CUADERNOS DE TRABAJO

FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Relaciones entre las medias estadísticas: demostraciones

Elena Castiñeira Holgado y Venancio Tomeo Perucha

Cuaderno de Trabajo número 04/2019

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Los Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos constituyen una apuesta por la publicación de los trabajos en curso y de los informes técnicos desarrollados desde la Facultad para servir de apoyo tanto a la docencia como a la investigación.

Los Cuadernos de Trabajo se pueden descargar de la página de la Biblioteca de la Facultad www.ucm.es/BUCM/est/, en la página del Repositorio Institucional UCM E-Prints Complutense y en la sección de investigación de la página del centro www.ucm.es/centros/webs/eest/

CONTACTO:

Biblioteca de la Facultad de Estudios Estadísticos

Universidad Complutense de Madrid

Av. Puerta de Hierro, S/N

28040 Madrid

Tlf. 913944035

buc_est@buc.ucm.es

ISSN: 2341-2550

Relaciones entre las medias estadísticas: demostraciones

Elena Castiñeira Holgado
Dpto. Matemática Aplicada
Escuela Superior de Ingenieros Informáticos, UPM
ecastineira@fi.upm.es

Venancio Tomeo Perucha
Dpto. Álgebra, Geometría y Topología
Facultad Estudios Estadísticos, UCM
tomeo@ucm.es

27 de noviembre de 2019

Resumen

Las relaciones entre las medias estadísticas se presentan en numerosos textos de Estadística descriptiva, como [5] y [6], aportando en general comprobaciones de ellas con datos concretos pero sin ninguna demostración rigurosa. En [3] se proponen demostraciones para el caso de dos datos positivos que pueden ser realizadas por alumnos de Enseñanza Secundaria.

En este trabajo se presentan demostraciones que pueden llamarse "elementales" a pesar de su complejidad, para el caso de N datos, siguiendo en parte razonamientos de [4], que pueden ser comprendidas completamente por alumnos de Secundaria y Bachillerato

A continuación se introduce el concepto de p-media y se dan demostraciones "superiores" de las relaciones entre ellas, siguiendo en parte razonamientos de [2]. En estas pruebas se utilizan las desigualdades de Cauchy-Schwarz, de Young y de Hölder, cuyas demostraciones aparecen al final por razones de unidad.

Palabras clave: *Medias estadísticas, relaciones entre medias estadísticas, la p-media, desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad de Hölder.*

Contenido

1. Las medias estadísticas

En Estadística se utilizan muchas medias, las cuatro más habituales, si se dispone de N datos x_1, x_2, ..., x_N, son las que a continuación se detallan.

La media aritmética

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{N}, \qquad \text{o bien} \qquad \overline{X} = \frac{\sum x_i n_i}{N},$$

si el dato x_i aparece n_i veces. Utilizaremos solo la primera de las fórmulas sin importarnos si hay repetición de datos, si la hay basta tenerlos en cuenta como si fuesen diferentes. La media aritmética *ponderada* de x_1, x_2, ..., x_N, con pesos positivos p_1, p_2, ..., p_N, se define por

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}.$$

La media geométrica

$$G = \sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N}.$$

La media cuadrática

$$C = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}{N}}.$$

La media armónica

$$H = \frac{N}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_N}} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{1}{H} = \frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_N}}{N}.$$

Estas cuatro medias verifican la relación

$$H \leq G \leq \overline{X} \leq C,$$

que es muy fácil recordar con la frase que se dice cuando los mozos de un pueblo han ganado al fútbol a los mozos del pueblo de al lado: *“Hemos Ganado Por Coraje”*.

Las relaciones anteriores pueden demostrarse con facilidad para el caso de dos datos positivos y distintos: a y b, tales que $a, b > 0$, $a \neq b$. Estas demostraciones consisten en buscar relaciones equivalentes a las que necesitamos, hasta llegar a una verdad evidente, de la misma manera que se hace en las demostraciones épsilon-delta de los límites y están desarrolladas en [3].

La media aritmética existe siempre y será positiva, negativa o cero dependiendo de los datos. La media cuadrática existe siempre para datos positivos, negativos o nulos y siempre es positiva. La media geométrica puede no existir cuando hay datos negativos, por ejemplo si hay cuatro datos y tres de ellos son negativos tendríamos la raíz cuarta de un número negativo. La media armónica existe si todos los datos son no nulos y la suma de sus inversos tampoco es nula.

En el apartado siguiente vamos a presentar demostraciones elementales de las tres desigualdades, para datos reales positivos, que numeramos del siguiente modo:

$$H \underset{(1)}{\leq} G \underset{(2)}{\leq} \overline{X} \underset{(3)}{\leq} C.$$

El orden de las demostraciones será (3), (2) y (1), debido a que para la demostración de la relación (1) nos apoyaremos en (2). De la desigualdad (2), que es la más conocida, daremos dos demostraciones, la primera es debida a Cauchy y se ha tomado de [4] y la otra se basa en un resultado de desigualdades muy difundido también.

