tomar mejores decisiones.

La mayoría de los problemas de decisión a los que nos enfrentamos son problemas multicriterio y, por tanto, la dificultad de la decisión estriba en la existencia de criterios que pueden ser contradictorios entre sí. En estos casos, el problema que se le plantea al decisor es el de decidir cuál de sus alternativas es la *más deseable*.

En función de las características del problema de decisión que se trata de resolver, existen diversos métodos y planteamientos de *ayuda a la decisión*. Algunas enfoques son:

- Programación multiobjetivo.

  La programación multiobjetivo u optimización vectorial es de gran utilidad cuando el marco decisional está definido por una serie de objetivos a optimizar que deben satisfacer una serie de restricciones. Las funciones objetivo serán modelizadas al igual que las restricciones mediante programación matemática.

- Programación de Compromiso. La idea básica de la programación por compromiso consiste en utilizar un punto ideal como punto de referencia para el decisor. Teniendo en cuenta que en el punto ideal se maximizan todos los objetivos del decisor, el decisor eligirá de entre todos los puntos eficientes aquél que se encuentre a distancia menor del punto ideal. De esta forma mediante la programación compromiso se reduce en cada paso el conjunto de alternativas *deseables* para el decisor.

- Programación por metas

  La programación por metas cambia la filosofía de *optimización* vista por los anteriores enfoques. En este nuevo enfoque la idea no es maximizar una función sino la de satisfacer una serie de restricciones (metas). Para ello bastará con determinar niveles mínimos de aceptación para algunos objetivos, que pasarán a ser parte de las restricciones del problema.

- Enfoques interactivos multicriterio.

  En estos enfoques se van mejorando soluciones parciales gracias a la interacción con el decisor hasta que se llega a una solución adecuada para todos.

Los enfoques señalados anteriormente (programación multiobjetivo, de compromiso, por metas e interactivo) tienen un denominador común: en todos ellos se tiene un conocimiento a priori de los criterios, factores y objetivos del problema de decisión. Sin embargo, existen otros problemas de decisión en los que los criterios o los objetivos no son conocidos incluso por el decisor. Veamos algunos ejemplos.

- Supongamos que se tiene que elegir entre varios cuadros cuál de ellos es más bello. El concepto de belleza es algo subjetivo a cada persona, por lo tanto, lo que para una persona puede ser bello, para otra podría no serlo. En este problema de decisión parece muy complicado establecer unos criterios a priori.

- En problemas de clasificación en teledetección, suele ser habitual tener que discriminar entre varias fotografías dependiendo de cuál de ellas refleja mejor el objeto que se está estudiando. En el problema de decisión asociado, los criterios están basados en la experiencia del fotointérprete.

Un enfoque adecuado a este tipo de problemas es el basado en el análisis de las preferencias del decisor.
Así pues, existen diversas situaciones en las que sería muy interesante determinar cuáles son los criterios, objetivos y factores que influyen en el problema de decisión. En esta línea aparece el concepto de dimensión en relaciones de preferencia. El concepto de dimensión en una relación de preferencias responde a la idea del número de criterios que explican las preferencias del decisior. Una vez que se tienen dichos criterios la comprehensión y resolución del problema se hace más asequible.

2 El concepto de dimensión

Desde un punto de vista normativo, una hipótesis clave en la modelización de preferencias es la de suponer que las preferencias definen un *orden lineal estricto* (asimétrico, transitivo y completo). En este sentido, las preferencias pueden ser modelizadas en la recta real. Los órdenes lineales estrictos son considerados en la mayoría de los campos como modelos ideales para los decisores, los cuales son capaces de expresar sus preferencias como un perfecto discriminador ante cada elección binaria. En este caso cualquier problema de ordenación de decisiones puede ser resuelto. Sin embargo, estos órdenes lineales estrictos no se suelen encontrar en el mundo real. La transitividad e incomparabilidad no puede ser siempre impuesta, ésta es la principal razón por la cual los modelos con alternativas necesitan un estudio con más detalle para conseguir una mejor representación de las preferencias individuales, incluyendo la modelización difusa (ver Fodor et al., 1984).
El concepto de dimensión ha sido muy estudiado en el contexto de las relaciones binarias nítidas. Una relación binaria puede verse como un subconjunto $R \subset X \times X$. También puede verse como una función

