MATEMÁTICAS CON DOS AÑOS: BUSCANDO TEORÍAS PARA INTERPRETAR LA ACTIVIDAD INFANTIL Y LAS PRÁCTICAS DOCENTES

Carlos de Castro Hernández
Universidad Autónoma de Madrid

Gonzalo Flecha López
Escuela Cigüeña María, Las Rozas, Madrid

Mónica Ramírez García
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN
En este artículo, revisamos algunas ideas teóricas que nos ayudan a comprender las matemáticas de 0 a 3 años, y a guiar la planificación de la enseñanza de maestros y educadores infantiles para estas edades. Destacamos ideas relacionadas con la cognición corpórea, la matemática informal, la matemática emergente y la educación matemática realista. Después, describimos experiencias matemáticas desarrolladas en un aula con niños y niñas de dos años. Concluimos con unas reflexiones sobre la necesidad de articular las teorías con la práctica, a fin de poder interpretar las prácticas docentes y la actividad infantil. También señalamos la dirección que lleva la educación matemática infantil de 0 a 3 años.

PALABRAS CLAVE
Educación infantil - 0 a 3 años - cognición corpórea - matemática emergente - matemática informal - experiencias matemáticas.

ABSTRACT
In this article, we review some theoretical ideas that improve our understanding of mathematics from zero to three years, and guideteachers and early childhood educators when theyplan their teaching for these ages. We highlight ideas related to embodied cognition, informal mathematics, emergent mathematics and realistic mathematics education. Then, we describe mathematical experiences from a classroom with children of two years. We conclude with some reflections on the need to articulate theory and practice, in order to interpret teaching practices and children activity. We also point out the direction leading mathematics education of children with zero to three years.

KEY WORDS
Preschool - toddlers - embodied cognition - emergent mathematics - informal mathematics - mathematical experiences.

1. INTRODUCCIÓN

Los niños comienzan a desarrollar su pensamiento matemático desde que nacen (Butterworth, 1999; Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez, 2013; Dehaene, 1997; Lago, Jiménez y Rodríguez2003; Lago, Rodríguez, Escudero, Dopico, 2012). Estas ideas provienen fundamentalmente de investigaciones en el campo de la Psicología. No obstante, han causado un importante impacto en documentos de gran relevancia para el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de educación infantil (Clements, 2004; *National Research Council*, 2014). También comienza a haber cada vez mayor número de trabajos de didáctica de las matemáticas interesados por la educación matemática en primer ciclo de infantil (Alsina, 2015; De Castro, 2011; De Castro y Quiles, 2014; Edo, 2012; Lee, 2012) y los manuales para la formación de maestros empiezan a dedicar parte de sus contenidos a las matemáticas de 0 a 3 años (Alsina, 2006; Clements y Sarama, 2009; Geist, 2009; Van den Heuvel-Panhuizen, 2010).

En este trabajo queremos reflexionar sobre la actividad matemática infantil que desarrollan los niños de 2 y 3 años. Nos centramos en las matemáticas en esta edad, que marca el final del primer ciclo de educación infantil (0 a 3 años), para poder profundizar en ellas desde una doble perspectiva teórica y práctica. Por un lado, vamos a comenzar explicando qué se entiende por matemáticas para niños de dos años, según documentos curriculares que tomamos como referencia. Después, revisaremos ideas teóricas que nos ayuden a comprender la práctica en el aula. Por último, queremos mirar a las prácticas que se desarrollan en la escuela infantil, a fin de desarrollar una doble mirada (teórica y práctica) que nos oriente en nuestra labor docente y de investigación.

2. LA VISIÓN CURRICULAR SOBRE LAS MATEMÁTICAS CON DOS AÑOS

Durante bastantes años, el modelo teórico que reunía un mayor consenso (quizá todavía en la actualidad) para estudiar las matemáticas infantiles, ha sido el del conocimiento *lógico-matemático*, originario de los trabajos de Piaget. Este autor diferencia entre la experiencia física, en la que los niños actúan sobre los objetos para abstraer sus propiedades, y la lógico-matemática, que supone la actuación sobre los objetos y la abstracción de las acciones que se efectúan sobre los objetos, y no delos propios objetos (Piaget e Inhelder, 1966/2007, pp. 153-54). El término *lógico-matemático*, acuñado por Piaget, hace más de medio siglo, para describir la actividad matemática infantil, sigue protagonizando parte importante de la literatura especializada en educación matemática infantil (Geist, 2009; Kamii, 1982/1995). En este enfoque, se consideran tres tipos de conocimiento: el físico, sobre los objetos y sus propiedades físicas, al que se llega a través de la observación y la abstracción empírica; el lógico-matemático, que implica la coordinación de relaciones entre los objetos, cuya vía es la abstracción reflexiva; y el social o convencional (Kamii, 1982/1995).

En los últimos decenios, se ha producido una revolución post-piagetiana en el ámbito de la Psicología. En el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años, el cambio en la consideración sobre cómo aprenden matemáticas los niños, desde bebés, ha sido muy importante (Lago, Jiménez y Rodríguez2003; Lago, Rodríguez, Escudero y Dopico, 2012; *National Research Council*, 2014a).

En la Educación Matemática, los cambios han tardado más en llegar, y vienen de la mano de autores de prestigio en el área (Clements, 2004; Clements y Sarama, 2009) y de instituciones de referencia internacional, como el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de EEUU (NCTM), la Asociación Nacional para la Educación de la Primera Infancia (NAEYC), y el Consejo Nacional de Investigación (NRC), que van extendiendo paulatinamente su reflexión sobre la matemática infantil a edades cada vez menores, llegando a incluir el periodo de 0 a 3 años (Fuson, Clements y Beckman, 2009; NAEYC y NCTM, 2013; National Research Council, 2014a). Como resultado, los currículos empiezan a reflejar también la presencia y la relevancia de la actividad matemática infantil desde los 0 a 6 años (Fuson, Clements y Beckman, 2009).

El hecho de que la reflexión sobre las matemáticas en educación infantil se esté extendiendo en trabajos de expertos, instituciones y en currículos, tiene, entre otras consecuencias, que pueda darse un principio de respuesta a la pregunta: ¿Qué es hacer matemáticas en el ciclo de 0 a 3 años? (O más específicamente, en el aula de 2-3 años). En la tabla 1, mostramos las ideas matemáticas que se pueden desarrollar a los 2-3 años. En la columna de la izquierda figuran los contenidos matemáticos; en la central, las actividades que pueden desarrollar los niños de 2-3 años relativas a estos contenidos; en la columna de la derecha, aparecen actividades propias de niños de 3-4 años. Aunque estamos interesados en este trabajo por los niños de 2-3 años, debido a las diferencias en el desarrollo a estas edades (National Research Council, 2014b), muchas de las actividades que proponemos en la tabla pueden ser hechas por niños de 2-3 años, pero otras resultan más difíciles y algunos niños no las dominan hasta los 3-4 años. En este caso hemos unido las dos edades en una sola columna. La lectura de esta tabla nos proporciona una idea clara de qué se puede entender por"matemáticas" a los 2-3 años.

