# UNA TIPOLOGÍA CONJUNTA DE LA BIPOLARIDAD Y LA INCERTIDUMBRE BORROSA

**J. Tinguaro Rodríguez[1], Camilo A. Franco[1], Javier Montero[1]**

[1] *Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid*

*jtrodrig@mat.ucm.es*

## Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar una metodología que permita clarificar las relaciones existentes entre las nociones de incertidumbre borrosa (*fuzziness*) y bipolaridad. Esta metodología está basada en el uso de extensiones continuas 4-valoradas sobre pares de evidencia positiva y negativa (o bipolares). Estas extensiones permiten definir rigurosamente la semántica, en términos cognitivos o epistémicos, de algunos formalismos habituales, diferentes a la luz de este método y que, sin embargo, suelen considerarse equivalentes .

**Palabras Clave**: Bipolaridad, incertidumbre borrosa o lingüística, intuicionismo

## 1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la inteligencia artificial durante la segunda mitad del siglo pasado ha conllevado un notable esfuerzo científico y tecnológico orientado a replicar y plasmar en procesos automáticos (i.e., informáticos) algunas de las capacidades y habilidades características de la mente humana.

En tanto que la habilidad para el manejo de lenguajes complejos es quizás la faceta esencial de la naturaleza humana, el tratamiento del lenguaje natural ha sido (y es) uno de los retos fundamentales a enfrentar dentro de este contexto.

La aparición de las nociones de conjunto y lógica *borrosos* (*fuzzy set* y *fuzzy logic*, [19]) es sin duda uno de los hitos claves en relación con el tratamiento informático del lenguaje natural, en tanto que permiten una modelización matemática rigurosa de la imprecisión y ambigüedad inherentes al lenguaje humano. Recordemos que muchos conceptos (i.e. palabras o predicados) $P$, como *bueno* o *joven*, no tienen una definición totalmente precisa, de manera que es habitual la aparición de incertidumbre y/o dudas en relación a si determinados objetos $x$ del universo de discurso $X$ considerado (e.g. *alternativas* de un problema de decisión o *edades* de posibles clientes) verifican o no esos predicados. En este marco, por medio de la asignación de grados continuos de pertenencia o verificación $\mu_P(x) \in [0,1]$, la lógica borrosa permite flexibilizar y salvar las dificultades de la lógica clásica binaria para afirmar la ocurrencia de $P(x)$ o $\neg P(x)$.

Paralelamente, la psicología cognitiva ha ido señalando [4,12] que el razonamiento humano tiende a analizar y organizar la realidad (e.g. una decisión a tomar) en términos de las relaciones positivas (de distensión, placer, beneficio, etc.) y/o negativas (de tensión, dolor, pérdida, etc.) que, a través de los aprendizajes pertinentes, guardan los objetos y la información disponible con respecto a la emotividad o racionalidad del individuo (e.g., una alternativa puede ser *buena* respecto a ciertos criterios y *mala* respecto de otros). De este modo, la realidad mental es construida en base al carácter y la relevancia afectivos de los objetos en consideración, o en otras palabras, en términos de pares de *polos de referencia P/Q*, como *bueno/malo* o *verdadero/falso*, que organizan y dan relevancia a la información disponible. Así pues, lo relevante no es saber si un objeto $x$ es *bueno* ( $P(x)$ ) o *no-bueno* ($\neg P(x)$), sino si es *bueno* ( $P(x)$ ) o *malo* ( $Q(x)$ ). Esta coexistencia de pares de polos opuestos de referencia semántica suele ser referida en la literatura cognitiva como *bipolaridad*, aunque es preciso señalar que algunos autores [1] han usado también el término *intuicionismo* en relación a estas ideas.

Además, diferentes *tipos* de incertidumbre lingüística o borrosa (*fuzziness*) [20] y de bipolaridad [8] han sido definidos y estudiados con el objetivo de generalizar y ampliar el marco de aplicación de estas nociones seminales.

Así, mientras que el tratamiento habitual (o de tipo 1, F1) de la incertidumbre borrosa permite evaluar la imprecisión lingüística de una manera precisa (asignando valores de verdad graduables pero precisos $\mu_P(x) \in [0,1]$ a la proposición $P(x)$ ), la incertidumbre borrosa de tipo 2 (F2) hace referencia a la posibilidad de medir esa imprecisión de forma *imprecisa* (asignando conjuntos borrosos de tipo 1 como grados de verdad de $P(x)$ ).