$$\mu^R : X \times X \to \{0, 1\}$$

donde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ representa el conjunto finito de alternativas y $\mu^R(x_i, x_j) = 1$ cuando el par $(x_i, x_j) \in R$, y $\mu^R(x_i, x_j) = 0$ en otro caso.

Cuando se tiene que $x_i R x_j$, queremos decir que la alternativa x_i es estrictamente preferida a la alternativa x_j (ya que el orden que se considera no es reflexivo), también se puede denotar por $x_i > x_j$.
Una relación de preferencias binaria (X, R) tiene asociado, de forma directa un digrafo $G_R = (X, R)$, donde el conjunto de vértices son las alternativas y los arcos son las relaciones. A lo largo de este trabajo cuando se trate con relaciones de preferencia binarias se hablará indistintamente del digrafo o de la relación.
La teoría de la dimensión fue inicialmente desarrollada por Dushnik et al. (1941), y solamente es aplicada a órdenes parciales.
Szpilrajn (1930) demostró que cualquier orden parcial puede ser representado como intersección de órdenes lineales. Este resultado fue esencial para la posterior definición de dimensión dada por Dushnik et al. (1941).

Definición .1. *Dado un orden parcial R, se define la dimensión de este orden al mínimo número de órdenes lineales (órdenes parciales completos) cuya intersección es R.*

Sea R un orden parcial o Poset (<u>P</u>artial <u>O</u>rder <u>Set</u>) con dimensión d. Cada elemento $x_i \in X$ puede ser representado en el espacio $(x_i^1, \dots, x_i^d) \in \Re^d$ de la siguiente forma:

$$x_i R x_j \quad \Longleftrightarrow \quad x_i^k > x_j^k \quad \forall k \in \{1, \dots d\} \quad \forall x_i, x_j \in X$$

(ver Trotter, 1992).
En este trabajo se denotará por $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ al orden lineal $x_i > x_j, \quad \forall i < j$.
La intersección de órdenes lineales en un poset, permite contemplar las *incomparabilidades* en la teoría de la decisión. La dimensión d de una relación nítida sugiere la existencia de d criterios subyacentes, y las coordenadas de cada elemento representan el valor de esa alternativa respecto a ese criterio.
Teniendo en cuenta esto, el decisor podrá entonces buscar criterios subyacentes.
El concepto de dimensión en relaciones de preferencia tiene asociado tres problemas internos:

(i) Un problema de *representación general*: Los órdenes parciales (las preferencias complejas) tienen que ser representadas en términos de preferencias simples (el operador intersección representa los órdenes parciales con los órdenes lineales).

(ii) Un problema de *Racionalidad*: En la teoría clásica, las preferencias deben ser representadas en términos de órdenes lineales, que son nuestro núcleo de racionalidad (lo que en la teoría clásica se entiende como *consistencia*). La elección de este átomo de racionalidad debe ser un problema a tener en cuenta.

(iii) Un problema de *eficiencia*: Basándonos en *el principio de parsimonia*, la representación anterior tiene que ser tan simple y compacta como sea posible, por este motivo se busca la representación minimal.

Desde el punto de vista algorítmico, la teoría de la dimensión presenta muchas dificultades. Yannakakis (1982) demuestra que el problema de determinar la dimensión d de un orden parcial es un problema $NP - duro$ si la dimensión es mayor o igual que 3. En esta línea el algoritmo exacto propuesto por Yáñez et al. (1998) permite el cálculo de la dimensión para problemas con dimensiones medias.