Es difícil encontrar estas demostraciones en la literatura, pues existe una demostración global que prueba las tres desigualdades a la vez, que veremos como Teorema 1. Este resultado tiene importancia en sí y debería bastarnos si sólo se pretende conocer la veracidad de las desigualdades entre las cuatro medias. Sin embargo utiliza herramientas muy potentes (desigualdades de Cauchy-Schwarz, de Young y de Hölder), por ello, y sin olvidar la belleza que encierran demostraciones "simples" de hechos relativamente complejos, es interesante indagar otros mecanismos por lo que puedan aportar para otras pruebas o métodos de resolución y, también, porque contienen ideas que quedan ocultas cuando se demuestran en marcos más generales.

Por todo lo dicho, nos parece oportuno dar varias demostraciones del mismo resultado y así se presentarán en algunos casos en las páginas siguientes.

2. Demostraciones elementales de relaciones entre medias

2.1. Demostración de $\overline{X} \leq C$

Hemos de demostrar que

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}{N}} = C,$$

siendo x_1, x_2, ..., x_N, números reales positivos. Para ello restamos a cada dato la media cuadrática y elevamos al cuadrado, todos los cuadrados serán positivos y se tiene

$$0 \leq (x_i - C)^2 = x_i^2 - 2Cx_i + C^2, \quad \forall i = 1, 2, ..., N,$$

por tanto

$$\begin{array}{rcl} 2Cx_1 & \leq & x_1^2 + C^2 \\ 2Cx_2 & \leq & x_2^2 + C^2 \\ & \vdots & \\ 2Cx_N & \leq & x_N^2 + C^2. \end{array}$$

Sumando todas estas desigualdades resulta

$$2C(x_1 + x_2 + \cdots + x_N) \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2) + NC^2,$$

dividiendo en ambos miembros entre la media cuadrática, C, y escribiendo su valor, queda

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_N) &\leq \frac{\sqrt{N}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}} + N\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}{N}} \\ &= \sqrt{N}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2} + \sqrt{N}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2} \\ &= 2\sqrt{N}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}, \end{aligned}$$

finalmente, dividiendo por $2N$ se obtiene

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}{N}},$$

es decir, $\overline{X} \leq C$. $\square$

No hemos encontrado esta demostración en ningún libro. Una demostración más complicada, que utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz, puede verse en [4].

2.2. Demostración de $G \leq \overline{X}$: primer método

Se probará, en primer lugar, que la desigualdad $G \leq \overline{X}$ se cumple cuando el número de datos es $N = 2^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, esto es

$$\sqrt[2^n]{x_1 x_2 \cdots x_{2^n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^n}}{2^n}, \tag{2.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{2^n}$, datos, números reales positivos. Se demuestra por inducción sobre n :

Se prueba para $n = 1$, es decir, $N = 2^1$ datos positivos x_1, x_2. Se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = \frac{1}{4}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_2) \\ &= \frac{1}{4}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + x_1x_2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + x_1x_2. \end{aligned}$$

Puesto que el cuadrado $\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2$ nunca será negativo, resulta que $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$ vale lo mismo que x_1x_2 aumentado en una cantidad no negativa, es decir,

$$x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \tag{2.2}$$

y extreyendo la raíz cuadrada se tiene que la desigualdad es cierta para $n = 1$.

Se supone ahora que (2.1) es cierta para un número natural n fijo y se va a demostrar que entonces también es cierto para $n+1$. Sean $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{2^{n+1}}$, datos positivos. Como (2.1) es cierto para $N = 2^n$ datos, se cumple que

$$\sqrt[2^n]{x_1 x_2 \cdots x_{2^n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^n}}{2^n},$$

y también

$$\sqrt[2^n]{x_{2^n+1}x_{2^n+2}\cdots x_{2^n+2^n}} \leq \frac{x_{2^n+1}+x_{2^n+2}+\cdots+x_{2^n+2^n}}{2^n}.$$

Multiplicando miembro a miembro estas dos desigualdades y teniendo en cuenta que $2^n+2^n=2^{n+1}$, se tiene que

$$\sqrt[2^n]{x_1x_2\cdots x_{2^n}}\,\sqrt[2^n]{x_{2^n+1}x_{2^n+2}\cdots x_{2^{n+1}}} \leq$$

$$\leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^n}}{2^n}\cdot\frac{x_{2^n+1}+x_{2^n+2}+\cdots+x_{2^{n+1}}}{2^n}. \tag{2.3}$$

Llamando $X_1=x_1+x_2+\cdots+x_{2^n}$ y $X_2=x_{2^n+1}+x_{2^n+2}+\cdots+x_{2^{n+1}}$, de (2.2) se obtiene que

$$(x_1+x_2+\cdots+x_{2^n})(x_{2^n+1}+x_{2^n+2}+\cdots+x_{2^{n+1}})=X_1X_2\leq$$

$$\leq\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{n+1}}}{2}\right)^2$$

y llevando esto a (2.3), resulta

$$\sqrt[2^n]{x_1x_2\cdots x_{2^{n+1}}}\leq\frac{1}{(2^n)^2}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{n+1}}}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}\right)^2.$$

Tomando raíz cuadrada se tiene

$$\sqrt[2^{n+1}]{x_1x_2\cdots x_{2^{n+1}}}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}.$$

Luego se cumplen las condiciones de la inducción y se puede concluir que (2.1) es cierta $\forall n\in\mathbb{N}$, esto es, $G\leq\overline{X}$ para 2^n datos positivos, siendo $n\in\mathbb{N}$ cualquiera.