De manera similar, en tanto que la bipolaridad de tipo 1 (B1) asume que la información negativa viene dada por la negación o complementación de la positiva, la bipolaridad de tipo 2 (B2) permite que la relación entre los polos no sea tan simple (e.g. $malo \neq no\text{-}bueno$), lo que suele conllevar la necesidad de evaluar el par $(\mu_P(x), \mu_Q(x))$ para capturar toda la información relevante.

Nótese que, en tanto que tratan diferentes tipos de incertidumbre, las nociones de incertidumbre borrosa y bipolaridad parecen a primera vista independientes y complementarias, de modo que, en principio, un formalismo B2 puede ser asociado a una incertidumbre borrosa de tipo F1 o F2 (o incluso ser nítido), e igualmente un marco F2 puede estar asociado a un formalismo B1 o B2.

Sin embargo, el descubrimiento de la equivalencia formal [5,6] entre los conjuntos borrosos *intuicionistas* de Atanassov (AFS [1]), originalmente ideados como objetos de tipo F1 y B2 y los conjuntos borrosos intervalo-valorados (IVFS [11]), en principio concebidos como objetos F2 y B1, ha conducido a identificar esos marcos en cierta medida, lo cual ha acaecido no sin algunas disputas y enfrentamientos [3,7] entre algunos autores y escuelas.

El objetivo de este trabajo es arrojar algo de luz sobre las relaciones entre bipolaridad e incertidumbre borrosa desde una perspectiva diferente. Con este fin, se utilizará la noción de extensión 4-valorada (que recuerda claramente a la de estructura de preferencia [9, 10]) para definir y comparar rigurosamente la semántica y la estructura lógica subyacente de las posibles combinaciones de tipos de bipolaridad e incertidumbre borrosa. Esto permitirá separar y distinguir los AFS de los IVFS de una manera práctica, mostrando a su vez la independencia de esas nociones.

## 2 TIPOS DE INCERTIDUMBRE BORROSA

La teoría de conjuntos borrosos [19] permite que los objetos de un universo de discurso $X$ verifiquen de forma parcial un predicado impreciso $P$. Para ello, la función característica del conjunto $P = \{x \in X \mid P(x)\}$ es generalizada mediante una *función de pertenencia* $\mu_P : X \to [0,1]$, de modo que $\mu_P(x) \in [0,1]$ indica el grado en que el objeto $x \in X$ verifica el predicado $P$. Así, la semántica (o el uso) de $P$ sobre $X$ es modelada a través de un conjunto borroso de tipo 1 (T1FS) $P = \{(x, \mu_P(x)) \mid x \in X\}$.

En respuesta a algunas críticas que señalaban la posible complejidad de asignar grados de pertenencia totalmente precisos, L.A. Zadeh introdujo en [20] la noción de incertidumbre borrosa de tipo $n$, permitiendo evaluar la veracidad de la proposición $P(x)$ por medio de un conjunto borroso de tipo $n$-1. Particularmente, si $F([0,1])$ denota el conjunto de todos los conjuntos borrosos de tipo 1 sobre $[0,1]$, un conjunto borroso $P$ de tipo 2 (T2FS) se asocia a una función de pertenencia $\psi_P : X \to F([0,1])$, de manera que $\psi_P(x) : [0,1] \to [0,1]$ expresa la *plausibilidad* de la proposición "$x$ verifica $P$ con grado de verdad $\mu$" para cada grado de verdad $\mu \in [0,1]$. Así se introduce la imprecisión en la evaluación de los grados de verdad de tipo 1 $\mu_P(x)$ y, en general, los tipos de incertidumbre borrosa más elevados (i.e. tal que $n$>1) permiten introducir una mayor imprecisión en la evaluación de los grados de verdad.

Los conjuntos borrosos intervalo-valorados (IVFS, [11]) son quizás la clase más simple y común de conjuntos borrosos de tipo 2, en tanto que asignan a cada objeto $x$ y predicado $P$ un intervalo $[\mu_L(x), \mu_U(x)]_P$ como valores (igualmente y totalmente) plausibles del grado de verdad $\mu_P(x)$. Por tanto, el espacio de valuación de los IVFS viene dado por el conjunto $L^I = \{[a,b] \subseteq [0,1] \mid a \leq b\} \subset F([0,1])$. Además, a mayor amplitud del intervalo $[\mu_L(x), \mu_U(x)]$, mayor es la incertidumbre asociada a él, de modo que su longitud $u(x) = \mu_U(x) - \mu_L(x)$ suele verse como el grado de *ignorancia* asociada a esa evaluación. Así, $u(x) = 0$ es cierto si, y solo si (sii), no hay incertidumbre sobre el grado $\mu_P(x)$ en que $x$ verifica $P$, esto es, sii $\mu_L(x) = \mu_P(x) = \mu_U(x)$.