Ejemplo .1. *Sea* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *y sea* P *un poset en* X*:*

$$P = \{x_1 > x_2, x_3 > x_4\}$$

P *se puede escribir como intersección de los siguientes órdenes lineales:*
$L_1 = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ *y* $L_2 = [x_3, x_4, x_1, x_2]$*. Así tenemos que* $dim(P) = 2$*.*

3 Representación general de relaciones de preferencia binaria

Como ya se ha dicho anteriormente, la teoría de la dimensión clásica (nítida) propone la representación de órdenes parciales por medio de órdenes lineales. Entre todas las posibles inconsistencias, solamente la incomparabilidad es modelizada. Para una modelización más realista se debería intentar relajar tanto como sea posible las restricciones acerca de la relación.
En una relación binaria R se distinguen, a parte de la incomparabilidad, dos diferentes clases de inconsistencias no modelizadas por la definición clásica de dimensión:

(a) *Ciclos:* Un k-ciclo es una secuencia $\{x_1, \cdots, x_k\}$ de k alternativas que verifica que $x_i R x_{i+1}$ para todo $i = 1, \cdots, k-1$ y además $x_k R x_1$.

(b) *Intransitividad:* Esta clase de inconsistencias aparece cuando existen tres alternativas x_1, x_2, x_3 verificando :$x_1 R x_2$ y $x_2 R x_3$ pero no $x_1 R x_3$

Parece claro que un 1-ciclo puede ser eliminado si se impone a la relación que sea irreflexiva, $(x, x) \notin R$ para todo $x \in X$).
Para eliminar los 2-ciclos se deben chequear todo par de alternativas, para todos los pares que cumplan $(x_1, x_2) \in R$ entonces $(x_2, x_1) \notin R$, es decir, esta relación de preferencia es asimétrica.
Podría también pensarse que los 3-ciclos en una relación de preferencias no puede darse.
Pero para aquellos ciclos de longitud $k > 3$ se verifica que a mayor longitud del ciclo más difícil, y menos realista es eliminar estos ciclos de una relación de preferencias (El número de alternativas incrementa la posibilidad de que el decisor cometa este tipo de inconsistencias, ver Montero, 1987).
Parece claro que este tipo de inconsistencias (*ciclos, intransitividad*) no siempre pueden ser eliminadas en la práctica, teniendo en cuenta que el decisor no es capaz de

chequear sus preferencias para fijar nuestro modelo matemático. Por este motivo se hace necesario dar un nuevo concepto que permita modelizar este tipo de relaciones. Se consideran a continuación dos posibles situaciones para poder entender la aproximación que se hace en esta sección.

1. $X = \{x_1, x_2\}$ y R_1 de forma que $\mu^{R_1}(x_1, x_2) = \mu^{R_1}(x_2, x_1) = 0$
2. $X = \{x_1, x_2\}$ y R_2 de forma que $\mu^{R_2}(x_1, x_2) = \mu^{R_2}(x_2, x_1) = 1$

La primera relación R_1 que se tiene muestra dos alternativas *incomparables*, permitiendo una representación estándar con dimensión 2, se puede observar que R_1 es intersección de dos órdenes

$$\mathcal{C} = \{L_1, L_2\}$$

lineales estrictos $L_1 = [x_1, x_2]$ y $L_2 = [x_2, x_1]$. Así se tiene,

$$R_1 = L_1 \cap L_2$$

En la segunda relación R_2 se tiene un ciclo de dos alternativas, por lo que no se puede tener una representación como intersección de dos órdenes lineales. Sin embargo se tienen dos órdenes lineales L_1 y L_2 que podrían explicar la relación R_2, si se usa el operador unión:

$$R_2 = L_1 \cup L_2$$

En ambos ejemplos se puede observar que existen dos criterios. Se obtiene así que R_1 y R_2 son explicados por medio de los órdenes lineales L_1 y L_2 operados de distinta forma por medio de la unión y de la intersección.