En el caso de que el número de datos N no sea potencia de 2, se añaden 2^n-N datos más, cada uno de ellos igual a la media aritmética $\overline{X}$ de los datos x_1, x_2, ..., x_N, así se tienen los siguientes 2^n datos:

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_N,\ x_{N+1}=\overline{X},\ x_{N+2}=\overline{X},\ ...,\ x_{2^n}=\overline{X},$$

entonces la media geométrica de estos 2^n datos es menor o igual que la media aritmética, es decir,

$$\sqrt[2^n]{x_1 x_2 \cdots x_N \cdot \overline{X} \cdot \overline{X} \cdots \overline{X}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N + \overline{X} + \overline{X} + \cdots + \overline{X}}{2^n},$$

elevando ambos miembros a la potencia 2^n resulta

$$x_1 x_2 \cdots x_N \cdot \overline{X} \cdot \overline{X} \cdots \overline{X} \leq \left[\frac{1}{2^n} \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_N + \overline{X} + \overline{X} + \cdots + \overline{X} \right) \right]^{2^n},$$

es decir

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \cdots x_N \cdot \left(\overline{X}\right)^{2^n - N} &\leq \left[\frac{1}{2^n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_N) + \frac{2^n - N}{2^n} \overline{X} \right]^{2^n} = \\ &= \left[\frac{1}{2^n} N \cdot \overline{X} + \frac{2^n - N}{2^n} \overline{X} \right]^{2^n} = \left[\frac{N + 2^n - N}{2^n} \overline{X} \right]^{2^n} = \left(\overline{X}\right)^{2^n}, \end{aligned}$$

dividiendo en ambos miembros entre $\left(\overline{X}\right)^{2^n - N}$ queda

$$x_1 x_2 \cdots x_N \leq \left(\overline{X}\right)^N$$

y extrayendo la raíz N-ésima en esta desigualdad se obtiene

$$\sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N} \leq \overline{X},$$

es decir, $G \leq \overline{X}$. □

2.3. Demostración de $G \leq \overline{X}$: segundo método

Utilizaremos el siguiente resultado cuya demostración se encuentra al final del trabajo por razones de unidad.

Lema de la desigualdad

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_N$ números reales positivos. Si $x_1 x_2 \cdots x_N = 1$ entonces se cumple

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N \geq N,$$

y además,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = N \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_N = 1.$$

Demostremos $G \leq \overline{X}$. A partir de la definición de media geométrica se tiene que

$$G = \sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N} \quad \Rightarrow \quad 1 = \sqrt[N]{\frac{x_1}{G}\frac{x_2}{G}\cdots\frac{x_N}{G}},$$

de donde se obtiene que

$$\frac{x_1}{G}\frac{x_2}{G}\cdots\frac{x_N}{G} = 1.$$

Aplicando ahora el Lema resulta que la suma de estos números es mayor o igual que N, es decir

$$\frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \cdots + \frac{x_N}{G} \geq N.$$

Multiplicando por G y dividiendo entre N en ambos miembros queda

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \geq G,$$

es decir $G \leq \overline{X}$. $\square$

2.4. Demostración de $H \leq G$

La demostración de que $H \leq G$ es trivial habiendo probado ya que $G \leq \overline{X}$.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_N$ números reales positivos, consideramos los números recíprocos $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_N}$, también positivos, y aplicando a ellos la relación $G \leq \overline{X}$ se tiene

$$\sqrt[N]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_N}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_N}}{N},$$

invirtiendo estas fracciones de términos positivos queda

$$H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_N}} \leq \frac{1}{\sqrt[N]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_N}}} = \sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N} = G.$$

$\square$

También se verifica al revés, a partir de $H \leq G$ se puede obtener $G \leq \overline{X}$, sin más que aplicar, de la misma manera, la primera desigualdad a los inversos de los números. Por tanto, estas desigualdades son equivalentes.

3. La p-media: M_p

Se define la p-media de N datos, $x_1, x_2, \ldots, x_N$, como la raíz p-ésima de la media aritmética de dichos datos elevados a la potencia p-ésima, por tanto, su definición es análoga a la de la media cuadrática cambiando el 2 del exponente e índice por el número real p, $p \neq 0$. Es decir,

$$M_p = \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^p}{N}} \qquad \text{o bien} \qquad M_p = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^p}{N} \right)^{1/p}.$$

Esta expresión tiene sentido para ciertos valores de p incluso considerando datos x_i negativos.