Los operadores lógicos clásicos, como la negación, la disyunción o la conjunción pueden ser generalizados al caso difuso mediante diversos operadores borrosos. Así, la negación habitual para conjuntos borrosos de tipo 1 está dada por $n(\mu) = 1 - \mu$, de modo que $\mu_{\neg P}(x) = n(\mu_P(x))$, con $\neg P$ =*no-P*. La negación habitual sobre los IVFS vienen dada por

$$n_{L^I}([\mu_L(x), \mu_U(x)]_P) = [1 - \mu_U(x), 1 - \mu_L(x)]_{\neg P}.$$

Similarmente, t-normas y t-conormas [17] suelen tomarse como operadores para la conjunción y la disyunción, respectivamente. Ambos tipos de conectores están relacionados a través de la negación, de manera que si $T$ es una t-norma, entonces $S(\mu_P, \mu_Q) = n[T(n(\mu_P), n(\mu_Q))]$ es una t-conorma. Para T1FS, ejemplos habituales de operadores así relacionados son la t-norma y conorma de Lukasiewicz, respectivamente dados, para $a,b \in [0,1]$, por $a \odot b = \max\{a+b-1, 0\}$ y $a \oplus b = \min\{a+b, 1\}$, o también la t-norma $a \wedge b = \min\{a,b\}$ y su respectiva t-conorma $a \vee b = \max\{a,b\}$. Para IVFS, estos operadores son extendidos de la siguiente forma:

$$[a,b] \odot_I [c,d] = [a \odot c, b \odot d], [a,b] \oplus_I [c,d] = [a \oplus c, b \oplus d],$$

$[a,b] \wedge_I [c,d] = [a \wedge c, b \wedge d]$, $[a,b] \vee_I [c,d] = [a \vee c, b \vee d]$.

Por otro lado, nótese que la lógica borrosa parece infravalorar la noción de información negativa, en tanto que asume que la falsedad de $P(x)$ ha de ser igual a la verdad de $\neg P(x)$, i.e., $\mu_{\neg P}(x)$, aunque este grado de falsedad puede ser de naturaleza diferente a la información negativa. En cualquier caso, es claro que la lógica borrosa no considera una evaluación independiente junto a los grados (precisos o no) $\mu_P(x)$ o $\psi_P(x)$.

## 3 TIPOS DE BIPOLARIDAD

Básicamente, los modelos de representación bipolares asumen la existencia de un par de polos de referencia semántica $P/Q$, tales como *verdadero/falso* o *bueno/malo*, los cuales proporcionan marcadores absolutos que confieren a la información su carácter intrínsicamente positivo o negativo. La información sin carácter positivo ni negativo es entonces considerada irrelevante o *neutral* en términos de esas referencias, del mismo modo que la información con carácter simultáneamente positivo y negativo es considerada como *conflictiva* o contradictoria. Así, los polos $P/Q$ organizan y dan relevancia a la información disponible, de manera que la información positiva para uno de ellos es considerada como negativa para el otro.

Si la relación entre los polos está dada por la negación, i.e. si $Q = no\text{-}P = \neg P$ (e.g. *malo=no-bueno*), entonces una única evaluación $\mu_P(x) \in [0,1]$ (o $\mu_P(x) \in L^I$) es suficiente para capturar toda la información relevante en términos de la polaridad $P/Q$, ya que entonces $\mu_Q(x) = \mu_{\neg P}(x) = 1 - \mu_P(x)$ y por lo tanto la información negativa es solo la negación de la positiva. El término bipolaridad de tipo 1 (B1, [8]) es habitualmente usado para referirse a esta situación, y nótese que los conjuntos borrosos (tanto F1 como F2) y la lógica clásica pertenecen a esta categoría.