El siguiente resultado demuestra que una relación de preferencia estricta puede ser representada en términos de uniones e intersecciones de órdenes lineales (ver González-Pachón et al. 1997, 1999 y Fodor et al. 1994): mientras la *incomparabilidad* es explicada mediante la intersección de operadores, la *inconsistencia* (es decir, ciclos y no transitividad) estará explicada con el operador unión.

Teorema .1. *Sea $X = \{x_1, ..., x_n\}$ conjunto finito de alternativas. Entonces, para cada relación binaria irreflexiva R en X existe una familia de órdenes lineales $\{L_{st}\}_{s,t} \subset \mathcal{C}$ de forma que*

$$R = \bigcup_s \bigcap_t L_{st}$$

Demostración .1. *Por una parte, si R es una relación binaria vacía (es decir $\mu^R(x_i, x_j) = 0 \;\; \forall (x_i, x_j)$), R puede ser representado como intersección de dos órdenes lineales*

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n] \cap [x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1]$$

En otro caso, sea R una relación binaria no vacía y sea (x_i, x_j) un par que verifica que $\mu^R(x_i, x_j) = 1$. Entonces definimos el orden parcial R^{ij} de la siguiente forma: $\mu^{R^{ij}}(x_i, x_j) = 1$ y $\mu^{R^{ij}}(x_k, x_l) = 0, \ \forall (x_k, x_l) \neq (x_i, x_j)$. Obviamente

$$R = \bigcup_{\{(i,j)/x_i R x_j\}} R^{ij}$$

donde R^{ij} es un orden parcial, por el resultado de Dushnik-Miller cada orden parcial puede ser representado mediante intersección de órdenes lineales, así tenemos que $R^{ij} = \bigcap_k L_k^{ij}$, entonces,

$$R = \bigcup_{ij} \bigcap_{k} L_k^{ij}$$

$\diamond$.

Después de demostrarse que toda relación puede ser representada, mediante uniones intersecciones de órdenes lineales, se podrá generalizar el concepto de dimensión, inicialmente definido únicamente para una relación transitiva e irreflexiva.

Definición .2. *Sea X un conjunto finito de alternativas. Se define la* dimensión generalizada *de una relación binaria nítida R como el mínimo número de diferentes órdenes lineales, L_{st} tal que*

$$R = \bigcup_{s} \bigcap_{t} L_{st}$$

Como se puede observar en la demostración del teorema .1 visto anteriormente, la representación minimal para el caso extremo de $R = \emptyset$ es obtenida por medio de intersección de dos órdenes lineales, de este modo $dim(R) = 2$. Para relaciones de preferencia más generales, sin embargo el procedimiento de la demostración del teorema .1 no necesariamente encuentra la mínima representación para R. En realidad este procedimiento nos dará una cota superior para el problema.
A partir de ahora se denota por:

- dim(P): Dimensión de un poset en el sentido clásico (Dushnik et al. 1941)
- Dim(R): Dimensión generalizada de una relación (González-Pachón et al. 2001)

Veamos a continuación el siguiente ejemplo:

Ejemplo .2. *Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea R una relación binaria en X:*

$$R = \{x_1 > x_2, x_3 > x_4\}$$

Por el teorema .1 se tiene la siguiente descomposición,

$$R = \{x_1 > x_2\} \cup \{x_3 > x_4\}$$

Ahora cada uno de estos posets puede escribirse como intersección de dos órdenes lineales de forma que se obtiene una cota para la dimensión de R, se sabe que con 3 *diferentes órdenes lineales podemos explicar la relación R :*

$$R = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \cap [x_4, x_3, x_1, x_2]\} \cup \{[x_3, x_4, x_2, x_1] \cap [x_1, x_2, x_3, x_4]\}$$

Sin embargo la relación R define un poset cuya dimensión es igual a 2 *:*

$$R = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \cap [x_3, x_4, x_1, x_2]\}$$

Existe otro caso extremo para el cual el procedimiento empleado en el teorema .1 es muy ilustrativo.