La p-media es una generalización de las medias conocidas, ya que para los valores $p = 1$, $p = 2$ y $p = -1$ resultan las medias anteriores:

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \overline{X}, \qquad M_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}} = C, \qquad M_{-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{-1}}{N} \right)^{-1} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}} = H.$$

Cuando los datos x_1, x_2, ..., x_N, son positivos y $p \to 0$ se obtiene la media geométrica como límite de las p-medias:

$$\lim_{p \to 0} M_p = \lim_{p \to 0} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^p}{N} \right)^{1/p} = G.$$

En efecto, sea $p > 0$, entonces el límite

$$\lim_{p \to 0^+} \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_N^p}{N} \right)^{1/p}$$

presenta una indeterminación de la forma $[1^\infty]$ que podemos calcular fácilmente. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0^+} M_p &= \lim_{p\to 0^+}\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_N^p}{N}\right)^{1/p} = [1^\infty] \\
&= \lim_{p\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{p}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^p}{N} - 1\right)\right) = \exp\frac{1}{N}\lim_{p\to 0^+}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i^p - 1)}{p} = \left[\frac{0}{0}\right],
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $N = \sum_{i=1}^N 1$, y como este límite es indeterminado de la forma $\left[\frac{0}{0}\right]$, aplicando la regla de L'Hôpital, queda

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0^+} M_p &= \exp\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lim_{p\to 0^+}\frac{x_i^p \ln x_i}{1} = \exp\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln x_i \\
&= \exp\frac{1}{N}\ln(x_1 x_2 \cdots x_N) = \exp\ln\sqrt[N]{\textstyle\prod_{i=1}^N x_i} = \sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N} = G.
\end{aligned}$$

Y si $p \to 0^-$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0^-} M_p &= \lim_{p\to 0^-}\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_N^p}{N}\right)^{1/p} = \lim_{p\to 0^-}\frac{1}{\left(\frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^{-p} + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{-p} + \cdots + \left(\frac{1}{x_N}\right)^{-p}}{N}\right)^{-1/p}} \\
&= \lim_{p\to 0^+}\frac{1}{\left(\frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^{p} + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{p} + \cdots + \left(\frac{1}{x_N}\right)^{p}}{N}\right)^{1/p}} = \frac{1}{\sqrt[N]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_N}}} = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_N}.
\end{aligned}$$

□

Para $p = 3$ y $p = 4$ se tienen la media cúbica y la media cuártica:

$$M_3 = \sqrt[3]{\frac{\sum x_i^3}{N}}, \qquad M_4 = \sqrt[4]{\frac{\sum x_i^4}{N}}.$$

Para $p = \frac{3}{2}$ y $p = -2$ las medias

$$M_{3/2} = \left(\frac{\sum x_i^{3/2}}{N}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\frac{\sum \sqrt{x_i^3}}{N}\right)^2} \quad \text{y} \quad M_{-2} = \left(\frac{\sum x_i^{-2}}{N}\right)^{\frac{1}{-2}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum \frac{1}{x_i^2}}}.$$

4. Relación entre p-medias

4.1. Relación entre la p-media y la $2p$-media

Se ha visto que la media aritmética $\overline{X}$ es menor o igual que la media cuadrática C, es decir, $M_1 \leq M_2$. Es razonable preguntarse si en general, con $p > 0$, será $M_p \leq M_{2p}$. La siguiente proposición responde afirmativamente a esta cuestión.

Proposición *Sean N datos positivos $x_1, x_2, \ldots, x_N$, y $p > 0$, se verifica que $M_p \leq M_{2p}$.*

Demostración

Utilizaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz que nos garantiza que

$$\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} b_i^2}$$

para cualesquiera a_i, b_i, números reales para $i = 1, 2, ..., N$. Eligiendo

$$\begin{aligned} a_i &= x_i^p \\ b_i &= 1, \quad i = 1, 2, ..., N, \end{aligned}$$

resulta

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^p \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^{2p}} \cdot \sqrt{N} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{2p}}{N}} \cdot N.$$

Dividiendo por N en ambos miembros y elevando a $1/p$, resulta

$$M_p = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^p}{N} \right)^{1/p} \leq \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{2p}}{N}} \right)^{1/p} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{2p}}{N} \right)^{1/2p} = M_{2p}.$$

$\square$

4.2. Relación entre las medias M_r y M_s

La siguiente cuestión es si la relación dada en la Proposición puede generalizarse a dos medias M_r y M_s, lo que se trata en el siguiente teorema.

En la demostración del teorema se utiliza un resultado previo que incluimos como Lema previo.

Lema previo *Para cualesquiera* a_1, a_2, ..., a_N, b_1, b_2, ..., b_N, *números reales no negativos y* $\alpha \in (0,1)$, *se cumple la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i^{\alpha} b_i^{1-\alpha} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{N} b_i\right)^{1-\alpha}. \tag{4.1}$$

Demostración

Para probar este resultado utilizaremos la desigualdad de Hölder, que afirma que si $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{N} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{N} b_i^q\right)^{1/q} \tag{4.2}$$

para cualesquiera $a_1, a_2, ..., a_N, b_1, b_2, ..., b_N$, números reales no negativos.