Sin embargo, si la relación entre $P$ y $Q$ es más compleja (e.g. $malo \neq no\text{-}bueno$), entonces es normalmente necesario evaluar también $\mu_Q(x)$ para capturar toda la información relevante sobre $P(x)$. En particular, es posible usar dos escalas $L_P^+$ y $L_P^-$ para evaluar, respectivamente, $\mu_P(x)$ y $\mu_Q(x)$, de manera que el par $(\mu^+(x), \mu^-(x))_P = (\mu_P(x), \mu_Q(x)) \in L_P^+ \times L_P^-$ mide de manera conjunta el grado de información positiva y negativa sobre $P(x)$. Por otro lado, si se asume que la relación entre los polos es simétrica (aunque es posible eliminar esta asunción, ver [16]), entonces

$$(\mu^+(x), \mu^-(x))_Q = (\mu_Q(x), \mu_P(x)) \in L_Q^+ \times L_Q^- = L_P^- \times L_P^+ .$$

Estos pares de evidencia son típicos de la bipolaridad de tipo 2 (B2, [8]), y nótese que, en tanto que $P$ y $Q$ no son necesariamente disjuntos, los modelos B2 admiten en principio 4 casos posibles respecto de la relación entre un objeto $x$ y una polaridad $P/Q$:

- *Veracidad positiva t*: $x$ verifica $P$ pero no $Q$, i.e., la información es positiva y no negativa. El par $(\mu^+, \mu^-) = (1,0)$ es el representante extremo (o nítido) de esta situación.
- *Veracidad negativa* (o *falsedad positiva) f*: $x$ cumple $Q$ pero no verifica $P$, luego la información es negativa y no positiva. El par extremo es $(\mu^+, \mu^-) = (0,1)$.
- *Irrelevancia o neutralidad i:* $x$ no verifica $P$ ni $Q$, por lo que la información es no positiva y no negativa y en el caso extremo se tiene $(\mu^+, \mu^-) = (0,0)$;
- *Conflicto k:* $x$ verifica $P$ y $Q$ simultáneamente, luego la información es positiva y negativa, como en el caso extremo $(\mu^+, \mu^-) = (1,1)$.

Es importante señalar que los casos tercero y cuarto no son posibles en un marco B1, en el que $P$ y $Q$ están estrechamente ligados a través de la negación. Si en un marco B2 la relación entre los polos es restringida, el tercer o cuarto caso pueden dejar de ser posibles, pero no simultáneamente, ya que entonces ese marco sería B1.

Es interesante examinar con más detalle el caso de los AFS [1]: estos asignan a $P(x)$ un grado de pertenencia $\mu_P(x)$ así como un grado de *no-pertenencia* $\mu_{\neg P}(x)$, cumpliendo que $\mu_P(x), \mu_{\neg P}(x) \in [0,1]$ y $\mu_P(x) + \mu_{\neg P}(x) \leq 1$. Por tanto, el espacio de valuación de los AFS es el conjunto $L^\circ = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x + y \leq 1\} \subset [0,1]^2$, y nótese que la misma escala $L^+ = L^- = [0,1]$ es usada para ambas evaluaciones.

Aunque la presencia de dos evaluaciones hace pensar que los AFS pertenecen a un marco B2, lo cierto es que, implícitamente, Atanassov trata un marco B1 (en el que la polaridad relevante es $P/\neg P$) como un marco B2, asumiendo que la verdad de $\neg P(x)$ no puede ser directamente obtenida a partir de la de $P(x)$, por tanto requiriendo una evaluación independiente $\mu_{\neg P}(x) = \nu_P(x)$. En tanto que $\mu_P(x) + \nu_P(x) \leq 1$, se obtiene que la disyunción de $P$ y su negación (en términos de la t-conorma de Lukasiewicz $\oplus$) puede no ser una tautología, violando por ello la ley del tercio excluso ($P \vee \neg P$), en consonancia con la intención de Atanassov de formular un modelo *intuicionista* [1].

Sin embargo, otras estructuras lógicas borrosas también incumplen esa ley sin considerar una negación independiente (e.g. tomando la t-conorma máximo $\vee$ junto a $\mu_{\neg P}(x) = 1 - \mu_P(x)$). Por ello, el significado concreto de los AFS es relativamente oscuro, pues muestran la semántica de un marco B1 mientras que formalmente se asemejan a un marco B2. Además, en tanto que el modelo de Atanassov nunca proporciona una definición clara de su estructuras lógica y semántica subyacente (ver [12]), no hubo razones sólidas para separar los AFS de los IVFS cuando se demostró la equivalencia [5,6] de ambos formalismos (mediante el isomorfismo $\Phi : L^{c} \to L^{I}$ tal que

$$\Phi(\langle \mu_P(x), \mu_{\neg P}(x) \rangle) = [\mu_P(x), 1-\mu_{\neg P}(x)]).$$

Esta equivalencia produjo una fuerte controversia (ver [3,7]) entre Atanassov y sus partidarios, por un lado, que defendieron la validez de los AFS como objetos B2 (o al menos su validez como modelo *intuicionista*) diferentes de los IVFS, y por otro lado, una importante parte de la comunidad *fuzzy*, que consideraba que el significado intuicionista de los AFS no estaba en absoluto claro, y, además, en tanto que los IVFS fueron formulados previamente a los AFS, la relevancia de estos como objetos bipolares debía ser reducida debido a tal equivalencia (a pesar de que los IVFS fueron originalmente concebidos como objetos B1).