Ejemplo .3. *Supongamos que se tiene la siguiente relación* $\overline{R}$ *definida de la siguiente forma* $\mu^{\overline{R}}(x_i, x_j) = 1, \forall i \neq j$. *Entonces*

$$x_1 > x_2 = [x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n] \cap [x_n, x_{n-1}, \cdots, x_3, x_1, x_2]$$

y en general,

$$x_i > x_j = [x_i, x_j, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n] \cap [x_n, x_{n-1} \cdots, x_1, x_i, x_j] \qquad \forall i \neq j$$

Se puede concluir que R puede ser recubierto por medio de $n \cdot (n-1)$ *órdenes lineales. Si* $n = 3$ *esta representación implica el uso de todos los órdenes posibles en* X. *Sin embargo,* $Dim(\overline{R}) = 2$, *ya que* $\overline{R} = [x_1 \ldots x_n] \bigcup [x_n, \ldots, x_1]$.

Aunque cabría esperar que la idea de dimensión generalizada aquí propuesta coincida con la definición clásica en el contexto de órdenes parciales, esto no tiene por que resultar así. Además, la implementación práctica de la dimensión generalizada es susceptible de la misma crítica fundamental en el caso nítido: su complejidad algorítmica. Posibles cotas pueden obtenerse sin embargo adaptando los algoritmos desarrollados en González-Pachón et al. (1999) y Yáñez et al. (1999).
Es inmediato demostrar, por ejemplo, que

Teorema .2. *Sea P un orden parcial, enonces* $Dim(P) \leq dim(P)$

Demostración .2. *Es fácil ver que* $Dim(P) \leq dim(P)$ *si P es un poset, ya que la representación minimal para P en el sentido clásico también nos sirve para dar una cota de Dim(P).*

Sin embargo, es esencial observar que nuevo concepto de *dimensión generalizada* no es una extensión del concepto clásico de dimensión: dado un orden parcial, la representación generalizada minimal puede requerir menos órdenes lineales que los que requiere la representación clásica, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo .4. *Sea* $X = \{y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_n\}$ *familia finita de* $2n$ *alternativas,* $n \geq 6$*, y consideremos la relación* P_6 *definida como una* corona *sobre* X *(ver Trotter 1992, página 34):*
$\mu^{P_6}(y_i, z_j) = 1$ *si* $i \neq j$ *y* $\mu^{P_6}(x, x') = 0$ *en otro caso. Se puede ver, e.g., Trotter (1992)* $dim(P_6) = n$*. Pero* $Dim(P_6) < n$*.*
En efecto, tomemos k*,* $2 < k < n - 2$*, y consideremos dos subórdenes parciales* P *and* Q *de* P_6 *con*

- $\mu^P(y_i, z_j) = 1$ *si* $i \leq k < j$ *o* $j \leq k < i$ *(*$\mu^P(x, x') = 0$ *en otro caso), y*
- $\mu^Q(y_i, z_j) = 1$ *si* $i \neq j$ *y* $i, j \leq k$ *o* $i, j > k$ *(*$\mu^Q(x, x') = 0$ *en otro caso).*

Es fácil comprobar que $dim(P) = 2$*, mientras que* $dim(Q) = \max(k, n - k)$*. Como*

$$P_6 = P \cup Q$$

se ha logrado una representación generalizada con

$$\max(k, n - k) + 2 < n$$

órdenes lineales, y todavía algunos de estos órdenes pueden estar repetidos, o simplemente no tratarse de una representación minimal. En cualquier caso, $Dim(P_6) < dim(P_6)$*.*

Teorema .3. *Sea* $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ *una familia finita de alternativas,* $n \geq 4$*, y sea* P *poset definido en* X*. Entonces*

$$Dim(P) \leq dim(P) \leq n/2$$

Demostración: inmediata de las definiciones de dimensión clásica y generalizada; para la segunda desigualdad, ver Trotter (1992). $\diamond$
Además, como ya se ha visto, puesto que cada arco se puede representar como intersección de dos órdenes lineales, $Dim(R) \leq 2n(n - 1)$ sea cual sea la relación binaria nítida irreflexiva R siendo $n = |X|$.
Sin embargo, esta nueva definición del concepto de dimensión presenta algunos de los problemas que presentaba la definición clásica, la complejidad algorítmica es alta.