Llamando $\alpha = \dfrac{1}{p}$ se tiene $\dfrac{1}{q} = 1-\alpha$ y entonces $a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}, ..., a_N^{\alpha}, b_1^{1-\alpha}, b_2^{1-\alpha}, ..., b_N^{1-\alpha}$, son números no negativos que cumplen la desigualdad de Hölder (4.2). Luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} a_i^{\alpha} b_i^{1-\alpha} &\leq \left(\sum_{i=1}^{N} (a_i^{\alpha})^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{N} (b_i^{1-\alpha})^q\right)^{1/q} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{N} b_i\right)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1 *Sean N datos positivos, $x_1, x_2, ..., x_N$, y sean M_r y M_s las medias correspondientes, con $r, s > 0$. Se verifica que*

$$r \leq s \quad \Rightarrow \quad M_r \leq M_s.$$

Demostración

Si $r = s$, obviamente $M_r = M_s$ y se cumple la tesis del teorema.

Sea $r < s$. Aplicamos el Lema previo a $a_i = x_i^s$ y $b_i = 1$, con $i = 1, 2, ..., N$, entonces

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i^s)^\alpha \cdot 1^{1-\alpha} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^s\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{N} 1\right)^{1-\alpha},$$

y para $\alpha = \dfrac{r}{s} \in (0, 1)$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^r \leq \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^s\right)^{r/s} \cdot N^{1-r/s} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^s}{N}\right)^{r/s} \cdot N,$$

dividiendo ambos miembros entre N y elevando a $1/r$, resulta

$$M_r = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^r}{N}\right)^{1/r} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^s}{N}\right)^{1/s} = M_s.$$

□

4.3. Relación entre p-medias ponderadas

En lo anterior hemos supuesto que los datos positivos, repetidos o no, tenían el mismo peso. Si se dispone de los datos $x_1, x_2, ..., x_N$, con pesos $p_1, p_2, ..., p_N$, además de la media aritmética ponderada, que utilizamos habitualmente, todas las demás medias pueden ser consideradas también ponderadas, así, en general la p-media ponderada se define por

$$M_p = \left(\frac{x_1^p p_1 + x_2^p p_2 + \cdots + x_N^p p_N}{p_1 + p_2 + \cdots + p_N}\right)^{1/p}$$

y verifica un teorema análogo al ya visto, que enunciamos y demostramos a continuación.

Teorema 2 *Sean N datos positivos, $x_1, x_2, ..., x_N$, con pesos positivos $p_1, p_2, ..., p_N$, y sean $r, s > 0$, entonces las correspondientes medias ponderadas, M_r y M_s, verifican que*

$$r \leq s \quad \Rightarrow \quad M_r \leq M_s.$$

DEMOSTRACIÓN

Aplicando el Lema previo a $a_i = x_i^s p_i$ y $b_i = p_i$, con $i = 1, 2, ..., N$, entonces

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i^s p_i)^\alpha \cdot p_i^{1-\alpha} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^s p_i \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \right)^{1-\alpha},$$

y para $\alpha = \dfrac{r}{s} \in (0, 1)$ se tendrá que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} x_i^r p_i &= \sum_{i=1}^{N} (x_i^{s\alpha} p_i^\alpha) p_i^{1-\alpha} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^s p_i \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \right)^{1-\alpha} \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^s p_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i} \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^s p_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i} \right)^{r/s} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \right). \end{aligned}$$

Finalmente, dividiendo ambos miembros entre $\sum_{i=1}^{N} p_i$ y elevando a $1/r$, resultará

$$M_r = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^r p_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i} \right)^{1/r} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^s p_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i} \right)^{1/s} = M_s.$$

□

El Teorema 2 se verifica también para todos los números reales r, s no nulos, sin exigir que sean positivos, pero la demostración excede el nivel de este trabajo.

5. Desigualdades utilizadas

5.1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Dados $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \, |b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Demostración

Para cualquier número real λ se tiene que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i\lambda + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\lambda^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

es decir, el polinomio anterior en λ es no negativo para todo valor de λ, luego no tiene raíces reales o tiene una única raíz real doble. En consecuencia, su discriminante debe ser menor o igual que cero, es decir

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0,$$

de donde

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

y extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros queda

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}. \tag{5.1}$$

En particular esta desigualdad se cumple para $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|, |b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n|$, luego

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}. \qquad \square$$

La demostración aparece en casi todos los libros de Álgebra lineal y también en muchos de Cálculo infinitesimal, por ejemplo en [7]. En el espacio euclídeo real n-dimensional, la desigualdad de Cauchy-Schwarz en su versión (5.1) equivale a decir que dados los vectores $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $(b_1, b_2, ..., b_n)$ el valor absoluto de su producto escalar es menor o igual que el producto de sus normas, es decir

$$\left|\langle \overline{a}, \overline{b}\rangle\right| \leq \|\overline{a}\| \left\|\overline{b}\right\|.$$