En nuestra opinión, la semántica original de los AFS (sea cual sea) no es de tipo B2. Sin embargo, si $\nu$ es interpretada como la función de pertenencia de un polo $Q$ tal que $Q \neq \neg P$, i.e. $\nu_P(x) = \mu_Q(x)$, y se mantiene la restricción $\mu_P(x) + \nu_P(x) \leq 1$, entonces se obtiene fácilmente una semántica B2 (con una relación particular entre los polos). Nuestra opinión es que estos *nuevos* objetos, (que denominaremos AFS *bipolares*, BAFS) no son semánticamente equivalentes a los IVFS. Para sostener esta afirmación, en la próxima sección definiremos formalmente la semántica de los objetos B2, mostrando que la semántica de los BAFS (y en general la de los formalismos F1 y B2) difiere de la de los IVFS (y en general de la semántica de los formalismos F2 y B1). Esta diferenciación semántica será introducida mediante la noción de extensión 4-valorada.

# 4 EXTENSIONES 4-VALORADAS

Como se señaló en la sección anterior, en un marco B2 la información positiva y negativa proporcionada por los pares $(\mu^+, \mu^-) \in \{0,1\}^2$ conduce de forma natural a cuatro casos que reflejan el significado o semántica de esos pares en términos cognitivos. Esto es, la descripción de la información contenida en los pares se traduce en 4 diferentes *estados epistémicos*, que reflejan la situación de conocimiento, en términos de una polaridad $P/Q$, a la que aboca la evidencia disponible sobre un objeto $x$.

Cuando la evidencia es evaluada de forma borrosa, esto es, cuando $(\mu^+, \mu^-) \in [0,1]^2$ (o $\in (L^I)^2$), la traducción de los pares en estados epistémicos es más compleja, en tanto que un par puede ser parcialmente compatible con varios de esos 4 estados. En otras palabras, en un contexto borroso esos cuatro estados son también graduales, y es entonces preciso proporcionar una extensión continua 4-valorada de esos pares que especifique la semántica de los pares no extremos. Aunque es posible definir concretamente estas extensiones de diversas maneras (dando lugar a diferentes semánticas), en este trabajo se opta por una extensión que generaliza las nociones de verdad y falsedad habituales de la lógica borrosa.

Así pues, suponiendo que $L^+ = L^- = L$, $L = [0,1]$ ó $L^I$, con cada par $(\mu^+, \mu^-) \in L^+ \times L^-$ se asocia una *matriz de evidencia*

$$EM = \begin{bmatrix} t(\mu^+, \mu^-) & i(\mu^+, \mu^-) \\ k(\mu^+, \mu^-) & f(\mu^+, \mu^-) \end{bmatrix},$$

obtenida mediante las fórmulas

$$t(\mu^+, \mu^-) = \mu^+ \wedge \neg\mu^-,\ f(\mu^+, \mu^-) = \neg\mu^+ \wedge \mu^-, \qquad (1)$$

$$i(\mu^+, \mu^-) = \neg\mu^+ \odot \neg\mu^-,\ k(\mu^+, \mu^-) = \mu^+ \odot \mu^-, \qquad (2)$$

donde $\neg\mu$ denota la negación (en $L$) de la evaluación $\mu$. Nótese que $t, f, i, k \in L$, y por tanto $EM$ evalúa, en la misma escala en que se valoran $\mu^+$ y $\mu^-$, el grado en que se verifica cada uno de los cuatro estados epistémicos.

La extensión dada en las fórmulas (1)-(2) fue propuesta para el caso $L$=[0,1] en [14] (y ha seguido siendo analizada en [18]), donde se prueba que es la *única* extensión continua basada en t-normas verificando simultáneamente que los estados $i$ y $k$ son mutuamente exclusivos (ya que si $i$>0 entonces $k$=0 y viceversa) y que $t + f + i + k = 1$ para todo $(\mu^+, \mu^-) \in L^+ \times L^-$. Nótese que intercambiando las posiciones de la t-normas mínimo $\wedge$ y de Lukasiewicz $\odot$ se obtiene otra extensión (utilizada en modelización de preferencias [9]), que también cumple $t + f + i + k = 1$ pero en la que ahora $t$ y $f$ son exclusivos. Sin embargo, como veremos, esta última extensión no generaliza las nociones clásicas de verdad y falsedad en el caso en que $Q = \neg P$, mientras que la dada por (1)-(2) sí lo hace.