Tabla 1. *Conocimientos matemáticos en 2-3 años (Adaptado de Clements, 2004)*

Contenido matemático	2-3 años	3-4 años
Cuantificadores: Los cuantificadores son palabras que expresan cantidad		
	Traer, trasladar, etc., pocos o muchos objetos, vaciar todo el líquido de una botella, etc.	
		Uso del cuantificador "ninguno"
Conteo: El conteo puede utilizarse para determinar cuántos objetos hay en una colección		
a. Un elemento clave en lapreparación para el conteo es la representación no verbal de pequeñas cantidades de objetos y la determinación de la equivalencia de colecciones pequeñas de objetos.	Formar colecciones de hasta 4 objetos sin dar la cantidad verbalmente. Por ejemplo, mostrando 3 objetos y tapándolos a continuación, para que el niño forme una colección con la misma cantidad de objetos.	
	Formar una equivalencia por emparejamiento de dos colecciones de hasta 4 objetos	
b. Otro elemento clave en la preparación para el conteo es el aprendizaje de la secuencia estándar de palabras-número (conteo oral) que resulta facilitado por el descubrimiento de patrones.	*Conteo oral de uno en uno de…*	
	1 a 10	
	Decir cuál es el número que va después de…	
	2, 3, hasta 9, empezando a contar desde 1. Por ejemplo: ¿Qué número va después de 4? "1, 2, 3, 4 y 5. El 5."	

c. El conteo de objetos supone la creación de una *correspondencia uno a uno* entre cada palabra numérica de la secuencia de conteo oral y cada objeto de una colección, utilizando alguna acción que represente cada uno de estos pasos a medida que se dice la palabra numérica.	*Contar los objetos de una colección sabiendo que la última palabra empleada al contar representa el número de objetos de la colección*
	de 1 a 4 objetos
	Formar una colección con un número dado de objetos (Se retrasa un poco con respecto al conteo de colecciones)
	de 1 a 4 objetos
d. Los patrones numéricos pueden facilitar la determinación del número de objetos de una colección o su representación.	*Reconocer inmediatamente (sin contar) cuántos objetos hay en una colección de…*
	1 a 3 objetos
	Representar cantidades con los dedos de…
	1 y 2 dedos
Comparación y ordenamiento: Las colecciones de objetos pueden compararse y ordenarse, y los números son instrumentos eficaces para hacerlo	
a. La comparación y el ordenamiento se construyen sobre un conocimiento no verbal y sobre la experiencia con colecciones reales de objetos.	Determinar visualmente cuando dos colecciones tienen el"mismo" número de elementos y cuando una tiene "más".
b. El aprendizaje del lenguaje de los números ordinales puede construirse sobre la capacidad de comparación de los niños y el conocimiento de las palabras numéricas.	"primero" y "último"
Añadir/quitar: Una colección de objetos puede hacerse más grande al añadir objetos y más pequeña al quitar objetos de ella.	
a. La resolución de problemas no verbales favorece el desarrollo posterior de la suma y la resta.	*Suma y resta no verbal*
	Un objeto y otro objeto o dos objetos menos un objeto.
Composición y descomposición: Una cantidad (total) puede ser "separada" (descompuesta) en partes, y las partes pueden ser combinadas (compuestas) para formar el total.	
a. El razonamiento cualitativo acerca de las relaciones parte-todo proporciona las bases para las composiciones y las descomposiciones más avanzadas.	Comprender y razonar cualitativamente e intuitivamente acerca de las relaciones de parte-todo.
	Aumentar (o disminuir) el tamaño de una de las partes (no determinada), aumenta (o disminuye) el total.
Medición	
a. La medición puede emplearse para determinar y comparar "cuánto hay."	Comentar y establecer comparaciones informales de atributos, llegando a la comparación de objetos de tamaños claramente diferentes. Aprender a emplear expresiones como "más grande", "más alto", y "más largo".
Geometría	
a. Las formas geométricas pueden utilizarse para representar y comprender los objetos que hay en el mundo a nuestro alrededor.	Emparejar formas iguales, con el mismo tamaño y orientación. Después, con distinto tamaño y orientación.
	Nombrar, describir, comparar y ordenar objetos tridimensionales
	Juego informal con formas tridimensionales (p. ej., juegos de construcción con piezas de madera).
b. Las formas pueden descomponerse en otras formas o en sus partes componentes; las formas pueden utilizarse para componer nuevas formas y estructuras como los frisos.	*Componer (poner juntas) formas bidimensionales para producir nuevas formas geométricas*
	Utilizar figuras aisladas para hacer un diseño.
Posiciones, direcciones y coordenadas. Las matemáticas se emplean para especificar con precisión direcciones, caminos y posiciones en el espacio.	Comprender y utilizar conceptos como: encima, debajo, en, al lado, cerca de, entre…
La simetría puede emplearsepara analizar, comprender, ycrear formas en la geometríay en el arte.	Crear informalmente formas bidimensionales y construcciones tridimensionales que tenganun eje, un centro o un plano de simetría.
Clasificación y seriación	
Clasificaciones temáticas	Juntar, dentro de una colección de objetos, los que sirven para comer, vestirse, los que se usan en clase, etc.
Formación de colecciones	Agrupar según el 'criterio' "coloca lo que va junto". Formar una colección, nombrar sus elementos y decir el criterio utilizado.

Formación de conjuntos conuna propiedad característica	Formar conjuntos con un atributo sencillo. Porejemplo, agrupar las fichas rojas.	
Clasificación atendiendo a una variable		Clasificar BloquesLógicos según elcolor, forma,tamaño y grosor.
Formación de conjuntos condos propiedades		Formar conjuntos con dosatributos (p. ej., agruparlas fichas rojas y grandes.
Las alineaciones y los conceptos básicos relacionados con el orden son básicos para el aprendizaje de las seriaciones.	Colocarse (niños) en fila	Situar objetos en fila
	Colocarse al principio o al final de una fila	Tomar el objeto que está en medio de otros dos
	Uso en situaciones de juego de los conceptos de antes, ahora y después	
Series cualitativas	Reproducir un orden arbitrario. Por ejemplo, copiar el orden rojo-azul-verde-amarillo-naranja en un collar con cuentas.	Copiar y extender series con cuentas de collar con un patrón sencillo de longitud dos. Por ejemplo: rojo-azul.
Series cuantitativas		Ordenar correctamente tres objetos por longitud. Formar la serie: pequeño-mediano grande.

3. LA MATEMÁTICA INFANTIL EN BUSCA DE TEORÍAS

En el apartado anterior señalamos que el modelo piagetiano del conocimiento lógico-matemático está desapareciendo de forma lenta, pero inexorable, como referencia teórica para la matemática infantil. Pensamos que, para interpretar la actividad infantil en la escuela, no basta con tener una idea de qué actividades matemáticas pueden desarrollarse, sino que necesitamos, además, ciertas referencias teóricas que sirvan de marco interpretativo. Para ello, en este apartado revisamos brevemente algunos enfoques teóricos que han surgido, o se han aplicado, en el ámbito de la educación matemática, y que pueden ayudarnos a interpretar desde el punto de vista matemático la actividad infantil en un aula de 0 a 3 años. Ninguno de estos enfoques ha alcanzado el grado de consenso que tuvo en su día el modelo piagetiano pero, como veremos en las reflexiones finales, comparten ciertas ideas que consideramos valiosas para repensar la actividad matemática en los primeros años.

3.1 La cognición corpórea y los tres mundos matemáticos

Lakoff y Núñez (2000) en su libro “De dónde vienen las matemáticas”, plantean que la mayoría de los conceptos abstractos tienen una procedencia en situaciones concretas y que se van formando a través de metáforas: “Los números son colecciones de objetos del mismo tamaño”, “sumar es juntar varias colecciones de objetos”, “restar es quitar una colección que forma parte de una colección mayor”, “la unidad (el número 1) es la colección menor, formada por un solo objeto”. En todos los casos, los conceptos matemáticos tienen una referencia en acciones o percepciones de situaciones o experiencias de la vida ordinaria. Estas metáforas tienen *implicaciones*, pues cualquier relación que establecemos con colecciones de objetos tiene su correspondencia en el ámbito numérico. Así, si tenemos una colección de objetos A y le añadimos otra B, el resultado es igual que si a una colección de objetos B y le añadimos la colección A. Esto, en términos aritméticos, se traduciría como a + b = b + a, que es la propiedad conmutativa de la suma.

La teoría que siguen Lakoff y Núñez (2000) se conoce como *embodied cognition*, que se suele traducir como "cognición encarnada" o "cognición corpórea". La idea central en este enfoque es que los conceptos matemáticos nacen ligados a la experiencia sensorial, a la percepción del mundo, a nuestras experiencias, y son por tanto conceptos corpóreos. Metafóricamente, diríamos "que tienen carne", frente al esquematismo de los huesos descarnados. El proceso de abstracción matemático va descarnando estos conceptos corpóreos y los va dejando en el hueso (que representa el concepto matemático abstracto). Por ejemplo, cuando decimos que dos rectas son ortogonales, la idea de ortogonal, metafórica y etimológicamente, refiere a la salida del sol sobre el horizonte. Esta es una idea ligada a nuestra experiencia, pero tiene "carnes que le sobran". En efecto, el horizonte sugiere siempre una recta horizontal (nueva metáfora), y la salida del sol una trayectoria vertical ascendente. En el "concepto descarnado" de ortogonal (el propio de las matemáticas, el abstracto), las rectas no tienen por qué ser horizontales ni verticales, ni una de ellas tiene que venir dada por una trayectoria (por el movimiento del sol), sino que son líneas rectas ya formadas, sin grosor¡e infinitas!, que forman entre sí un ángulo de 90º. Si seguimos avanzando en las matemáticas, nos volvemos a encontrar la ortogonalidad en el contexto de dos vectores cuyo producto escalar es cero, lo cual ya nos aleja suficientemente de la experiencia cotidiana para considerar que estamos ya tratando con una matemática absolutamente descarnada.

Aplicar el enfoque de la cognición corpórea a la educación infantil es bastante razonable, puesto que muchos conceptos matemáticos revelan de inmediato su origen metafórico. En el ámbito de la geometría, con ejemplos similares al de ortogonal, "perpendicular" se refiere a la caída de un objeto "a plomo" sobre la tierra; "isósceles" significa "que tiene las piernas iguales" y la "hipotenusa" es una cuerda tensada fuertemente (entre los extremos de los catetos). Un enfoque así apoya la idea de un aprendizaje en el que se parte de las experiencias infantiles para ir encontrándonos con ideas matemáticas a través de una metáfora o analogía.

La implicación didáctica que sugeriría este modelo es que enseñar matemáticas en 0-3 consistiría en exponer a los pequeños al tipo de experiencias que vayan a dar lugar con posterioridad a los conceptos matemáticos vía metáfora. Por ejemplo, si observamos y hablamos de cómo caen los objetos al suelo, esto nos puede llevar (más adelante) a una conceptualización metafórica de la perpendicularidad. También trabajar con grandes cantidades de objetos (bellotas, como veremos en el próximo apartado), agrupándolas, metiéndolas en recipientes, añadiendo, quitando, puede suponer una base para el aprendizaje del número, vía metáfora "el número es una colección de objetos". Muchas de las relaciones que obtengamos al actuar sobre montones de bellotas pueden ser la base del aprendizaje de propiedades numéricas. Esta es una idea próxima a lo que Resnick (1992) denominaba "aritmética de las protocantidades".

En línea con la cognición corpórea, Tall (2013) explica el desarrollo del pensamiento matemático, partiendo de marcos teóricos como Piaget, Bruner, Fischbein, a través de tres etapas de larga duración a las que denomina "tres mundos matemáticos" (p. 13). En la primera etapa, se da el inicio del pensamiento matemático, basado en la percepción y en la acción, como se puede ver en la figura 1, que después evolucionará, con el tiempo, hacia el desarrollo del mundo simbólico, con un lenguaje matemático formal y un razonamiento matemático deductivo.

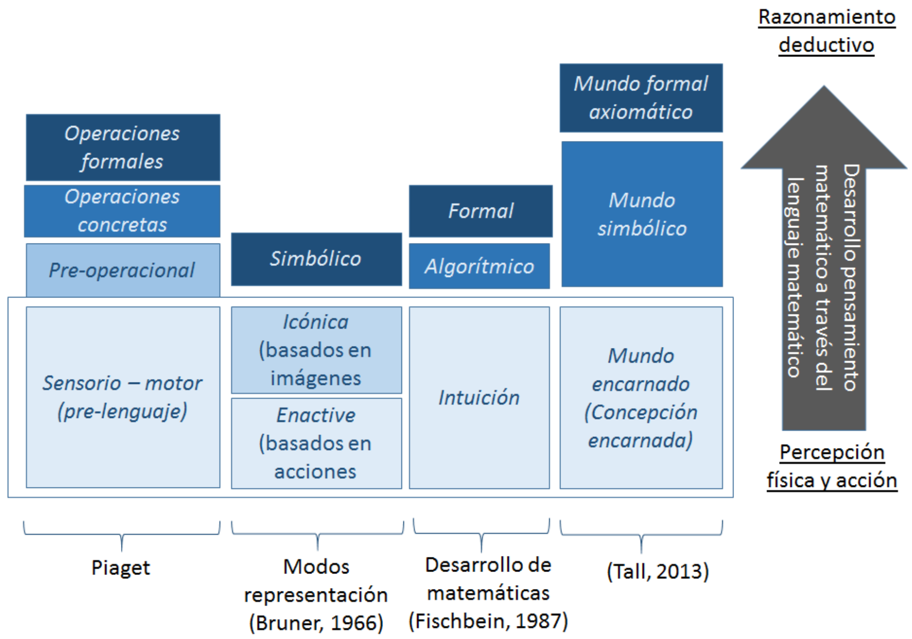

Figura 1. Relación de distintas trabajos del desarrollo del pensamiento matemático (Adaptado de Tall, 2013, pp. 6-8).

Tall (2013) utiliza la *concepción corpórea*(o encarnada) para describir la primera etapa intuitiva, basada en acciones y percepciones, estableciendo paralelismos con otros autores (figura 1). Se parte de la idea de que todo pensamiento tiene origen corpóreo en nuestra experiencia sensorio-motora. El conocimiento matemático comienza con la percepción de las propiedades de los objetos, y las operaciones con colecciones, llegando en un nivel de desarrollo estructural más alto, como por ejemplo en la aritmética. Tall (2013) utiliza el término de *encarnación conceptual (conceptual embodiment)* para referirse a las imágenes mentales que surgen de la interacción de las personas con el mundo que le rodea.

Tall (2009) define así los tres mundos de las matemáticas: (1) Un *mundo corpóreo*, basado en la reflexión sobre la percepción y la interacción con objetos del mundo real; (2) Un *mundo simbólico,* que establece el nexo entre lo corpóreo y lo simbólico, en que los símbolos pueden reconocerse a la vez como operaciones a realizar o como conceptos manipulables en la mente. (3) Un *mundo formal axiomático*, que parte de axiomas, y mediante teoremas demostrados formalmente, construye teorías coherentes (figura 2).

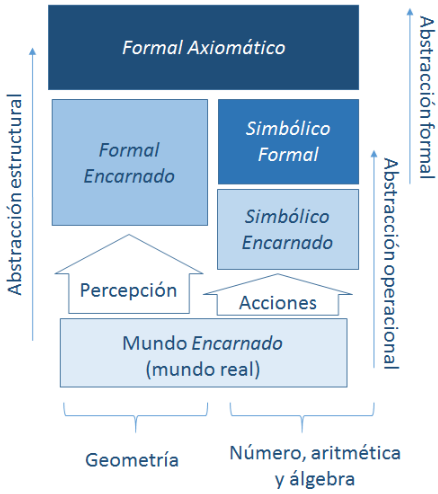

Figura 2. Desarrollo de los mundos de las matemáticas (Adaptado de Tall, 2013, pp. 6-8)

3.2 Conocimiento matemático informal y formal

Una de las ideas más presentes en la literatura, al referirnos a las matemáticas en los primeros años, es pensar en el conocimiento matemático como intuitivo e informal (Alsina, 2015). El *Principio de Aprendizaje* del NCTM afirma que los niños desarrollan ideas matemáticas de forma natural a través de sus experiencias cotidianas y los profesores deben aprovechar estos conocimientos para construir los contenidos matemáticos implícitos en ellos (NCTM, 2003, p. 22). Las conexiones entre contenidos matemáticos diferentes, entre distintos campos, incluso entre las matemáticas y la realidad, se apoyan en la relación entre experiencias informales y las matemáticas formales, y son las que dan sentido a estos conocimientos.

> La conexión más importante en los primeros aprendizajes matemáticos es la existente entre las matemáticas intuitivas, informales, que los niños han aprendido a través de sus experiencias, y las que están aprendiendo en la escuela (NCTM, 2003, p. 136).

Ginsburg y Baroody(2007)categorizan el conocimiento matemático en los primeros años en informal y formal. El *conocimiento matemático informal* se define como aquellas nociones y procedimientos adquiridos a partir de la intuición. Los niños más pequeños poseen algún tipo de sentido numérico que les permite elaborar un conocimiento matemático intuitivo, que favorece el desarrollo del conocimiento informal gracias a sus interacciones, observaciones y reflexiones de su experiencia en el entorno (Baroody, 1997). El conocimiento informal de Ginsburg y Baroody (2007) tiene una conexión evidente con el *mundo corpóreo* de Tall (2013) al basarse en la intuición del niño, y considerarse como el desarrollo de esa intuición a través de las interacciones, observaciones y reflexiones de su experiencia en el mundo real.

Inicialmente, los niños utilizan la percepción inmediata de cantidades pero después comienzan a utilizar instrumentos más complejos en situaciones numéricas, como el conteo; son capaces de etiquetar un conjunto con una palabra numérica según la cantidad de elementos que tiene. El conocimiento informal representa una gran elaboración de las matemáticas, pero tiene sus limitaciones prácticas, ya que los procedimientos informales pueden llegar a ser ineficientes (Baroody, 1997). Un ejemplo de esto ocurre en la aritmética, ya que los niños pueden resolver situaciones aritméticas con cantidades pequeñas con estrategias de modelización directa y conteo, pero al aumentar las cantidades, los números empiezan a tener varias cifras y representar cantidades muy grandes que serán difíciles de manejar mediante sus estrategias informales. Esta necesidad de pasar a una aritmética más formal no se da hasta la educación primaria, de modo que podríamos caracterizar como informal la mayor parte de los aprendizajes matemáticos de la educación infantil.

El *conocimiento matemático formal* son los conceptos y procedimientos que el niño aprende en la escuela. Destaca la simbología del lenguaje matemático, los hechos numéricos (2+2=4), los algoritmos, los agrupamientos para formar la decena, y las propiedades de las operaciones. La investigación indica que el conocimiento matemático de los niños se construye a partir del conocimiento informal (Ginsburg y Baroody, 2007). La matemática informal es el paso intermedio entre la matemática intuitiva, limitada e imprecisa, y la matemática formal, con sus símbolos, de la escuela primaria (Baroody, 1997).

3.3 La Educación Matemática Realista

En la *Educación Matemática Realista* (EMR) se utilizan situaciones del mundo real, o problemas contextualizados, como inicio del aprendizaje de las matemáticas, y se evoluciona a través del proceso de *matematización* para llegar a estructuras formales matemáticas (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Se apoya en modelos concretos que median entre lo concreto y lo abstracto. En la EMR es fundamental la *reinvención guiada,*o animar a los niños a reinventar las matemáticas guiados por el profesor,con la ayuda de diversos materiales, favoreciendo así el desarrollo de comprensión conceptual (Van Reeuwijf, 2001). Gradualmente, se debería dar la oportunidad a los niños de construir sus representaciones libremente y pasar de estrategias informales, intuitivas con representaciones concretas a estrategias más formales y abstractas de resolución con una enseñanza guiada, que permita una *matematización progresiva* (Freudenthal, 1991). El punto de partida son las situaciones significativas realistas, entendidas como aquellas que el niño puede imaginar (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

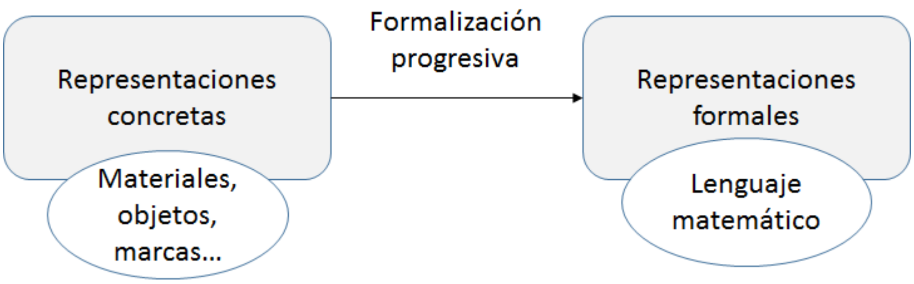

Figura 3. Formalización progresiva (Braithwaite y Goldstone, 2013)

El paso de las *representaciones fundamentadas* (*grounded*) a las representaciones formales ha sido denominado *formalización progresiva* (figura 3), que describe la instrucción basada en representaciones concretas, como representaciones perceptivas concretas o de contextos reales con objetos u otros materiales, para introducir conceptos que más tarde se tratarán con representaciones más formales que, en la realidad no tienen mucho significado, pero pertenecen a sistemas con reglas explícitas como pueden ser los números naturales (Braithwaite y Goldstone, 2013). Estos autores indican que una instrucción basada en ambas representaciones, empezando con las representaciones concretas y realizando una transición hacia representaciones formales, abandonando poco a poco las concretas, podría favorecer el aprendizaje con comprensión de los niños.

3.4 La matemática emergente

Otra propuesta teórica que suele aplicarse en los primeros años es la de la *matemática emergente* (Geist, 2009). En este modelo se plantea que los niños nacen con un dispositivo cerebral para el aprendizaje de las matemáticas (Butterworth, 1999) que les permite aprender matemáticas desde que nacen. Este aprendizaje combinaría el desarrollo cognitivo y la interacción con el entorno. Este modelo va desarrollándose según se publican estudios acerca del conocimiento matemático en bebés, e investigaciones relacionando el cerebro con el aprendizaje de las matemáticas(Dehaene, 1997).

Carruthers y Worthington (2008) tienen una línea de investigación y de trabajo en el aula, inspirada en estudios previos sobre *alfabetización emergente*, en la que abordan con los niños la representación numérica desde el primer ciclo de educación infantil (lo que no suele recomendarse en los documentos curriculares) y estimulan a los pequeños para que representen cantidades. Al principio, estas representaciones resultan muy complejas de interpretar para el adulto, pero estas autoras han encontrado que niños de 0 a 3 años desarrollan un tipo de “marcas dinámicas” que, si bien no sirven para comunicar cantidades eficientemente, sí muestran aspectos relacionados con la cantidad que el niño juzga relevantes.

También en trabajos de la Educación Matemática Realista (EMR) se utiliza el paralelismo entre *alfabetización emergente* y *matemática emergente.* Esta última consiste en el proceso gradual y espontáneo mediante el cual los niños van conectando elementos autónomos de conocimiento de modo natural. Los elementos de sentido numérico que los pequeños van conectando son: (1) reconocer “dos”, “tres” o “muchos” como propiedades de colecciones de objetos; (2) comenzar a recitar la secuencia numérica; (3) simbolizar números por medio de los dedos; y (4) Imitar el conteo de objetos (Buys, 2010).

3.5 Resumen

En la figura 4 presentamos un esquema resumen de las ideas teóricas esbozadas en este apartado. La parte inferior representa las matemáticas en educación infantil (0 a 6 años), caracterizadas por ser informales, emerger de prácticas en contextos de la vida cotidiana, y constituir la base, vía metáfora, de los primeros conceptos matemáticos. En especial, cuando hablamos de los pequeños de 0 a 3 años, estamos dentro de lo que en el aprendizaje por analogía se conoce como la etapa concreta (o el dominio fuente) (González, 1997). Es un momento en que aparecen las primeras metáforas, a través de la intervención del maestro (o la maestra), mediante el lenguaje, en situaciones de juego. Por ejemplo, cuando un niño mira en el patio un árbol nuevo, que se está cayendo y el maestro dice: “El árbol está torcido; se cae. Ese está recto”.

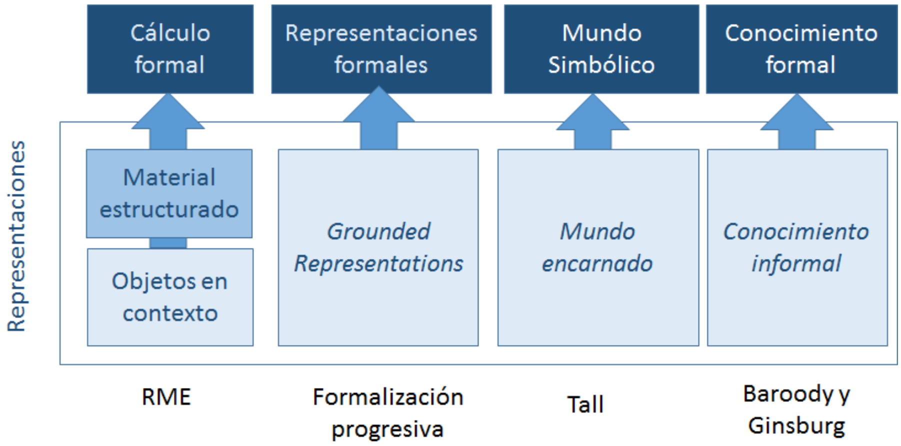

Figura 4. Las representaciones en los distintos trabajos previos comentados

4. PRACTICAS MATEMÁTICAS EN EL AULA DE DOS AÑOS

En este apartado vamos a describir varias prácticas matemáticas desarrolladas en el aula de 2-3 años de la Escuela Cigüeña María, de la localidad de Las Rozas (Madrid).

4.1 Contar cabezas y la notación de cantidades grandes

Cada mañana en el corro/asamblea contamos los niños que han venido a la escuela. Para ello, se elige a un encargado de contar “las cabezas” de los presentes. En primer lugar, el niño elegido pone su nombre en una pizarra, para que no se olvide que él es el encargado. Con la ayuda de la “varita de contar cabezas” comienza a contar, de izquierda a derecha y terminando en sí mismo. Al finalizar, anota la cantidad que ha contado. Dentro de esta práctica, tenemos en cuenta una serie de factores que explicamos a continuación.

Disposición de los niños en el corro. Los niños se sientan en forma de semicírculo o en forma de “U” (figura5) con el objetivo de que exista un principio y un fin evidente y así se facilite el orden a la hora de contar.

Terminar de contar en uno mismo. Los niños a estas edades tienen un pensamiento egocéntrico, motivo por el cual, terminar de contar en uno mismo indica que ya hemos incluido lo más importante y podemos dar por terminado el conteo. Podría ser el encargado el primero en contarse, pero consideramos que el acto de contar a los demás “pierde” cierta fuerza y quizás cierta motivación en el niño.

Figura 5. Disposición en forma de U y el momento de contar “cabezas”

Anotar la cantidad. Pretendemos que el niño vaya siendo consciente de que lo contado se puede representar para recurrir a ello con posterioridad. De hecho, el encargado debe decir al cocinero de la escuela cuantos niños hay ese día en clase para que prepare la comida. Como es de suponer, la cantidad no coincide con la realidad y el sistema de notación que utilizan los niños no es útil, pero van realizando ensayos acerca de cómo apuntar una cantidad. Como se puede observar en la figura 6, el niño dispone de diferentes sistemas de notación, que muestrancierta lógica, si nos paramos a analizarlos.

Figura 6. Diferentes sistemas de notación

En la figura 6 (izquierda) vemos como se intenta representar una cantidad a partir de la realización de una marca por cada niño que hay ese día. En la siguiente imagen, se sigue el mismo procedimiento aunque, en este caso, cuando la niña decidió terminar dijo: “ya no más, que faltan amigos”, de lo que deducimos que, si hubieran venido todos los niños, habría más marcas. Por último (a la derecha), observamos una notación totalmente distinta, aparentemente sin sentido, que representa el propio corro. El niño dibujó cómo estaban colocados sus compañeros, coincidiendo que había más en un lado que en otro. Este es un tipo de representación numérica que Carruthers y Worthinton (2008, p. 87) denominan “marcas pictográficas”. Al observar estas notaciones debemos tener en cuenta que el niño está trabajando con cantidades muy grandes (de hasta 20) lo que dificulta el manejo de éstas.

La forma en la que cuentan los niños varía a lo largo del año, al principio solo van tocando cada cabeza esperando que sea el adulto el que diga la palabra número (o no) y se suelen producir multitud de errores en cuanto al orden, sobre todo, dejando niños sin contar. Con el paso del tiempo, van respetando el orden y van asignando una etiqueta (palabra número) a cada niño, etiquetas que, evidentemente, son erróneas en muchos casos (y, en especial, a partir de 10), pero nuestro objetivo es que vayan ensayando a contar y vayan experimentando con cantidades.

4.2 Notación de cantidades pequeñas

Una forma de comprobar si el niño avanza en la representación de las cantidades y, al mismo tiempo, favorecer dicha representación es mediante la notación, ya que nos permite obtener un registro de los avances del niño en este aspecto. Para ello, realizamos una pequeña actividad que consiste en introducir una cantidad de fichas en tres cajas. En cada una de ellas, el niño introducirá un número de fichas diferente (uno, dos o tres), e irá apuntando la cantidad para poder acordarnos otro día de cuántas hay, sin tener que abrir la caja. Esta actividad se la planteamos al niño diciéndole que vamos a “estudiar”. Ellos lo entienden como que vamos a hacer algo de “mayores”, lo que les motiva, en gran medida, ya que sienten que están haciendo algo reservado a sus hermanos, primos de más edad o, incluso, a sus adultos de referencia.

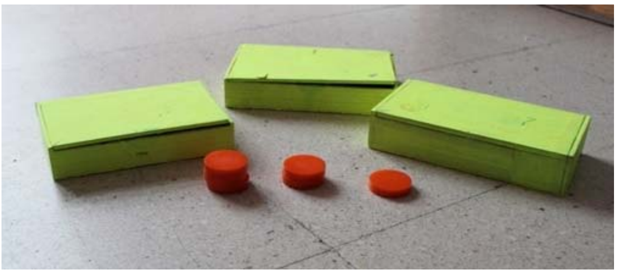

Figura 7. Los materiales de la actividad

Las cantidades que usamos son de hasta tres fichas, dentro del rango de la subitización perceptiva (reconocimiento inmediato de cantidades de hasta tres objetos sin necesidad de contar), con el fin de que sean cantidades manejables para el niño y al mismo tiempo facilite su notación. Esta pequeña prueba se realiza varias veces a lo largo del año para comprobar si su sistema de notación va variando con el tiempo.

Gracias al desarrollo cognitivo del niño y a las posibilidades de jugar con cantidades de las que dispone, se observa cómo va adquiriendo nuevos sistemas de notación más fiables (siempre con cantidades pequeñas) como se observa en la figura 8.

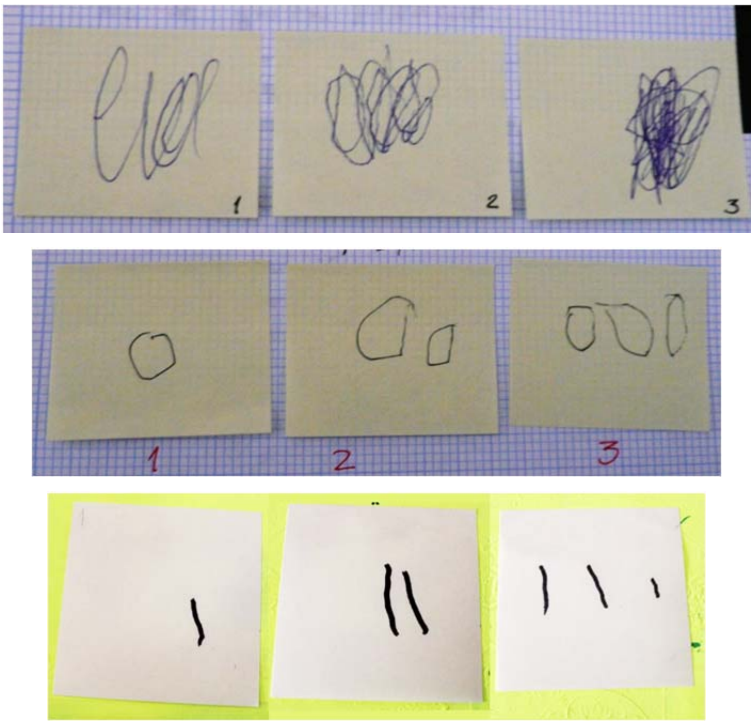

Figura 8. Evolución en el sistema de notación (muestreos 1, 2 y 3)

En la anterior figura se observa una clara evolución. En el primer muestreo el niño se limita a garabatear sin seguir una lógica aparente, lo que provoca que la notación resulte ineficaz, pues no está basada en la correspondencia uno a uno entre marcas y objetos, de modo que a cualquiera que vea dicha representación le resultará difícil de interpretar. Aun así, este tipo de representaciones suele tener un significado para el niño, que ha sido estudiado por Carruthers y Worthington (2008, p. 87), dándoles el nombre de “marcas dinámicas”. Por ejemplo, una posible interpretación podría ser que a mayor cantidad de fichas, la longitud/complejidad/duración del garabateo es mayor. En el segundo muestreo con el mismo niño y tras mes y medio, se observa que dibuja las fichas que ha introducido en cada caja, habiendo un parecido entre la representación, más o menos redonda, y la forma de las fichas, dándose una notación fiable para pequeñas cantidades. El último muestreo se observa un avance más, ya que no necesita dibujar el objeto y realiza una marca por cada objeto introducido.

Debemos tener en cuenta que los niños tenderán a meter todas las fichas en la primera caja, con lo que debemos limitarles para que haya un número diferente en cada una de las cajas.

Para comprobar si el sistema de notación es fiable para el propio niño, se le pide a la semana siguiente que nos diga cuantas fichas introdujo en cada caja. Normalmente no saben qué contestar y suelen dar una cantidad al azar, si acotamos un poco más en la pregunta ("¿cuántas fichas pusiste en esta caja, 1, 2 o 3?") dependiendo del niño, siguen diciendo una cantidad al azar o cuentan las marcas realizadas sin dominar el principio de cardinalidad. Es decir, dicen "hay una, dos y tres", sin advertir que tres es una palabra que representa ya los tres objetos, de modo que si preguntamos varias veces volverán a darnos la misma respuesta ("uno, dos y tres"). Es interesante señalar que, aunque no haya dominio del principio de cardinalidad, si les enseñamos los dedos y le preguntamos: "hay este, estos, o estos" (mostrándole sucesivamente uno, dos y tres dedos), es posible que sepan indicar cuántos hay. Lo que interpretamos a menudo como un error, o una carencia, es un paso necesario para llegar a la idea de cardinalidad.

Otra posibilidad es proporcionarle otras tres cajas y que vuelva a meter fichas atendiendo a la notación, de tal forma que tengamos dos cajas con la misma cantidad de fichas (dos cajas con 1 ficha, dos cajas con 2 y tres con tres fichas). Cuando se realiza esta última actividad, se observa que su mayor interés está en meter todas las fichas de las que disponen y pocos se guían por la notación realizada.

4.3 Trasvases: juego con capacidades

Jugar a trasvasar un contenido entre varios contenedores es algo que el niño realiza de forma natural con casi cualquier material. Un ejemplo muy claro es cuando un niño juega con un cubo y una pala en el jardín. El niño realiza sus primeras aproximaciones a la noción de capacidad con estos juegos, al mismo tiempo se puede aprovechar para introducir conceptos tales como lleno/vacío, mucho/poco/algo y fomentar las comparaciones: "este bote es más grande/pequeño/igual que… con lo que se puede poner más/menos/lo mismo que en el otro".En la escuela este tipo de juegos se realizan de forma frecuente con diferentes materiales. Podemos utilizar materiales discretos o continuos, permitiendo diferentes posibilidades de acción ya sea uno u otro material. En la figura 9 vemos a los pequeños experimentar en una mesa llena de cáscaras secas de mandarina divididas en trozos pequeños. El material para rellenar y trasvasar son las bellotas (material discreto) y disponemos de distintos tipos de recipientes, con distintas formas o tamaños (figura 9).

Figura 9. Trasvases con niños de 2 y 3 años

Dependiendo de la edad, los trasvases se abordarán de forma distinta. Para niños de 1 a 2 años (figura 9, con harina), se limitarán a meter y sacar el contenido entre los diferentes contenedores, dándose numerosas repeticiones de la misma acción. Con niños de 2 a 3 años (figura 9), tras un tiempo de exploración, ya existe una mayor intención a la hora de elegir los contenedores que puedan abarcar todo el material a contener y normalmente utilizan contenedores pequeños para recoger el material a trasvasar para llenar contenedores mayores. Al mismo tiempo se dan juegos de imitación, como el que comúnmente se conoce por hacer comidas.

4.4 Repartir

A la hora de comer aprovechamos para abordar conocimientos matemáticos con los niños. Antes de empezar a comer, nos preparamos repartiendo los utensilios necesarios: baberos, cucharas y platos. Cada día un niño se encarga de repartir. La única consigna que se le da es que reparta los baberos, cucharas y platos, pero en ningún momento se le dice de qué manera debe hacerlo. Dichos elementos se encuentran en un carro y es el niño el que decide la forma y el orden que quiere seguir. Dentro de las cucharas, el niño debe diferenciar entre las más grandes y las más pequeñas, y seleccionar solo las más grandes, que son las que debe repartir. En la figura 10 se puede observar como primero coge una cuchara de postre y al ver que no es la correcta, la deja y coge cucharas más grandes, asegurándose de que no se vuelve a equivocar.

Figura 10. Autocorrección a la hora de elegir cucharas

A la hora de repartir se observan principalmente tres estrategias: (1) Tomar un solo objeto (un plato) y asignárselo a un compañero (figura 11, izquierda); (2) Tomar varios objetos del mismo tipo (varias cucharas, figura 11, centro) y repartirlos; (3) Tomar todos los objetos del mismo tipo como, por ejemplo, llevar las cucharas en una cesta para repartirlas (figura 11, derecha). Estas estrategias para resolver un problema matemático difieren en eficiencia. La estrategia óptima consiste en llevar todas las cucharas, pues es la única que evita estar haciendo continuos viajes para conseguir más cucharas. Por otra parte, cuando se toman varias cucharas se pone en práctica un procedimiento inexacto de estimación, en el que pueden faltar cucharas o sobrar. Aunque no sea el procedimiento más sofisticado, conduce a la solución y contribuye al desarrollo del sentido numérico. Debemos señalar que las tres estrategias son válidas y esperamos que los niños evolucionen, a lo largo del curso, hacia un mayor grado de eficiencia en el desarrollo de estas tareas.

*Figura 11.*Estrategias a la hora de repartir

Durante el reparto, el adulto observa, sin intervenir, las distintas estrategias infantiles. Tampoco indica si a un niño le falta algún elemento. Normalmente, son los propios niños los que se quejan si les falta algo, o les han dado una cuchara demasiado pequeña, y piden al encargado de repartir que les proporcione lo que les falta o les cambie la cuchara. Así, la propia situación suele generar un entorno autocorrectivo en el que no es necesaria la intervención continua del maestro. También hay niños que, ante una situación así, no expresan ninguna queja. En ese caso, el adulto, al servir la comida, puede hacer comentarios del tipo: “Elena no puede comer, porque se va a manchar”, si le falta el babero, o “No puedo echar la comida a Elena”, si le falta el plato. Son formas de intervenir indirectas, en las que nose da la solución, sino que se plantea el problema, para que los niños lo aborden con el mayor grado de autonomía posible.

En muchas ocasiones se les olvida “repartirse” a ellos mismos y hasta que no se sientan y ven que no disponen de los elementos necesarios para comer, no acuden al carro nuevamente. En otras ocasiones ocurre justo lo contrario y dejan los útiles justo en el lugar donde se van a sentar para comer.

Mientras el adulto sirve la comida, podemos aprovechar para utilizar lenguaje matemático. En el caso de cantidades continuas, utilizaremos cuantificadores básicos, para que nos indiquen la cantidad de comida que quieren: “Cuánta sopa quieres, ¿mucha o poca?”. Si se trata de cantidades discretas, usamos la cuantificación definida o numeral: “¿Cuántas croquetas quieres?”. Si el niño pide tres, el adulto irá poniendo una por una, a la vez que va contando en voz alta, a fin de ofrecer un modelo de conteo.

Al terminar de comer, cada niño ha de guardar los utensilios de la comida en el carro, colocando los baberos en una bolsa (de color blanco), el vaso del yogurt vacío en otra (de color negro), y la cuchara en el cesto de las cucharas sucias, lo que constituye una actividad de clasificación.

5. REFLEXIONES FINALES: LAS PRÁCTICAS Y LAS TEORÍAS

Al examinar las prácticas revisadas en el apartado anterior, vemos que "contar cabezas" y "la notación de cantidades pequeñas", pertenecen al ámbito de lo que llamamos "matemática emergente", en el sentido que les dan Buys (2010) y Carruthers y Worthington (2008). Tanto en el conteo, como en la notación de cantidades, se realiza un trabajo dentro de un campo en que los niños intentan encajar piezas de un puzle que todavía no dominan: recitar palabras, señalar, hacer marcas… Todo se desarrolla dentro de un juego en que aparecen unos instrumentos muy valorados en nuestra cultura a los que los niños hacen su primer acercamiento.

En el extremo contrario, en los juegos de trasvases no existen marcas, símbolos, o palabras, que estén en lugar de otra cosa. Esta práctica está más cercana a una idea de potenciar experiencias de juegos con objetos, que vayan a dar lugar en el futuro a ideas importantes de las matemáticas vía metáfora. Las bellotas que se trasvasan pueden tratarse como si fueran cantidades continuas, si trasvasamos el contenido de un recipiente a otro "de golpe". Sin embargo, como vemos en la figura 9, a veces el niño trasvasa una única bellota con una cuchara. Aquí se encuentra cercano al proceso de *unitización* o de formación o constitución de unidades (Fuson, Clements y Beckman, 2009) que es básico para el conteo y el desarrollo de otros contenidos matemáticos.

Por último, los repartos de utensilios para comer se sitúan cómodamente dentro de los planteamientos de matemática informal, de la matemática realista, o de la matemática corpórea, pues como señala Tall (2013), y hemos visto en la figura 4, estos enfoques reposan sobre una serie de ideas afines.

Un elemento que une todas estas prácticas es la metodología del aula. Aquí sí parece haber un cierto consenso (o una aproximación a un consenso) hacia lo que Geist (2009) denomina el enfoque de las 3 E (Entorno, Experiencias, Educación), según el cual, en primer ciclo de infantil, la intervención de los maestros se realiza a través de la organización de un *entorno* en el cual los niños pueden construir todo tipo de relaciones a travésde la exploración, la interacción con los objetos, las comparaciones entre los mismos y el juego sensomotor, como ocurre en el juego heurístico (Edo, 2012). Posteriormente, se pasa a ofrecer *experiencias* abiertas, no dirigidas al aprendizaje de un contenido matemático dado, como el juego de construcción (De Castro y Quiles, 2014), o las bandejas de experimentación (Edo, 2012), para pasar al final de la educación infantil, y principio de la primaria, a un enfoque de *educación* (instrucción) donde predominan las actividades más centradas en contenidos matemáticos, lo que no implica necesariamente que predomine una matemática formal (Hernández, 2012). Dentro de estos trabajos, subyace la hipótesis de que es posible, desde el nacimiento, y en el aula de primer ciclo de educación infantil, estimular a niños y niñas para que desarrollen su pensamiento matemático. Esta visión aparece recogida recientemente en el trabajo de Alsina (2015).

En el aula de dos años, hemos observado prácticas procedentes de distintas tradiciones didácticas. El reparto de utensilios para comer, de clara inspiración piagetiana, descrito en libros clásicos como el de Kamii (1982), que ha influido en la formación de muchas maestras y maestros. El juego heurístico, con sus variantes como el cesto de otoño, y las bandejas de experimentación, son prácticas que tienen su origen en enfoques innovadores de la educación infantil (Goldschmied y Jackson, 2000), a las que con posterioridad se ha atribuido un papel importante de cara al aprendizaje de las matemáticas (Edo, 2012). También hemos visto ejemplos de notaciones numéricas en niños de dos años, inspiradas (o que, al menos, nos recuerdan) el enfoque de la matemática emergente (Carruthers y Worthington, 2008).

Los profesionales de primer ciclo de educación infantil van creando entornos y seleccionando experiencias con orígenes e influencias didácticas diversas, tratando de amalgamarlos dentro de una propuesta coherente que refleja una concepción, profundamente educativa, del ciclo de 0 a 3 años. Para acompañarles en este viaje, sentimos la necesidad de reflexionar continuamente sobre lo que hacemos como educadores, sobre nuestras propuestas, y sobre la actividad infantil que surge como respuesta a las mismas. Necesitamos teorías para interpretar lo que ocurre en el aula y para guiar nuestros pasos siguientes. Necesitamos herramientas para pensar, porque las preguntas que nos hacemos superan con mucho a nuestras respuestas, siempre provisionales. Esperamos que nuestra propuesta sirva a los lectores para seguir pensando con nosotros las matemáticas de 0 a 3 años, tratando de articular las teorías con las prácticas.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, Á. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Octaedro & Eumo.

Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años*. Madrid: Narcea S.A. de Ediciones.

Baroody, A.J. (1997). *El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial* (3ª ed.). Madrid: Visor.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: Macmillan.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. NewYork: Oxford University Press.

Braithwaite, D.W., & Goldstone, R.L. (2013). Integrating formal and grounded representations in combinatorics learning. *Journal of Educational Psychology, 105*(3), 666-682.

Buys, K. (2010). Años de preescolar. Numerización emergente. En M. Van de Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.), *Los niños aprenden matemáticas: Una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el* *cálculo con números naturales en la escuela primaria* (pp. 47-56). México: Correo del Maestro & La Vasija.

Carruthers, E. y Worthington, M. (2008). *Children's mathematics: Making marks, making meaning* (2nd ed.). London: Sage.

Castro, E., Cañadas, M.C. y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(2), 1-11.

Clements, D.H. (2004). Major themes and recommendations. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

De Castro, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Estudio exploratorio sobre el juego de construcción Infantil. *EA, Escuela Abierta, 14*, 47-65.

De Castro, C., y Quiles, O. (2014). Construcciones simétricas con 2 y 3 años: La actividad matemática emergente del juego infantil. *Aula de Infantil, 77*, 32-36.

Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. *Números, 80*, 71-84.

Fuson, K. C., Clements, D. H. y Beckman, S. (2009). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points.* Reston, VA/Washington, DC:NCTM& Naeyc.

Geist, E. (2009). *Children are born mathematicians: Supporting mathematical development, birth to age 8*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Ginsburg, H.P. y Baroody, A.J. (2007). *Test de Competencia Numérica Básica*. Madrid: TEA.

Goldschmied, E. y Jackson, S. (2007). *La educación infantil de 0 a 3 años*. Madrid: Morata.

González, M.J. (1997). *Aprendizaje por analogía*. Madrid: Trotta.

Hernández, E. (2012). El cohete: escritura de cardinales y ubicación en la cuadrícula con niños de 5 años. Edma 0-6: *Educación Matemática en la Infancia, 1*(2), 23-41.

Lago, M. O., Jiménez, L. y Rodríguez, P. (2003). El bebé y los números. En I.Enesco (Coord.), *El desarrollo del bebé: cognición, emoción y afectividad* (pp. 147-170). Madrid: Alianza.

Lago, M.O., Rodríguez, P., Escudero, A. y Dopico, C. (2012). ¿Hay algo más que contar sobre las habilidades numéricas de los bebés y los niños? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 38-53.

Lakoff, G. y Núñez, R.E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lee, S. (2012). La historia de Emma: Estudio de caso sobre el desarrollo de la resolución de problemas desde los 8meses a los 2 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(2), 64-71.

Kamii, C. (1982/1995). *El número en la educación preescolar* (4ª ed.). Madrid: Visor.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

National Research Council (2014a). Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas.*Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(1), 21-48.

National Research Council (2014b). Variaciones en el desarrollo, influencias socioculturales, y dificultades en elaprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(2), 1-22.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1966/2007). *Psicología del niño* (17ª ed.). Madrid: Morata.

Resnick, L. B. (1992): From protoquantities to operators: Building mathematicalcompetence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R.Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Tall, D. (2009). Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism. In F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, vol. 2, pp. 220-225. Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: an Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.

Van Reeuwijk, M. (2001). From informal to formal, progressive formalization: An example on solving systems of equations. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.),*The Future of the Teaching and Learning of Algebra,Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 2, pp. 613-620). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

****