5.2. Desigualdad de Young

Sean a, b, p, q *números reales tales* $a \geq 0$, $b \geq 0$, p *o* q *es mayor que 1 y* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *entonces se verifica que*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \cdot \tag{5.2}$$

Demostración

La función exponencial $f(x) = e^x$ verifica que $f''(x) = e^x > 0$ para todo x real, por lo que es convexa en toda la recta real. Es decir, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y para cualesquiera $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, tales que $\alpha + \beta = 1$, se verifica que

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y),$$

es decir

$$e^{\alpha x + \beta y} \leq \alpha e^x + \beta e^y. \tag{5.3}$$

Si es $a = 0$, o bien $b = 0$, la desigualdad de Young (5.2) se verifica trivialmente. Si son $a > 0$ y $b > 0$, llamando

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}, \quad x = p \ln a, \quad y = q \ln b,$$

el primer miembro de (5.3) es

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = ab,$$

y el segundo miembro es

$$\frac{1}{p} e^{p \ln a} + \frac{1}{q} e^{q \ln b} = \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

lo que demuestra la desigualdad del enunciado. $\square$

5.3. Desigualdad de Hölder

Sean $a_i, b_i \geq 0$ *números reales con* $i = 1, 2, ..., n$*, entonces se verifica que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q},$$

para todos $p > 1$*,* $q > 1$*, tales que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

DEMOSTRACIÓN

Llamemos para abreviar

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p}, \qquad B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}.$$

Si es $A = 0$ o bien $B = 0$, la desigualdad se verifica trivialmente. Si son $A > 0$ y $B > 0$, utilizando la desigualdad de Young para $a = \dfrac{a_i}{A}$ y $b = \dfrac{b_i}{B}$, para todo $i = 1, 2, ..., n$, y sumando en i, queda

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A} \frac{b_i}{B} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i}{B} \right)^q = \frac{1}{pA^p} \sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{qB^q} \sum_{i=1}^{n} b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

multiplicando en ambos miembros de la desigualdad por AB

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq AB,$$

lo que demuestra la desigualdad. $\square$

Las desigualdades de Young y de Hölder se encuentran demostradas en [1], páginas 395 y 396. La desigualdad de Cauchy-Schwarz es un caso particular de esta última para $p = q = 2$.

5.4. Lema de la desigualdad

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_N$ *números reales positivos. Si* $x_1 x_2 \cdots x_N = 1$ *entonces se cumple*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N \geq N,$$

y además,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = N \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_N = 1.$$

Demostración

Para demostrar el Lema se utilizará inducción matemática sobre $N \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Para $N = 2$ se debe probar que, si x_1 y x_2 son números reales positivos tales que $x_1 x_2 = 1$, entonces $x_1 + x_2 \geq 2$ y, además, que $x_1 + x_2 = 2$ si sólo si $x_1 = x_2 = 1$.

De las hipótesis se sigue que ambos números no pueden ser mayores que 1 estrictamente. Para fijar ideas supongamos que $x_1 \leq 1$, luego $x_2 = \dfrac{1}{x_1} \geq 1$.

De la identidad

$$x_1 + x_2 = 1 + x_1 x_2 + (1 - x_1)(x_2 - 1), \tag{5.4}$$

que se verifica para cualesquiera números reales, y de $x_1 x_2 = 1$, se obtiene

$$x_1 + x_2 = 2 + (1 - x_1)(x_2 - 1) \tag{5.5}$$

además, por ser $x_1 \leq 1$ y $x_2 \geq 1$ se tiene $(1 - x_1)(x_2 - 1) \geq 0$ y, por tanto,

$$x_1 + x_2 \geq 2.$$

De (5.5) se sigue que

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - x_1)(x_2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1 \ \text{ ó } \ x_2 = 1,$$

ahora bien, si uno de estos números es 1, por ser su producto igual a 1, el otro también debe ser 1. Luego

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = 1.$$

Por tanto, queda probado el Lema para $N = 2$.

Supongamos que el Lema se verifica para $N = k$.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ números reales positivos tales que $x_1 x_2 \cdots x_{k+1} = 1$. Dado que no puede suceder que los $k+1$ números dados sean mayores estrictamente que 1, existirá $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ tal que $x_i \leq 1$. Entonces también existirá $j \in \{1, 2, \ldots, k+1\} \setminus \{i\}$ tal que $x_j \geq 1$, pues si todos salvo x_i fueran menores estrictamente que 1 se tendrá que $x_1 x_2 \cdots x_{k+1} < 1$, en contra de la hipótesis.