Los resultados en [14] relativos a la extensión dada por (1)-(2) pueden ser generalizados al caso $L = L^I$ mediante el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [15]:

**Teorema:** Sean $\mu^+ = [\mu_L^+, \mu_U^+]$ y $\mu^- = [\mu_L^-, \mu_U^-]$ ($0 \leq \mu_L^- \leq \mu_U^- \leq 1$, $0 \leq \mu_L^+ \leq \mu_U^+ \leq 1$) las evaluaciones intervalo-valoradas positiva y negativa de la proposición "$x \in P$". Sean también $t = [t_L, t_U]$, $f = [f_L, f_U]$, $i = [i_L, i_U]$ y $k = [k_L, k_U]$ la extensión 4-valorada asociada al par $(\mu^+, \mu^-)$, obtenida a través de las fórmulas (1)-(2).

Entonces $k_L$ y $i_U$ así como $i_L$ y $k_U$ son mutuamente exclusivos y se cumple que

$$t_L + f_L + i_U + k_U = t_U + f_U + i_L + k_L = 1 + m,$$

donde $m = \min\{u^+, u^-, u_t, u_f, u_u, u_k\}$ y $u^+ = \mu_U^+ - \mu_L^+$, $u^- = \mu_U^- - \mu_L^-$, $u_t = t_U - t_L$, $u_f = f_U - f_L$, $u_i = i_U - i_L$, $u_k = k_U - k_L$ son los grados de ignorancia asociados con cada intervalo.

A continuación, la extensión (1)-(2) será aplicada a diferentes combinaciones de tipos de bipolaridad y de incertidumbre borrosa para ilustrar la semántica particular de cada caso:

***Incertidumbre borrosa + bipolaridad de tipo 1* (F1,B1)**
En este caso es $L$=[0,1] y $Q = \neg P$, por lo que $\mu^+ = \mu_P$ y $\mu^- = \mu_{\neg P} = n(\mu_P) = 1 - \mu_P$. Esto implica que $t = \mu^+$, $f = \mu^-$ y $k = i = 0$. En particular, $m = 0$ en tanto que no se admite ignorancia respecto de los valores de $\mu^+, \mu^-$. Como ejemplo, supóngase un $x \in X$ tal que $\mu_P(x) = 0.6$, esto es, se tiene el par $(\mu^+, \mu^-) = (0.6, 0.4)$ y la matriz

$$EM_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la extensión (1)-(2) generaliza las nociones de verdad y falsedad de la lógica borrosa (identificadas con $\mu_P$ y $\mu_{\neg P}$), y refleja la semántica B1 de este marco, que excluye los estados *k* e *i*.

***Incertidumbre borrosa tipo 2+bipolaridad tipo 1* (F2,B1)**
Supóngase ahora que, en el ejemplo anterior, el valor de $\mu_P(x)$ no se conoce con precisión, sino que se sabe que cae en el intervalo $[\mu_L(x), \mu_U(x)]_P$. Por tanto, se asume aún que $Q = \neg P$, pero ahora $L = L^I$ y entonces $\mu^+ = [\mu_L, \mu_U]_P$ y $\mu^- = n_{L^I}([\mu_L, \mu_U]_P) = [1-\mu_U, 1-\mu_L]_{\neg P}$. Así, se obtiene de nuevo que $t = \mu^+$ y $f = \mu^-$ pero ahora $k = i = [0, u]$ y *m*=*u*, donde $u = \mu_U - \mu_L$ es la ignorancia asociada a $\mu_P$. Por ejemplo, si $\mu^+ = [0.5, 0.7]$ (luego $\mu^- = [0.3, 0.5]$), se obtiene la matriz

$$EM_2 = \begin{bmatrix} [0.5, 0.7] & [0, 0.2] \\ [0, 0.2] & [0.3, 0.5] \end{bmatrix},$$

mostrando que ahora las evaluaciones de la veracidad y falsedad positivas son también afectadas por ignorancia, permitiendo que *i* y *k* sean no nulas. Sin embargo, si la ignorancia se reduce, i.e. al tender *u* a 0, *k* e *i* tienden a [0,0], aproximándose al caso anterior (F1,B1).