4 Complejidad del problema

Dada una relación de preferencias binaria e irreflexiva R, el problema de la dimensión generalizada es el de encontrar el mínimo número $Dim(R)$ de órdenes lineales L_{st} tal que

$$R = \bigcup_s \bigcap_t L_{st}$$

Denotamos por DGDP *decision generalized dimension problem* al problema de decisión asociado. Se demuestra que este problema de decisión pertenece a la clase NP, es decir, la cuestión *"Es Dim(R) $\leq$ k"* puede ser verificada en tiempo polinomial para cualquier solución.

Proposición .1. $DGDP \in NP$

Teorema .4. $DGDP \in NP - completo$.

Demostración. Yannakakis (1982) demuestra que el problema de decisión $dim(P) \leq k$ es $NP - completo$ para cualquier k fijo, siendo $k \geq 3$. De hecho, el problema de decisión asociado a la dimensión clásica para un orden parcial P, siendo $dim(P) \geq 3$, es $NP - completo$.
Se va a demostrar que para cualquier poset de dimensión 3 se tiene que $Dim(P) = dim(P)$. Así se concluirá que $DGDP$ es un problema $NP - completo$.
Sea P poset tal que $dim(P) = 3$. Se verifica entonces que $Dim(P) \leq dim(P)$. Si suponemos que $Dim(P) < 3$, se llegará a una contradicción: no puede ser $Dim(P) = 1$, a no ser que P sea orden lineal, y entonces se tendría que $dim(P) = 1$.
Por tanto $Dim(P) = 2$. Sea k el número de uniones asociado a $Dim(P)$, hay dos casos:

- **1 Caso** $k = 1$ entonces $dim(P) = 2$ (contradicción, ya que $dim(P) = 3$).
- **2 Caso** $k = 2$

  Para este caso, salvo simetría sólo tenemos dos posibles representaciones:

  - $P = L'_1 \cup L'_2$, P sería unión de dos órdenes lineales distintos, por tanto P no sería un poset.
  - $P = L'_1 \cup (L'_2 \cap L'_1)$. Es este caso $P = L_1$ y entonces $dim(P) = 1$

Así pues, para posets de dimensión 3 el problema de dimensión clásico coincide con el nuevo problema. □

5 Aproximación a la dimensión generalizada

Como ya se ha dicho anteriormente el problema del cálculo de la dimensión generalizada es un problema NP-Completo. Uno de los principales problemas que surgen para representar una relación de preferencias por medio de uniones de intersecciones es el descomponer la relación en órdenes parciales. En esta sección se propone que esta descomposición se haga de forma que se minimize el número de uniones. Esta metodología da lugar a la siguiente definición:

Definición .3. *Dada una relación binaria arbitraria R definimos el grado de heterogeneidad (h) de dicha relación al mínimo número de órdenes parciales de forma que:*

$$R = \bigcup_{i=1}^{i=h} P_i$$

El máximo valor para h es el cardinal de R ya que:

$$R = \bigcup_{(x_i,x_j)\in R} P_{i,j}$$

donde $P_{i,j}$ es la relación trivial que únicamente contiene al par (x_i, x_j).

Por otra parte en el caso en que la relación R sea un poset el grado de heterogeneidad de la relación será 1. En el caso general será necesario representar la relación R por medio de más de un poset.

El siguiente ejemplo muestra como calcular este nivel de heterogeneidad.

Ejemplo .5. *Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea R una relación binaria nítida definida por la siguiente matriz*

$$\mu^R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se denota, $\mu^R_{ij} = \mu^R(x_i, x_j)$.
Esta relación no es transitiva y consecuentemente, no es un orden parcial. Además existe un ciclo $1 > 2$, $2 > 3$ y $3 > 1$. Por este motivo al menos tres relaciones parciales se requieren para la descomposición. El nivel de heterogeneidad en este caso es $h = 3$, y una representación de R puede ser la siguiente:

$$R = R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3$$

donde

$$\mu^{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu^{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu^{R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Conclusiones

Los *sistemas de ayuda a la decisión* permiten analizar y comprender el problema que el decisor tiene entre manos. Una buena comprensión del problema permitirá al decisor tomar mejores decisiones.
Uno de los sistemas de ayuda a la toma de decisiones más utilizados es el análisis de las preferencias del decisor. La modelización de las preferencias por medio de funciones de utilidad, teoría de grafos etc, así como el análisis de los criterios permiten en muchas ocasiones una compresión del problema.
Una de las principales críticas que se le hacen a las relaciones de preferencias, sobre todo en el caso difuso, es que son muy difíciles de interpretar para el decisor, y en la mayoría de los casos no se ayuda al decisor a resolver los problemas de decisión. Por este motivo en este trabajo se ha tratado de abordar el problema de la representación de preferencias para poder mejorar las técnicas que permiten al decisor entender sus preferencias y a la vez el problema con el que se enfrenta. En esta línea aparece el concepto de dimensión en relaciones de preferencia, como una buena representación de relaciones de preferencia binaria. En este trabajo se propone un nuevo concepto de dimensión que permite la representación de cualquier relación de preferencia modelizando no solo la incomparabilidad sino también las intransitividades y los ciclos.

Agradecimientos

Esta trabajo ha sido desarrollado dentro del proyecto BFM2002-00281 del Plan de Promoción del Conocimiento del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Referencias

Dushnik B. y Miller E. W. (1941): Partially ordered sets. *American Journal of Mathematics.* 63, 600–610.
Fodor J. C. y Roubens M. (1994): Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support. Kluwer, Dordrecht.
González-Pachón J. y Ríos-Insua S. (1997): A method for searching rationality in pairwise choices. En: Fandel, G. and Gal, T. (Eds.), Multiple Criteria Decision Making, LNEMS 448, Springer, 374-382.
González-Pachón J. y Ríos-Insua S. (1999): Mixture of maximal quasi orders: a new approach to preference modelling. *Theory and Decisions.* 47, 73–88.
González-Pachón J., Gómez D., Montero J. y Yáñez J. (2001): Searching for the dimension of binary valued preference relations. *International Jounrnal of Aproximate Reasoning.* En prensa.
González-Pachón J., Gómez D., Montero J. y Yáñez J. (2002): Soft dimension theory. *Fuzzy Sets and Systems.* En prensa.

Gómez D. (2003): Algunas aportaciones sobre repsentación de preferencias. Ph.D. Thesis, Universidad Complutense de Madrid.
Montero J.: Arrow‘s theorem under fuzzy rationality. *Behavioral Science.* 32,267-273.
Montero J., Yáñez J., Gómez D. y González-Pachón J. (2001): Consistency in dimension theory. Proceedings of the Workshop on Preference Modelling and Applications. 93-98.
Montero J., Yáñez J., Gómez D., González-Pachón J. y Cutello V. (2001): Underlying criteria in valued preference criteria Referencia: Computational Intelligence Systems for Applied Research. D. Ruan, P. D'hont, E. Kerre, eds.(World Scientific, Singapore), 89-96.
Szpilrajn E. (1930): Sur l'extension de l'ordre partiel. *Fundamenta Mathematicae.* 16, 386–389.
Trotter W. T. (1992): Combinatorics and Partially Ordered Sets; Dimension Theory. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.
Yannakakis M. (1982): On the complexity of the partial order dimension problem. *SIAM Journal of Algebra and Discrete Mathematics.* 3, 351–358.
J. Yáñez y J. Montero (1999): A poset dimension algorithm. *Journal of Algorithms.* 30, 185–208.