Para facilitar la escritura, se renombran los números dados como $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ siendo $y_k = x_i$ e $y_{k+1} = x_j$. Aplicando la hipótesis de inducción a los k números positivos $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, (y_k y_{k+1})$, se tiene

$$y_1 + y_2, \cdots + y_{k-1} + (y_k y_{k+1}) \geq k.$$

De la identidad (5.4) para y_k e y_{k+1} se tiene

$$y_k y_{k+1} = y_k + y_{k+1} - 1 - (1 - y_k)(y_{k+1} - 1)$$

y, sustituyendo en la inecuación anterior, resulta

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + [y_k + y_{k+1} - 1 - (1 - y_k)(y_{k+1} - 1)] \geq k,$$

luego

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k + y_{k+1} \geq k + 1 + (1 - y_k)(y_{k+1} - 1). \tag{5.6}$$

Teniendo en cuenta que $(1 - y_k)(y_{k+1} - 1) \geq 0$ se obtiene

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{k+1} \geq k + 1.$$

Además, si $y_1 + y_2 + \cdots + y_{k+1} = k + 1$, sustituyendo en (5.6), resulta

$$k + 1 \geq k + 1 + (1 - y_k)(y_{k+1} - 1),$$

de donde $(1 - y_k)(y_{k+1} - 1) \leq 0$.

Como además se verifica $(1 - y_k)(y_{k+1} - 1) \geq 0$, entonces $(1 - y_k)(y_{k+1} - 1) = 0$. Luego $y_k = 1$ ó $y_{k+1} = 1$.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que se verifica $y_{k+1} = 1$. Así se tiene:

$$\begin{aligned} y_1 y_2 \cdots y_k &= y_1 y_2 \cdots y_k y_{k+1} = 1 \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_k &= k + 1 - y_{k+1} = k \end{aligned}$$

y se puede aplicar la hipótesis de inducción obteniendo $y_1 = y_2 = \cdots = y_k = 1$. Por tanto, si $y_1 + y_2 + \cdots + y_{k+1} = k + 1$ entonces $y_1 = y_2 = \cdots = y_{k+1} = 1$. El recíproco es obvio.

Finalmente, volviendo a la notación inicial, se ha obtenido

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} \geq k + 1$$

y además

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} = k + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1.$$

En conclusión, se ha probado que se cumple el Lema para $N = 2$ y que, si se cumple para $N = k$, entonces se cumple para $N = k + 1$. Luego, por el principio de inducción matemática, el Lema se cumple para todo $N \in \mathbb{N}$. $\square$

Bibliografía

[1] R. Courant, F. John, *Introducción al Cálculo y al Análisis matemático* Vol. 2. Ed. Limusa. México, 1978.

[2] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities* Cambridge University Press. Cambridge, 1952.

[3] A. Pajares, V. Tomeo, *Las medias estadísticas: ejercicios motivadores* Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos, Universidad Complutense de Madrid, CT 05-2014. Madrid, 2014.

[4] H. Rademacher, O. Toeplitz, *Números y figuras* Ed. Alianza. Madrid, 1970.

[5] M.R. Spiegel, *Teoría y problemas de Estadística* Ed. MacGraw-Hill, serie S'chaum. México, 1970.

[6] V. Tomeo, I. Uña, *Estadística descriptiva* Ed. Garceta. Madrid, 2009.

[7] I. Uña, J. San Martín, V. Tomeo, *Cálculo en varias variables* Ed. Garceta. Madrid, 2010.

Cuadernos de Trabajo
Facultad de Estudios Estadísticos

CT03/2019 **Introducción a MAPLE. Versión 18**
Juan Julián Ávila Tejera

CT02/2019 **Breve historia del cálculo integral. Cálculo integral elemental**
Juan Julián Ávila Tejera

CT01/2019 **Matrices y polinomios ortogonales**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT03/2018 **Las matemáticas en el cine**
Gloria Cabrera Gómez

CT02/2018 **Brecha madre-padre en el uso de las medidas de conciliación y su efecto sobre las carreras profesionales de las madres**
José Andrés Fernández Cornejo y Lorenzo Escot (Coordinadores)
Autores: José Andrés Fernández Cornejo, Lorenzo Escot, Eva María del Pozo, Sabina Belope Nguema, Cristina Castellanos Serrano, Miryam Martínez, Ana Bernabeu, Lorenzo Fernández Franco, Juan Ignacio Cáceres, María Ángeles Medina Sánchez

CT01/2018 **El campo de valores de una matriz y su aplicación a los polinomios ortogonales**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT02/2015 **Prospectiva del proceso electoral a Rector de la Universidad Complutense 2015. Resultados del sondeo de intención de voto en primera y segunda vuelta**
Lorenzo Escot Mangas, Eduardo Ortega Castelló, Lorenzo Fernández Franco y Kenedy Alba (Coordinadores)

CT01/2015 **The polemic but often decisive contribution of computer science to linguistic and statistical research on translation accuracy and efficiency**
Antonio Ñíguez Bernal

CT05/2014 **Las medidas estadísticas: ejercicios motivadores**
Almudena Pajares García y Venancio Tomeo Perucha

CT04/2014 **Jugando con la estadística (y la probabilidad)**
Gloria Cabrera Gómez