***Incertidumbre borrosa tipo 1+bipolaridad tipo 2* (F1,B2)**
Si se permite que la información negativa sobre "$x \in P$" sea independiente de la negación *n* del primer caso (F1,B1), se obtiene un marco B2 en el que $Q \neq \neg P$, $\mu^+ = \mu_P$, $\mu^- = \mu_Q$ y $L^+ = L^- = L = [0,1]$. Luego *m*=*u*=0, pero *t* (*f*) ya no puede ser identificada con $\mu^+$ ($\mu^-$), y uno de los estados *i,k* puede cumplirse. Por ejemplo, si $(\mu^+, \mu^-) = (0.6, 0.7)$, se obtiene la matriz

$$EM_3 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix},$$

que muestra que $t \neq \mu^+$, $f \neq \mu^-$ e informa de que la información es parcialmente conflictiva (*k*=0.3), implicando que $t < \mu^+$ y $f < \mu^-$.

Nótese que $(\mu^+, \mu^-) = (0.5, 0.3) \in L^*$ es el par asociado al intervalo $[0.5, 0.7] \in L^I$ del caso previo a través del isomorfismo $\Phi : L^* \to L^I$, y que produce la matriz

$$EM_4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que $EM_2 \neq EM_4$, y no solo porque $EM_2$ introduce ignorancia mientras que $EM_4$ no lo hace. Si la ignorancia *u* se reduce, entonces podría tenerse $\mu^+_{EM_2} = [0.5, 0.5]$, de manera que $t_{EM_2} = [0.5, 0.5] = 0.5 = t_{EM_4}$, pero entonces sería $f_{EM_2} = [0.5, 0.5] \neq 0.3 = f_{EM_4}$ e $i_{EM_2} = [0,0] \neq 0.2 = i_{EM_4}$ ya que $\mu^-_{EM_2} = n_{L^I}(\mu^+_{EM_2}) = [0.5, 0.5]$ por el marco B1 de los IVFS. Sin embargo, los BAFS permiten que $\mu^-$ sea independiente de $\mu^+$ al exhibir una bipolaridad de tipo 2, aunque la condición $\mu^+ + \mu^- \leq 1$ implique que *k*=0. Entonces, es claro que la semántica en términos de estados epistémicos de los BAFS es diferente de la de los IVFS, y su equivalencia debería ser entendida como una coincidencia formal entre dos escalas que pertenecen a universos diferentes, pues $[0,1] \subset L^I \subset F([0,1])$ mientras que $L^* \subset [0,1]^2 \subset L^I \times L^I \subset F([0,1]) \times F([0,1])$.

***Incertidumbre borrosa tipo 2+bipolaridad tipo 2* (F2,B2)**
Finalmente, supóngase que, en un marco B2, se permite ignorancia sobre las evaluaciones $\mu^+, \mu^-$, de modo que se obtiene un par $(\mu^+, \mu^-) \in L^I \times L^I$. Nótese que este caso generaliza todos los anteriores y coincide con las hipótesis del teorema anterior. Entonces, si $\mu^+ = [0.5, 0.7]$ y $\mu^- = [0.6, 0.9]$, se obtiene la matriz

$$EM_5 = \begin{bmatrix} [0.1, 0.4] & [0, 0] \\ [0.1, 0.6] & [0.3, 0.5] \end{bmatrix},$$

y obsérvese que ahora cada uno de sus elementos tiene asociada un grado de ignorancia diferente (y *m*=0), y que estos resultados extienden los de $EM_1$, $EM_2$ y $EM_3$. Nótese también que $u^+$ o $u^-$ pueden ser reducidas sin afectar a la otra, y en el caso límite en que $u^+ = u^- = 0$, se alcanza un marco F1 y B2. Un ejemplo de formalismo B2 y F2 son los IVFS de Atanassov (AIVFS, ver [2]), aunque es válido el mismo argumento de la Sección 3 para afirmar que estos no pueden ser vistos como objetos B2 a menos que se asuma la existencia de un polo negativo $Q \neq \neg P$ (dando lugar a AIVFS *bipolares* o BAIVFS).

## 5 CONCLUSIONES

Las nociones de incertidumbre borrosa y de bipolaridad han sido revisadas y analizadas. En tanto fueron desarrolladas para afrontar la modelización de características distintas del razonamiento humano, ambas nociones son de hecho complementarias e independientes. Un formalismo F2 puede ser B2 o no serlo, y recíprocamente un marco B2 puede permitir ignorancia (siendo entonces también una marco F2) o no. En particular, esta diferencia se ha hecho evidente en este trabajo, clarificando algunos aspectos de las relaciones entre los formalismos B1,F2 y los B2,F1. De manera implícita, este trabajo muestra que existe cierta diferencia entre las nociones de *intuicionismo* (en el sentido de usar una negación sub-aditiva $n(\mu) \leq 1-\mu$ ) y de bipolaridad. Sin embargo, si se asume la presencia de un polo negativo $Q \neq \neg P$, entonces los BAFS y BAIVFS constituyen formalismos relevantes dentro de un marco B2. La siguiente Tabla 1 presenta una tipología de los casos y formalismos estudiados en este trabajo, los cuales muestran semánticas diferentes en términos de los estados cognitivos o epistémicos a los que conducen.

**Tabla 1.** Combinaciones de tipos 1 y 2 de incertidumbre borrosa y bipolaridad.

| **Fuzziness** / **Bipolaridad** | Tipo 1 (F1) | Tipo 2 (F2) |
|---|---|---|
| Tipo 1 (B1) | T1FS | T2FS, IVFS |
| Tipo 2 (B2) | BAFS, BFS | BT2FS, BAIVFS |

En el futuro, este trabajo se extenderá en diversas direcciones: se introducirán retículos (*lattices*) para obtener un marco lógico más general y riguroso. También, se explorarán con más detenimiento las relaciones entre bipolaridad, intuicionismo, el uso de negaciones sub-aditivas y los operadores de disimilaridad [16]. Además, se estudiará el posible uso de los formalismos F2 para combinar la incertidumbre borrosa con otras teorías de la incertidumbre (probabilística, posibilística, etc.).

**Agradecimientos**

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto TIN2009-07901.

## Referencias

[1] Atanassov KT (1986) Intuitionistic Fuzzy-Sets, F Set Syst, 20 (1) 87-96

[2] Atanassov KT, Gargov G (1989) Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets, F Set Syst, 31(3) 343-349

[3] Atanassov KT (2005) Answer to D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk and H. Prade's paper "Terminological difficulties in fuzzy set theory - the case of "Intuitionistic fuzzy sets", Fuzzy Set Syst, 156 (3) 496-499

[4] Cacioppo JT, GardnerWL, Berntson GG (1997) Beyond bipolar conceptualizations and measures: The case of attitudes and evaluative space. Pers Soc Psychol Rev 1:3–25.

[5] Cornelis C, Atanassov K, Kerre E, Intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets: a critical comparison, Proc. Eusflat'03, 2003, 159–163

[6] Deschrijver G, Kerre E (2004) On the relationship between some extensions of fuzzy set theory, Fuzzy Set Syst 133 227–235.

[7] Dubois D, Gottwald S, Hajek P, Kacprzyk J, Prade H (2005) Terminological difficulties in fuzzy set theory - The case of "Intuitionistic Fuzzy Sets", Fuzzy Set Syst, 156 (3) 485-491

[8] Dubois D, Prade H (2008) An introduction to bipolar representations of information and preference, Int J Intell Syst, 23 (8) 866-877

[9] Fodor J, Roubens M (1994) Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support, Kluwer Academic, Dordrecht ; Boston

[10] Franco C, Rodríguez T, Montero J. (2010) Information measures over intuitionistic four valued fuzzy preferences. Proceedings IEEE-WCCI Conference, Barcelona, July 18-23, pages 1971-1978

[11] Grattan-Guinness I (1975) Fuzzy membership mapped onto interval and many-valued quantities, Z. Math. Logik Grundlag. Mathe., 22 149-160

[12] Medin D, Schwanenflugel P (1981) Linear separability in classification learning, J. of Experimental Psychology: Human Learning & Memory, 7 355-368

[13] Montero J, Gómez D, Bustince H (2007) On the relevance of some families of fuzzy sets, Fuzzy Set Syst, 158 (22): 2439-2442

[14] Öztürk M, Tsoukiàs A (2007) Modelling uncertain positive and negative reasons in decision aiding, Decision Support Systems, 43 (4): 1512-1526

[15] Rodriguez JT, Franco CA, Vitoriano B, Montero J (2011) Eurofuse

[16] Rodriguez JT, Franco CA, Vitoriano B, Montero J (2011) An axiomatic approach to the notion of semantic antagonism, Procs. of the IFSA-AFSS'11, FT104-1/6

[17] Schweizer B, Sklar A (1983) Probabilistic Metric Spaces. North–Holland/Elsevier, New York.

[18] Turunen E, Ozturk M, Tsoukiàs A (2010) Paraconsistent semantics for Pavelka style fuzzy sentential logic Fuzzy Set Syst, 161 (14) 1926-1940

[19] Zadeh LA (1965) Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (3) 338-353

[20] Zadeh, LA (1975) The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning, Information Sciences 9 (1) 43-80