CT03/2014 **Análisis Estadístico de las Consultas a la Base de Datos de Ayudas e Incentivos a Empresas de la Dirección General de Industria y de la PYME.**
Adolfo Coello de Portugal Muñoz, Juana María Alonso Revenga

CT02/2014 **Values of games with weighted graphs**
E. González-Arangüena, C. Manuel; M. del Pozo

CT01/2014 **Estimación de la tasa de retorno de la carta del censa de los Estados Unidos a través del modelo de regresión lineal y técnicas de predicción inteligentes.**
José Luis Jiménez-Moro y Javier Portela García Miguel

CT03/2013 **Provisión de siniestros de incapacidad temporal utilizando análisis de supervivencia.**
Ana Crespo Palacios y Magdalena Ferrán Aranaz

CT02/2013 **Consumer need for touch and Multichannel Purchasing Behaviour.**
R. Manzano, M. Ferrán y D. Gavilán

CT01/2013 **Un método gráfico de comparación de series históricas en el mercado bursátil.**
Magdalena Ferrán Aranaz

CT03/2012 **Calculando la matriz de covarianzas con la estructura de una red Bayesiana Gaussiana**
Miguel A. Gómez Villegas y Rosario Susi

CT02/2012 **What's new and useful about chaos in economic science.**
Andrés Fernández Díaz, Lorenzo Escot and Pilar Grau-Carles

CT01/2012 **A social capital index**
Enrique González-Arangüena, Anna Khmelnitskaya, Conrado Manuel, Mónica del Pozo

CT04/2011 **La metodología del haz de rectas para la comparación de series temporales.**
Magdalena Ferrán Aranaz

CT03/2011 **Game Theory and Centrality in Directed Social Networks**
Mónica del Pozo, Conrado Manuel, Enrique González-Arangüena y Guillermo Owen.

CT02/2011 **Sondeo de intención de voto en las elecciones a Rector de la Universidad Complutense de Madrid 2011**
L.Escot, E. Ortega Castelló y L. Fernández Franco (coords)

CT01/2011 **Juegos y Experimentos Didácticos de Estadística y Probabilidad**
G. Cabrera Gómez y Mª.J. Pons Bordería

CT04/2010 **Medio siglo de estadísticas en el sector de la construcción residencial**
M. Ferrán Aranaz

CT03/2010 **Sensitivity to hyperprior parameters in Gaussian Bayesian networks.**
M.A. Gómez-Villegas, P. Main, H. Navarro y R. Susi

CT02/2010 **Las políticas de conciliación de la vida familiar y laboral desde la perspectiva del empleador. Problemas y ventajas para la empresa.**
R. Albert, L. Escot, J.A. Fernández Cornejo y M.T. Palomo

CT01/2010 **Propiedades exóticas de los determinantes**
Venancio Tomeo Perucha

CT05/2009 **La predisposición de las estudiantes universitarias de la Comunidad de Madrid a auto-limitarse profesionalmente en el futuro por razones de conciliación**
R. Albert, L. Escot y J.A. Fernández Cornejo

CT04/2009 **A Probabilistic Position Value**
A. Ghintran, E. González–Arangüena y C. Manuel

CT03/2009 **Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores**
A. Pajares García y V. Tomeo Perucha

CT02/2009 **La disposición entre los hombres españoles a tomarse el permiso por nacimiento. ¿Influyen en ello las estrategias de conciliación de las empresas?**
L. Escot, J.A. Fernández-Cornejo, C. Lafuente y C. Poza

CT01/2009 **Perturbing the structure in Gaussian Bayesian networks**
R. Susi, H. Navarro, P. Main y M.A. Gómez-Villegas

CT09/2008 **Un experimento de campo para analizar la discriminación contra la mujer en los procesos de selección de personal**
L. Escot, J.A. Fernández Cornejo, R. Albert y M.O. Samam

CT08/2008 **Laboratorio de Programación. Manual de Mooshak para el alumno**
D. I. de Basilio y Vildósola, M. González Cuñado y C. Pareja Flores

CT07/2008 **Factores de protección y riesgo de infidelidad en la banca comercial**
J. Mª Santiago Merino

CT06/2008 **Multinationals and foreign direct investment: Main theoretical strands and empirical effects**
María C. Latorre

CT05/2008 **On the Asymptotic Distribution of Cook's distance in Logistic Regression Models**
Nirian Martín y and Leandro Pardo

CT04/2008 **La innovación tecnológica desde el marco del capital intelectual**
Miriam Delgado Verde, José Emilio Navas López, Gregorio Martín de Castro y Pedro López Sáez

CT03/2008 **Análisis del comportamiento de los indecisos en procesos electorales: propuesta de investigación funcional predictivo-normativa**
J. Mª Santiago Merino

CT02/2008 **Inaccurate parameters in Gaussian Bayesian networks**
Miguel A. Gómez-Villegas, Paloma Main and Rosario Susi

CT01/2008 **A Value for Directed Communication Situations.**
E. González–Arangüena, C. Manuel, D. Gómez, R. van den B

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID