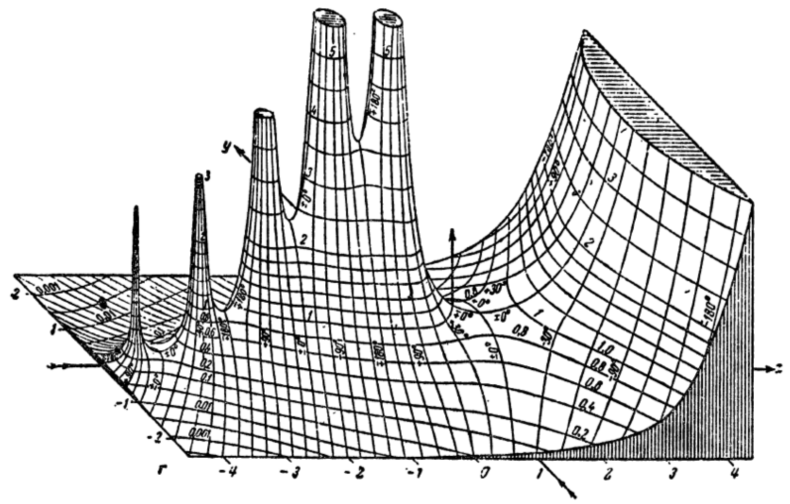
Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas

Trabajo Académicamente Dirigido:

Introducción al Cálculo Fraccionario



A hand-drawn graph of the absolute value of the complex gamma function, from "Tables of Higher Functions" published in 1909 by Jahnke and Emde

Raquel Lezaún Azañedo

Dirigido por los Profesores Antonio López Montes y José Manuel Vegas Montaner

Julio 2008

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO FRACCIONARIO.

La idea de generalizar la noción de derivada para extenderla a valores no enteros surge con el nacimiento del propio cálculo diferencial. Son muchas las propuestas formuladas para dicha generalización pero ninguna de ellas es universalmente aceptada.

Curiosamente, en el caso de la integral fraccionaria la situación es mucho más clara. La integral n-ésima de una función puede expresarse de la siguiente forma, utilizando la conocida *fórmula integral de Cauchy*:

$$I_{a+}^{n} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 .... \int_a^{x_{n-1}} f(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

Esta expresión se generaliza con facilidad al caso de un orden fraccionario como:

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Una observación importante es que, ya desde el principio, van a aparecer algunas funciones que van a jugar un papel fundamental en el cálculo fraccionario. La primera de ellas es la función $\Gamma(x)$ que viene a extender la noción de factorial. Posteriormente aparecerán las funciones Beta y de Mittag-Leffler.

Antes de introducirnos en el cálculo fraccionario parece conveniente estudiar estas funciones.

1.1.- Funciones importantes en el cálculo fraccionario.

1.1.1.- Función Gamma, $\Gamma(x)$

1.1.1.1.- INTRODUCCIÓN:

El problema de otorgar a $x!$ un significado útil cuando x es cualquier número complejo no negativo y distinto de cero fue resuelto por Euler[1] (1707-1783) en su correspondencia de octubre de 1729 con Goldbach (1690-1764).

En 1814 Legendre (1752-1833) propuso su nombre, Función Gamma, y su representación mediante la letra Γ.

La función $\Gamma(x)$ fue introducida inicialmente en forma infinitesimal como el límite de una expresión discreta:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x n! \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x}{x\cdot(1+x)\cdot(1+\frac{x}{2})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{x}{n})}$$

Más tarde se obtuvieron expresiones integrales, la primera de ellas deducida ya por el mismo Euler [2].

Es importante notar que la función $\Gamma(x)$ definida en forma infinitesimal puede ser extendida analíticamente al plano complejo excepto para valores enteros negativos y cero. Estos serán los polos la función $\Gamma(x)$ que jugarán un papel muy relevante en el cálculo fraccionario.

---

[1] Euler utiliza esta función en el estudio de la suma de series numéricas.

[2] Es por este motivo que a esta función y a la función Beta se las conoce como integrales eulerianas.

1.1.1.2.- REPRESENTACIÓN INTEGRAL:

La expresión *integral* de la función Gamma, válida únicamente en el intervalo $(0,+\infty)$, es la conocida Integral Euleriana:

$$\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R},$$

$$x\mapsto\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

1.1.1.3.- PROPIEDADES:

Desarrollaremos a continuación las principales propiedades de $\Gamma(x)$:

P1.- Recursividad de $\Gamma(x)$: Para todo $x>0$ se tiene que:

$$\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$$ [3]

→ Corolario: El resultado anterior puede generalizarse de la forma siguiente:

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)\cdot(x+n-2)\cdot\ldots\cdot(x+1)\cdot x\cdot\Gamma(x),\ \text{para}\ x>0,\quad n=1,2\ldots$$

P2.- Fórmula del Factorial Generalizado: De los resultados anteriores obtenemos:

$$\Gamma(n+1)=n!,\ \forall n\in\mathbb{N}$$ [4]

P3.- Derivada: Derivando la expresión integral de Euler se tiene:

$$\Gamma'(x)=\frac{d\Gamma(x)}{dx}=\int_0^\infty\frac{dt^{x-1}}{dx}\cdot e^{-t}dt=\int_0^\infty t^{x-1}(\log t)e^{-t}dt$$

---

[3] *Demostración: Integrando por partes,*

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt=\left(\frac{e^{-t}\cdot t^x}{x}\right)\Bigg|_0^\infty+\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}t^x dt=0+\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

[4] *Cuando n es muy grande podemos aplicar la Fórmula de Stirling* $\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{n!}=1\right\}$ *para aproximar el valor de n!:* $\Gamma(n+1)=n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$

Así, para las Derivadas Sucesivas tenemos que:

$$\Gamma^{n)}(x)=\frac{d^n\Gamma(x)}{dx^n}=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n\,dt.$$

P4.- La Identidad de Weierstrass:

La identidad de Weierstrass afirma:

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=e^{\gamma x}x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{\frac{-x}{n}}$$

→ *Demostración*:

Partiendo de la expresión:

$$n^x=e^{x.Ln(n)}=e^{x\left(Ln(x)-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)\right)}.e^{x\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)}$$

y llamando:

$$\gamma_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-Ln(n);\qquad \gamma=\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-Ln(n)\right)$$

donde γ es la Constante de Euler [5], podemos escribir:

$$n^x=e^{x.Ln(n)}=e^{-\gamma_n.x}.e^{x\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)}$$

Entonces, partiendo de la expresión infinitesimal de la función $\Gamma(x)$:

$$\Gamma_n(x)=\frac{n^x n!}{x\cdot(x+1)\cdot...\cdot(x+n-1)\cdot(x+n)}=\frac{n^x}{x\cdot(1+x)\cdot(1+\frac{x}{2})\cdot...\cdot(1+\frac{x}{n})}=$$

[5] *El valor de la constante de Euler, también denominada en ocasiones constante de Mascheroni, es:*

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln n\right)=0'57721566...$$

$$= e^{-\gamma_n . x} \frac{e^{x\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)}}{x \cdot (1+x) \cdot (1+\frac{x}{2}) \cdot ... \cdot (1+\frac{x}{n})} = e^{-\gamma_n . x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{e^x}{1+x} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+\frac{x}{2}} \cdot ... \cdot \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}};$$

Pasando al límite se obtiene:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x) = e^{-\gamma . x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

Llegando así a la denominada <u>Identidad de Weierstrass</u>:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x.e^{\gamma . x}.\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right).e^{\frac{-x}{n}}$$

P5.- Fórmula del Complemento o la Reflexión de Euler:

La Fórmula de Reflexión de Euler proporciona una relación concisa entre la Función Gamma de números positivos y negativos, y tiene la forma siguiente:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sen(\pi x)}$$

→ *<u>Demostración</u>:*

Partiendo de la Identidad de Weierstrass podemos escribir:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{1}{\Gamma(-x)} = -x^2 \cdot e^{\gamma . x} \cdot e^{-\gamma . x} \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right) \cdot e^{-\frac{x}{n}} \cdot e^{\frac{x}{n}}\right] =$$

$$= -x^2 \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right] = -x^2 \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right].$$

Ahora, por la propiedad de Recursividad de la función $\Gamma\left(x\right)$,

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \Rightarrow \quad \Gamma(-x+1) = -x \cdot \Gamma(-x) \quad \Rightarrow \quad \Gamma(-x) = \frac{\Gamma(1-x)}{-x}$$

Así, al tener en cuenta adicionalmente que $sen(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$ y sustituir estas expresiones en:

$$\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{\Gamma(-x)} = -x^2\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right],$$

se obtiene finalmente la Fórmula del complemento o la reflexión de Euler:

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sen(\pi x)}.$$

De esta expresión se desprende el hecho de que la función Gamma debe alternar su signo entre polos (como veremos claramente dos secciones más adelante, en el apartado de representaciones gráficas) pues el producto en esta fórmula de $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)$ contiene un número impar de factores negativos si el número de polos entre x y $x+n$ es negativo, y un número positivo si el número de polos es positivo.

Cabe destacar que, tomando $x=\frac{1}{2}$, al ser $\Gamma(x)$ positiva cuando x es positiva se obtiene $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi,$ con lo que es $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

1.1.1.4.- EJEMPLOS:

Veamos, entre otros, una manera alternativa de calcular $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

I) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac{-1}{2}}\cdot e^{-t}\cdot dt = \{$ Haciendo el cambio de variables $t=u^2, dt=2udu$ $\}$

$$= \int_0^\infty u^{-1}\cdot e^{-u^2}\cdot 2udu = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi},\ \left\{pues\ \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, a>0\right\}$$

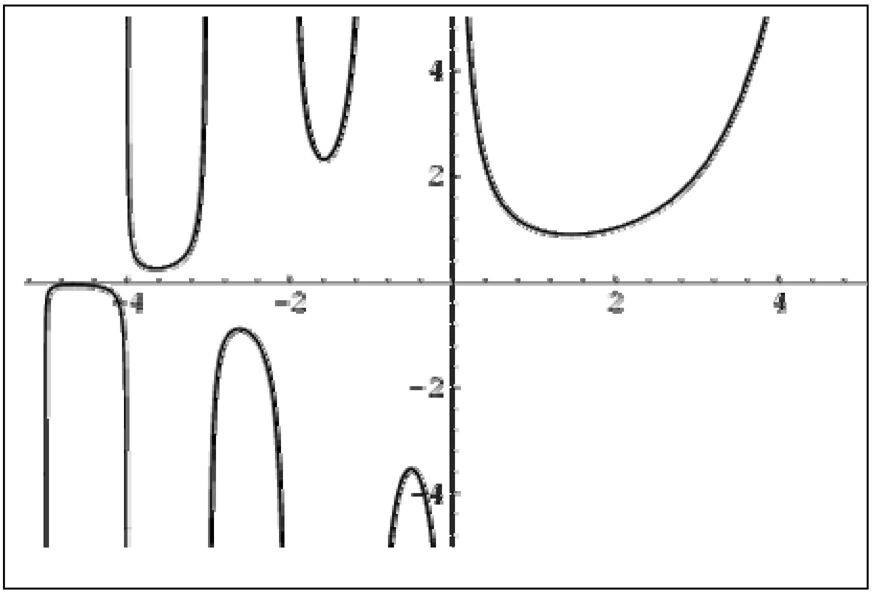
II) $\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

III) $\Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2}+1) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

IV) $\Gamma(-\frac{1}{2})$: $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2}) = \Gamma(-\frac{1}{2}+1) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2}) \Rightarrow \Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ [6]

1.1.1.5. GRÁFICAS DE LA FUNCIÓN GAMMA $\Gamma(x)$:

La función $\Gamma(x)$ es una función continua para valores de $x > 0$, mientras que presenta asíntotas verticales para valores enteros negativos. Esto puede observarse claramente en la siguiente representación gráfica:

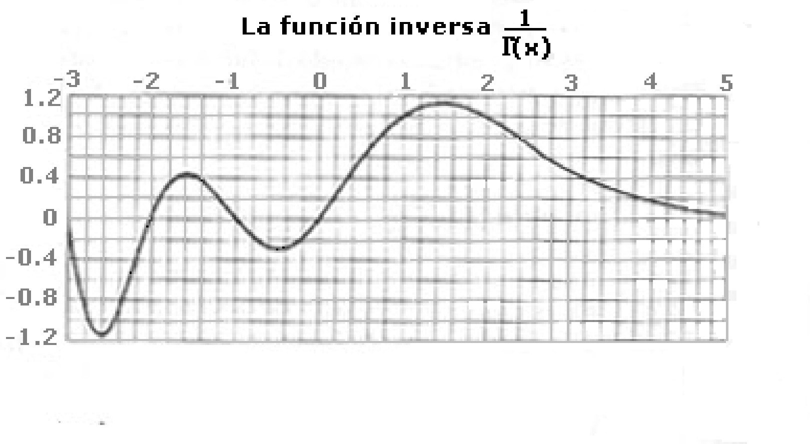


Representación Gráfica de la Función $\Gamma(x)$

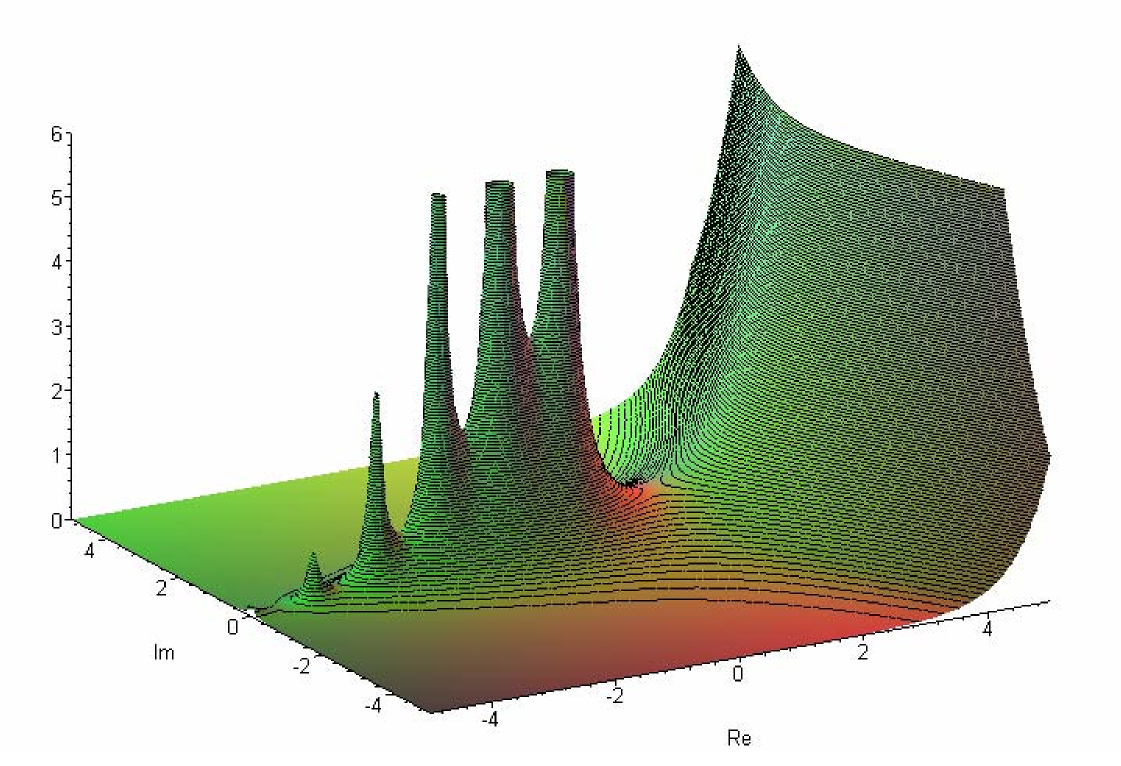
---

[6] Nótese que para calcular $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ en el ejemplo IV se ha considerado que se mantiene la propiedad de recursividad para $\Gamma(x)$ con $x < 0$. De hecho dicha propiedad se extiende al plano complejo.

Análogamente podemos representar la función $\frac{1}{\Gamma(x)}$, continua para todo valor de x:

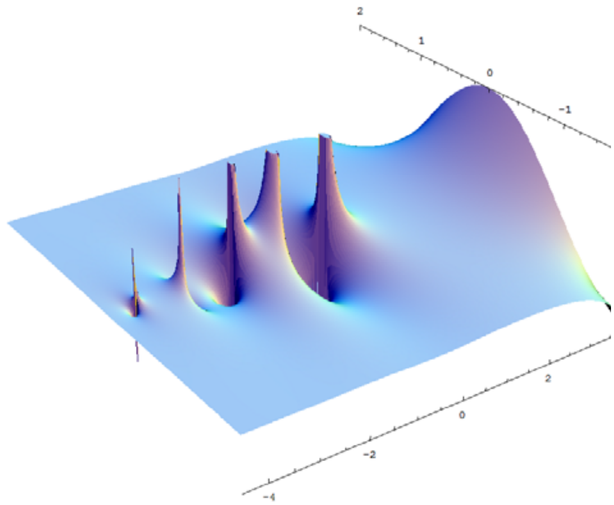


A continuación representamos el valor absoluto de $\Gamma(z)$ sobre el plano complejo.

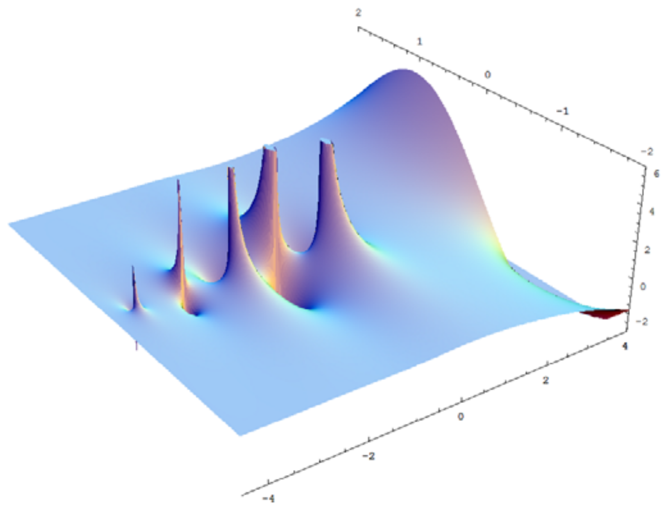


Para finalizar, se muestran las gráficas de la parte real e imaginaria de la función Gamma en el plano complejo:

Re(x)



Im(x)



1.1.1.6. EQUIVALENCIA ENTRE LA EXPRESIÓN INTEGRAL Y DEL LÍMITE:

Obtengamos, desde la integral de Euler, la expresión de la función gamma como el límite del cociente anteriormente indicado.

Teniendo en cuenta que

$$e^{t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n},$$

al sustituir esta igualdad en la expresión integral de Euler,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} t^{x-1} dt$$

y haciendo el cambio de variables

$$h = \frac{t}{n} \quad \Rightarrow \quad dh = \frac{dt}{n} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 0 \Rightarrow h = 0 \\ t = \infty \Rightarrow h = 1 \quad (n \to \infty) \end{cases}$$

se tiene:

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(1-h\right)^n\left(n\cdot h\right)^{x-1}\cdot n\cdot dh=\lim_{n\to\infty}n^x\int_0^1\left(1-h\right)^n h^{x-1}dh=\begin{cases}u=\left(1-h\right)^n; & du=-n\cdot(1-h)^{n-1}dh\\ dv=h^{x-1}dh; & v=h^x/x\end{cases}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^x\left[\left(1-h\right)^n\frac{h^x}{x}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{h^x}{x}\cdot n\cdot\left(1-h\right)^{n-1}dh\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^x\left[\frac{n}{x}\int_0^1 h^x\cdot\left(1-h\right)^{n-1}dh\right]=\begin{cases}u=\left(1-h\right)^{n-1}; & du=-\left(n-1\right)\cdot(1-h)^{n-2}dh\\ dv=h^x dh; & v=h^{x+1}/x+1\end{cases}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^x\cdot\frac{n}{x}\left[\left(1-h\right)^{n-1}\frac{h^{x+1}}{x+1}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{h^{x+1}}{x+1}\cdot\left(n-1\right)\cdot\left(1-h\right)^{n-2}dh\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^x\cdot\frac{n}{x}\left[\frac{\left(n-1\right)}{x+1}\int_0^1 h^{x+1}\cdot\left(1-h\right)^{n-2}dh\right]=\ldots=\lim_{n\to\infty}n^x\cdot\frac{n}{x}\cdot\frac{n-1}{x+1}\cdot\frac{n-2}{x+2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{x+n-1}\cdot\frac{1}{x+n}$$

Con lo cual se llega a:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x\cdot\left(x+1\right)\cdot\left(x+2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x+n-1\right)\cdot\left(x+n\right)}$$

1.1.1.7. OTRAS REPRESENTACIONES INTEGRALES DE LA FUNCIÓN $\Gamma(x)$:

Otras representaciones integrales de la función Gamma son las siguientes:

***** Expresión integral de Cauchy-Saalschütz: Se trata de una representación para los $k\in\mathbb{N}$ tales que $\mathrm{Re}(x)<0$ y $-(k+1)<\mathrm{Re}(x)<-k,\ k=0,1,\ldots$:

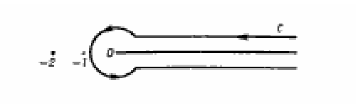
$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\left(e^{-t}-\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\cdot\frac{t^j}{j!}\right)dt$$

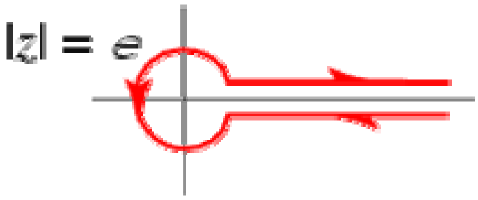
Esta identidad proporciona una representación de la función gamma en franjas verticales para los $k\in\mathbb{N}$ tales que $\mathrm{Re}(x)<0$ y $-(k+1)<\mathrm{Re}(x)<-k$, valores para los cuales, según la expresión integral de Euler, esta integral no estaría definida.

* <u>Expresión integral de Hankel</u>: La función gamma satisface la representación integral de Hankel en el plano complejo $\mathbb{C}-\left[\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}\right]$:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\int_C t^{z-1}\cdot e^{-t}dt$$

donde el contorno C está representado en las figuras siguientes:





Es decir, el camino de integración C comienza en $\infty+i0$ en el eje real, se dirige hacia $\varepsilon+i0$, rodea el origen en el sentido contrario de las agujas del reloj con radio ε hacia el punto $\varepsilon-i0$ y vuelve al punto $\infty-i0$.

Se puede ver de la representación de Hankel que $\Gamma(z)$ es una función meromorfa, que en los puntos $z_n=-n,\ \ n=0,1,\ldots$ tiene polos simples con residuos $\frac{(-1)^n}{n!}$.

1.1.1.8. LOS RESIDUOS DE LA FUNCIÓN GAMMA

Como acabamos de comentar, el residuo de $\Gamma(z)$ en los polos z_n de la función, $z_n=-n,\ \ n=0,1,2,\ldots$ es $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Para comprobarlo, basta multiplicar por $(z+n)$ en ambos miembros de la *Fórmula del Complemento de Euler*:

$$(z+n)\cdot\Gamma(z)=\frac{\pi(z+n)}{\sin\pi(z+n)}\cdot\frac{(-1)^n}{\Gamma(1-z)}$$

Y evaluando el miembro derecho en $z=-n$ obtenemos el residuo buscado, $\frac{(-1)^n}{n!}$.

1.1.2.- <u>Función Beta</u>, β(x, y)

1.1.2.1.- INTRODUCCIÓN:

La función Beta fue estudiada e introducida por Euler y Legendre pero su nombre le fue dado por Jacques Binet.

La función Beta se define mediante la siguiente integral:

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\quad x,y>0\,.$$

1.1.2.2.- PROPIEDADES:

P1.- La función $\beta(x,y)$ converge para $x>0, y>0.$

P2.- Se verifica $\forall x,y>0,\ \beta(x,y)=\beta(y,x)$.

P3.- Para x>0, y>0 se tiene que:

$$\beta(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^{2x-1}(\cos(t))^{2y-1}dt\,.$$

→ *<u>Demostración</u>:* Haciendo el cambio de variables:

$t=\sin^2(u);\quad dt=2\sin(u)\cos(u)du,$ se tiene:

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2(u))^{x-1}(1-sen^2(u))^{y-1}\cdot 2\sin(u)\cos(u)du=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^{2x-1}(\cos(t))^{2y-1}dt$$

P4.- Para x>0, y>0 se tiene:

$$\beta(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt\,.$$

→ *<u>Demostración</u>:* Haciendo el cambio de variables:

$$t=\frac{u}{1+u};\quad dt=\frac{du}{(1+u)^2}$$

se tiene:

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_0^\infty\left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1}\left(\frac{du}{(1+u)^2}\right)=\int_0^\infty\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du.$$

1.1.2.3.- RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES $\Gamma(m)$ y $\beta(m,n)$:

Para $m>0,\ n>0$ se tiene:

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

→ *Demostración*:

Escribiendo la expresión integral de $\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)$ como una integral doble:

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)=\left(\int_0^\infty e^{-x}x^{m-1}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y}y^{n-1}dy\right)=\left(\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}x^{m-1}y^{n-1}dxdy\right)$$

hacemos el cambio de variables: $t=x+y,\ s=x\Rightarrow ds=dx,\ t=s+y,\ dt=dy,$ y tenemos:

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}s^{m-1}(t-s)^{n-1}dsdt=\int_0^\infty e^{-t}\int_0^\infty s^{m-1}(t-s)^{n-1}dsdt$$

Volviendo a hacer otro cambio de variables, $s=t\cdot u,\ ds=t\cdot du$ obtenemos:

$$\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-t}\int_0^\infty(t\cdot u)^{m-1}t^{n-1}(1-u)^{n-1}t\cdot du\cdot dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{m+n-1}\underbrace{\int_0^\infty u^{m-1}(1-u)^{n-1}du}_{\beta(m,n)}\cdot dt=$$

$$=\left(\int_0^\infty e^{-t}t^{m+n-1}dt\right)\cdot\beta(m,n)=\Gamma(m+n)\cdot\beta(m,n)$$

Llegando de esta forma a la expresión buscada:

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

1.1.3.- La Función de Mittag-Leffler.

La función de Mittag-Leffler va a suponer una extensión del concepto de función exponencial.

1.1.3.1.- DEFINICIÓN: La Función de Mittag-Leffler es una función compleja que depende de dos parámetros complejos, α y β, y viene definida mediante la siguiente serie:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ si\quad \mathrm{Re}(\alpha)>0.$$

En este caso la serie converge para todos los valores del argumento z, por lo que la Función de Mittag-Leffler es una función Entera.

1.1.3.2.- Casos particulares de la función de Mittag-Leffler:

a) Función Exponencial: $E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z$

b) Suma de una Progresión Geométrica: $E_{0,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1)}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k=\frac{1}{1-z}$

c) Coseno Hiperbólico: $E_{2,1}(z)=\cosh(\sqrt{z})$

d) Función Error: $E_{\frac{1}{2},1}(z)=\exp(z^2)\cdot erfc(-z)$

1.2.- Primeras Ideas del Cálculo Fraccionario.

En 1695 L'Hôpital preguntó a Leibnitz, padre del cálculo diferencial, qué sentido se le podría atribuir a una derivada de orden $\frac{1}{2}$, a lo que Leibnitz respondió de modo intuitivo: "Esta aparente paradoja permitirá en el futuro extraer interesantes conclusiones".

Este planteamiento inicial de derivada de orden fraccionario hizo que originalmente se le asignara el nombre de *Cálculo Fraccionario*, pero más tarde se ampliaría el alcance de la pregunta anterior: ¿Puede ser n un número cualquiera, fraccionario, irracional o complejo?". Sabiendo que la respuesta es afirmativa, el actual término de "*Cálculo Fraccionario" resulta impropio y deberíamos sustituirlo por el de "Integración y Diferenciación de Orden Arbitrario"*, pero el nombre *Fraccionario* es el que finalmente ha sido utilizado para denotar este concepto.

Así, el Cálculo Fraccionario es la rama del Cálculo que generaliza las derivadas e integrales de una función en un orden no entero, permitiendo, por ejemplo, el cálculo de la derivada $\frac{1}{2}$ de una función.

La primera referencia en un texto a una derivada de orden arbitrario aparece en un libro del matemático francés Lacroix de 1819, en el que dedicó a este tema dos páginas de las 700 que lo constituyen. Lacroix aplicó este concepto a la derivada de un polinomio procediendo a determinar la derivada n-ésima de $y = ax^m$.

De acuerdo a la definición usual de derivada,

$$\frac{d^n}{dx^n}(ax^m) = \frac{m!}{(m-n)!}ax^{m-n}, \ \forall m,n \in \mathbb{N}, \quad m \geq n,$$

y utilizando la función Gamma para generalizar los factoriales obtuvo la siguiente fórmula:

$$\frac{d^n}{dx^n}(ax^m)=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}ax^{m-n}$$

donde $m+1,\ \ y\ \ m-n+1$ pueden ser cualquier número donde Gamma esté definida (o se pueda definir mediante límites).

1.2.1.- EJEMPLOS:

Sustituyendo n por ½ y suponiendo $x>0$ se obtiene:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}(ax^m)=\frac{\Gamma\left(m+1\right)}{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}+1\right)}ax^{m-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma\left(m+1\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}ax^{m-\frac{1}{2}}.$$

Así, en el caso particular de la derivada ½ de $y=x$ queda $(a=m=1)$:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(x)=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}x^{1-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\sqrt{x}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$ (7)

→ <u>Observación</u>: Si repetimos el proceso y volvemos a calcular la derivada ½ de esta expresión, obtenemos:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}})=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2})=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)}x^0=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1.$$

lo cual es realmente el resultado esperado.

→ **Otros ejemplos** serían los siguientes:

a) Derivada ½ de $y=x^2$:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(x^2)=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)}x^{2-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2\Gamma(2)}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}\sqrt{x^3}=\frac{8\sqrt{x^3}}{3\sqrt{\pi}}.$$

---

(7) *Posteriormente, y utilizando otra definición de derivada fraccionaria, veremos que obtenemos esta misma expresión.*

b) Derivada $\frac{1}{2}$ de una constante, $y = c$ (nótese que **la derivada fraccionaria de una constante es *distinta de cero***):

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(c) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)} c \cdot x^{0-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} c \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}}.$$

1.3.- Integral Fraccionaria:

La idea que nos va a permitir empezar a desarrollar el Cálculo Fraccionario comienza por considerar el concepto de integral fraccionaria. Previamente hemos de introducir la *Fórmula de Cauchy para la Integral Iterada*, que tomaremos como punto de partida, y que reduce la integral de orden entero n de una función real a una única integral de convolución [(8)].

1.3.1.- Fórmula de Cauchy para la Integral Iterada

1.3.1.1.- NOTACIÓN. Comenzamos introduciendo la notación $I_{a+}^{1} f(x)$ para la primera integral de la función f, es decir:

$$I_{a+}^{1} f(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un número real fijo [(9)].

[(8)] *Una **Convolución** es un operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen f y una versión trasladada e invertida de g.*

La convolución de f y g se denota $f * g$, y se define como la integral del producto de ambas funciones después de que una sea invertida y desplazada una distancia τ:

$$(f * g)(t) = \int f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

El rango de integración dependerá del dominio sobre el que estén definidas las funciones.

[(9)] *El signo + que aparecen en $I_{a+}^{1} f(x)$ significa que la integral debe evaluarse desde el punto a en adelante.*

Repitiendo este proceso obtenemos la forma de la segunda integral:

$$I_{a+}^{2} f(x)=\int_{a}^{x}\left(I_{a+}^{1} f(t)\right) dt=\int_{a}^{x}\left(\int_{a}^{t} f(s) ds\right) dt=\int_{a}^{x} dt \int_{a}^{t} f(s) ds=\int_{a}^{x} dx_{1} \int_{a}^{x_{1}} f(t) dt.$$

Así, y análogamente, las integrales sucesivas se denotarán por $I_{a+}^{n} f(x)$ y tendrán la forma siguiente:

$$I_{a+}^{n} f(x)=\int_{a}^{x} dx_{1} \int_{a}^{x_{1}} dx_{2} \int_{a}^{x_{2}} dx_{3} \ldots . \int_{a}^{x_{n-1}} f(t) dt.$$

1.3.1.2.- LA FÓRMULA DE CAUCHY PARA LA INTEGRAL ITERADA: La Fórmula de Cauchy para la Integral Iterada es la siguiente:

$$\int_{a}^{x} dx_{1} \int_{a}^{x_{1}} dx_{2} \ldots . \int_{a}^{x_{n-1}} f(t) dt=\frac{1}{\Gamma(n)} \int_{a}^{x}(x-t)^{n-1} f(t) dt$$

Esta fórmula nos permite llevar a cabo la integral anteriormente desarrollada en un solo paso, de forma que podemos definir de manera natural:

$$I_{a+}^{n} f(x)=\frac{1}{\Gamma(n)} \int_{a}^{x}(x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

1.3.1.3.- DEMOSTRACIÓN (de la Fórmula de Cauchy para la Integral Iterada): Lo probaremos por inducción:

$$\int_{a}^{x} dx_{1} \int_{a}^{x_{1}} dx_{2} \ldots . \int_{a}^{x_{n-1}} f(t) dt=\frac{1}{\Gamma(n)} \int_{a}^{x}(x-t)^{n-1} f(t) dt$$

▪ Para $n=1$ se tiene:

$$\frac{1}{\Gamma(1)} \int_{a}^{x}(x-t)^{0} f(t) dt=\frac{1}{0!} \int_{a}^{x} f(t) dt=\int_{a}^{x} f(t) dt=I_{a+}^{1} f(x).$$

▪ Para $n=2$ tenemos que probar:

$$\int_{a}^{x} dx_{1} \int_{a}^{x_{1}} f(t) dt=\frac{1}{\Gamma(2)} \int_{a}^{x}(x-t) f(t) dt.$$

Resolvemos la integral del primer miembro de la igualdad "por partes", de manera que:

$$\int_a^x \underbrace{dx_1}_{\substack{\parallel \\ dv}} \underbrace{\int_a^{x_1} f(t)\,dt}_{\substack{\parallel \\ u}} \overset{(A)}{=} x_1 \int_a^{x_1} f(t)\,dt\Big|_a^x - \int_a^x x_1 f(x_1)dx_1 \underset{\substack{\downarrow \\ x_1=t}}{=} x\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x t.f(t)dt =$$

$$= \int_a^x (x-t) f(t)dt = 1.\int_a^x (x-t) f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_a^x (x-t) f(t)dt = I_{a+}^2 f(x).$$

$$(A):\begin{cases} u = \int_a^{x_1} f(t)dt \Rightarrow du = f(x_1)dx_1 \\ dv = dx_1 \Rightarrow v = x_1 \end{cases}$$

■ Suponemos cierto el resultado para n:

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 .... \int_a^{x_{n-1}} f(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \tag{1.1}$$

y lo probamos para $n+1$:

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 .... \int_a^{x_n} f(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt.$$

$$\Rightarrow \int_a^x dx_1 \underbrace{\int_a^{x_1} dx_2 .... \int_a^{x_n} f(t)\,dt}_{\substack{\parallel \\ (1.1)}} = \int_a^x dx_1 \left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^{x_1} (x_1-t)^{n-1} f(t)\,dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} (x_1-t)^{n-1} f(t)\,dt \right) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{(x_1-t)^n}{n} f(t)\,dt \right) \overset{(B)}{=}$$

$$\overset{(B)}{=} \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\int_a^x dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_a^{x_1} \frac{(x_1-t)^n}{n} f(t)\,dt \right) \overset{(C)}{=} \frac{1}{n\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt \overset{(D)}{=}$$

$$\overset{(D)}{=} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt = I_{a+}^{n+1} f(x).$$

* Explicaciones adicionales:

(B) : Intercambiamos el orden de los operadores integral y derivada parcial:

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_a^z g(z,t)dt = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left(\int_a^{z+\Delta z} g(z+\Delta z,t)dt - \int_a^z g(z,t)dt\right) =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left(\int_a^z g(z+\Delta z,t)dt + \int_z^{z+\Delta z} g(z+\Delta z,t)dt - \int_a^z g(z,t)dt\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} g(z+\Delta z,t)dt}_{=g(z,z)} + \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left(\int_a^z g(z+\Delta z,t)dt - \int_a^z g(z,t)dt\right) =$$

$$= \int_a^z \frac{\partial}{\partial z} g(z,t)dt.$$

(C) : Simplificando los operadores integral y derivada.

(D) : $n\Gamma(n) = n(n-1)! = n! = \Gamma(n+1) \Rightarrow \dfrac{1}{n\Gamma(n)} = \dfrac{1}{\Gamma(n+1)}.$

1.3.2.- Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α

La Fórmula de Cauchy para Integrales Iteradas es el paso previo a la aparición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α ($\alpha \in \mathbb{R}^+$), como extensión natural de su expresión. Esta es la forma clásica del cálculo fraccionario:

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ y } x \in [a,b]. \text{ (10)}$$

---

(10) En principio consideramos $\alpha \in \mathbb{R}^+$, pero al definir el concepto de derivada fraccionaria veremos que al llevar a cabo la integración solo vamos a considerar valores $\alpha \in (0,1)$.

Además las integrales fraccionarias así especificadas están bien definidas para funciones $f \in L^p(a,b)$, con $1 \le p \le \infty$.

1.3.2.1.- INTEGRAL FRACCIONARIA DE LIOUVILLE: Las integrales fraccionarias de Rieman-Liouville que acabamos de introducir se pueden extender de manera natural al caso $a=-\infty$ obteniendo la denominada Integral Fraccionaria de Liouville:

$$\left(I_{+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}^{+} \text{ y } x \in(-\infty,+\infty)$$ [11]

1.3.2.2.- PROPIEDADES: La integral fraccionaria de Riemann-Liouville verifica las siguientes propiedades:

P1.- $\lim\limits_{\alpha \to 0}\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=f(x)$.

P2.- La integral fraccionaria satisface la **Propiedad de Semi-Grupo**:

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\left(I_{a+}^{\beta} f\right)\right)(x)=\left(I_{a+}^{\alpha+\beta}(f)\right)(x).$$

→ *Demostración* (de la Propiedad de Semi-Grupo):

Conocida la expresión:

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \alpha \in \mathbb{R}^{+}, x \in[a, b],$$

Escribiremos:

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\left(I_{a+}^{\beta} f\right)\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_{a}^{x}(x-z)^{\alpha-1} dz \int_{a}^{z}(z-t)^{\beta-1} f(t) dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_{a}^{x} dz \int_{a}^{z}(x-z)^{\alpha-1}(z-t)^{\beta-1} f(t) dt \overset{(E)}{=} \text{ \{Por el Teorema de Fubini\}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_{a}^{x} f(t) dt \int_{t}^{x}(x-z)^{\alpha-1}(z-t)^{\beta-1} dz=\begin{cases} u=z-t \Rightarrow du=dz; \quad z=u+t \\ z=t \Rightarrow u=0 \\ z=x \Rightarrow u=x-t \end{cases}$$

---

[11] *Algunos autores denominan a este operador como integral fraccionaria de Weyl, ya que éste fue el primero en utilizarlos sobre funciones periódicas.*

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\,dt\int_0^{x-t}(x-u-t)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du=\begin{cases} v=\frac{u}{x-t},(x-t)\neq 0. \\ u=v(x-t);\quad du=(x-t)dv \\ u=0\Rightarrow v=0 \\ u=x-t\Rightarrow v=1 \end{cases}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\,dt\int_0^1 (x-t)^{\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}(x-t)^{\beta-1}(x-t)dv=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\,dt\int_0^1 (x-t)^{\alpha+\beta-1}(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}dv=\begin{cases} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx=B(\alpha,\beta),\alpha>0,\beta>0 \\ Función\quad Beta,\quad con\quad B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}\cdot f(t)\,dt\cdot B(\alpha,\beta)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}\cdot f(t)\,dt\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}\cdot f(t)\,dt=\left(I_{a+}^{\alpha+\beta}(f)\right)(x).$$

P3.- La integral fraccionaria además satisface la siguiente propiedad:

$$\left(I_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=0\quad\leftrightarrow f(x)=0.$$

1.4.- Derivada fraccionaria.

1.4.1.- Algunas Ideas Básicas

Una vez establecido el concepto de integral fraccionaria como:

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$$

pretendemos definir la derivada fraccionaria de una función como el operador inverso de su integral fraccionaria.

La primera idea para tratar de dar una definición de derivada fraccionaria es la siguiente:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=\left(\left(I_{a+}^{\alpha}\right)^{-1} f\right)(x)=\left(I_{a+}^{-\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt.$$

Sin embargo, enseguida observamos el carácter divergente que la utilización del peso

$$\frac{1}{(x-t)^{1+\alpha}}$$

supone para la integral

$$\int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt$$ [12]

De hecho, **no** es posible utilizar una expresión integral para el operador inverso al operador integral fraccionaria ya que cualquier función definida mediante una integral de la forma

$$\int_{a}^{x} g(t,x)\, f(t)\, dt$$

se anula para $x=a$.

---

[12] *Basta para ello tomar el caso particular* $f(x)=1$.

Posteriormente surge la idea de definir el operador inverso al de integral fraccionaria teniendo en cuenta que:

$$f(x)=\left(\frac{d^n}{dx^n}I_{a+}^{n}f\right)(x)=\left(\frac{d^n}{dx^n}I_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{\alpha}f\right)(x),$$

y por lo tanto podemos obtener el operador inverso por la izquierda del operador derivada fraccionaria como $\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=\left(\frac{d^n}{dx^n}I_{a+}^{n-\alpha}f\right)(x)$, donde $n=\lceil\alpha\rceil=-[-\alpha]$.[13]

Esta es la idea que se utiliza para definir la Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville.

1.4.2.- Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville

1.4.2.1.- DEFINICIÓN. Consideremos una función $f(x)$ adecuada. Se define la Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$ por la izquierda como:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=\left(\frac{d^n}{dx^n}I_{a+}^{n-\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}}dt,$$

donde $n=\lceil\alpha\rceil=-[-\alpha]$ y $x\in[a,b]$.

Nótese que la derivada fraccionaria de Riemann- Liouville está basada en el concepto de integral de Riemann-Liouville.

---

(13) Los símbolos $[.]$ y $\lceil . \rceil$ son respectivamente la parte entera y la parte superior entera, por ejemplo $\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil=1$, $\left\lceil\frac{5}{2}\right\rceil=3.$

Por lo tanto, para $\alpha=\frac{1}{2}$ *la potencia* $\alpha-(n-1)=\frac{1}{2}-(1-1)=0$, y si $\alpha=\frac{5}{3}$, *el exponente* $\alpha-(n-1)=\frac{5}{3}-(2-1)=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}.$

1.4.3.- Derivada Fraccionaria de Liouville

1.4.3.1.- DEFINICIÓN. Análogamente podemos definir la derivada fraccionaria de Liouville basándonos en la integral de Liouville como sigue:

$$\left(D_{+}^{\alpha} f\right)(x)=\left(\frac{d^{n}}{dx^{n}} I_{+}^{n-\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}} dt.$$

Nótese que el exponente $\alpha-(n-1)$ está siempre comprendido entre 0 y 1.

1.4.4.- Propiedades de la Derivada Fraccionaria.

La derivada fraccionaria verifica las siguientes propiedades:

A. Si $f \in L^{1}(a,b)$, entonces

$$\left(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f\right)(x)=I_{a+}^{\beta-\alpha} f(x), \text{ si } \beta>\alpha,$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f\right)(x)=D_{a+}^{\alpha-\beta} f(x), \text{ si } \alpha>\beta,$$

para todo $x \in (a,b)$.

B. Si $f \in L^{1}(a,b)$, entonces

$$\left(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=f(x),$$

para todo $x \in (a,b)$.

Por tanto, la derivada fraccionaria definida de esta manera es el operador inverso a la integral fraccionaria.

C. El resultado de aplicar los mismos operadores que en el apartado anterior pero en orden inverso es el siguiente (bajo ciertas condiciones de regularidad):

$$\left(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n}\left(D_{a+}^{\alpha-j} f\right)(a) \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}.$$

D. El hecho de aplicar el operador de derivada usual junto con los operadores de derivada e integral fraccionaria nos conduce a las siguientes propiedades:

Si $r \in \mathbb{N}$ y $f \in L^1(a,b)$,

D.1.- $\left(\dfrac{d^r}{dx^r} I_{a+}^{\alpha} f \right)(x) = I_{a+}^{\alpha - r} f(x)$, si $r \leq n$,

D.2.- $\left(\dfrac{d^r}{dx^r} I_{a+}^{\alpha} f \right)(x) = D_{a+}^{r-\alpha} f(x)$, si $r > n$,

D.3.- $\left(\dfrac{d^r}{dx^r} \left(D_{a+}^{\alpha} f \right) \right)(x) = D_{a+}^{\alpha + r} f(x)$,

D.4.- $\left(D_{a+}^{\alpha} \left(\dfrac{d^r}{dx^r} f \right) \right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha + r}(f) \right)(x) - \sum_{j=1}^{r} \left(D_{a+}^{r-j} f \right)(a) \dfrac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}$.

E. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville **no** verifica (en general) la Propiedad de Semi-Grupo.

De hecho:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} \left(D_{a+}^{\beta} f \right) \right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha+\beta}(f) \right)(x) - \sum_{j=1}^{m} \left(D_{a+}^{\beta-j} f \right)(a) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)},$$

donde m es el número entero que verifica $m-1 < \beta \leq m$.

■ Observación: Al contrario que ocurre con la derivada fraccionaria, para la integral fraccionaria sí que se verifica la propiedad:

$$\boxed{\left(I_{a+}^{\alpha} f \right)(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad f(x) = 0.}$$

1.4.5.- Derivadas e Integrales Fraccionarias de Funciones Elementales.

1.4.5.1.- Polinomios:

Si $\gamma > 0$ y $x > a,$ se verifican las siguientes propiedades:

$$I_{a+}^{\alpha}\left(x-a\right)^{\gamma-1}=\frac{\Gamma\left(\gamma\right)}{\Gamma\left(\gamma+\alpha\right)}\left(x-a\right)^{\gamma+\alpha-1},$$

o equivalentemente

$$I_{a+}^{\alpha}\left(x-a\right)^{\gamma}=\frac{\Gamma\left(\gamma+1\right)}{\Gamma\left(\gamma+\alpha+1\right)}\left(x-a\right)^{\gamma+\alpha}.$$

Análogamente,

$$D_{a+}^{\alpha}\left(x-a\right)^{\gamma-1}=\frac{\Gamma\left(\gamma\right)}{\Gamma\left(\gamma-\alpha\right)}\left(x-a\right)^{\gamma-\alpha-1},$$

o equivalentemente

$$D_{a+}^{\alpha}\left(x-a\right)^{\gamma}=\frac{\Gamma\left(\gamma+1\right)}{\Gamma\left(\gamma-\alpha+1\right)}\left(x-a\right)^{\gamma-\alpha}.$$

1.4.5.1.1.- Demostración.

Vamos a demostrar esta última expresión, es decir:

$$D_{a+}^{\alpha}\left(x-a\right)^{\gamma}=\frac{\Gamma\left(\gamma+1\right)}{\Gamma\left(\gamma-\alpha+1\right)}\left(x-a\right)^{\gamma-\alpha},$$

utilizando la definición de Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)\left(x\right)=\left(\frac{d^{n}}{dx^{n}}I_{a+}^{n-\alpha}f\right)\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\int_{a}^{x}\frac{f\left(t\right)}{\left(x-t\right)^{\alpha-(n-1)}}dt.$$

Así:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma}=\left(\frac{d^{n}}{dx^{n}} I_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}} dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{a}^{x} \frac{(t-a)^{\gamma}}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}} dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{a}^{x}(t-a)^{\gamma}(x-t)^{(n-1)-\alpha} dt=\begin{cases} u=x-t; \quad t=x-u; \quad dt=-du \\ t-a=x-u-a \\ t=a \Rightarrow u=x-a \\ t=x \Rightarrow u=0 \end{cases}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{x-a}^{0}(x-u-a)^{\gamma} u^{(n-1)-\alpha}(-du)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{0}^{x-a}(x-u-a)^{\gamma} u^{n-\alpha-1} du=\begin{cases} v=\frac{u}{x-a},(x-a) \neq 0. \\ u=v(x-a); \quad du=(x-a) dv \\ u=0 \Rightarrow v=0 \\ u=x-a \Rightarrow v=1 \\ x-v(x-a)-a=(x-a)(1-v) \end{cases}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{0}^{1}(x-a)^{\gamma}(1-v)^{\gamma} v^{n-\alpha-1}(x-a)^{n-\alpha-1}(x-a) dv=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}}(x-a)^{\gamma+n-\alpha} \underbrace{\int_{0}^{1}(1-v)^{\gamma} v^{n-\alpha-1} dv}_{=\beta(\gamma+1, n-\alpha)}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}}(x-a)^{\gamma+n-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1) \cdot \Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\gamma+1+n-\alpha)}=$$

$$=\frac{d^{n}}{dx^{n}}(x-a)^{\gamma+n-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+n-\alpha)} \stackrel{(F)}{=}$$

$$\overset{(F)}{=} \frac{(x-a)^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\Gamma(\gamma+1) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha}.$$

Donde:

(F) : Desarrollando la expresión de la derivada n-ésima:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x-a\right)^{\gamma+n-\alpha} = (n+\gamma-\alpha)\cdot(n-1+\gamma-\alpha)\cdot\ldots\cdot(1+\gamma-\alpha)\cdot(x-a)^{\gamma-\alpha}$$

Por otro lado, desarrollaremos la expresión del denominador $\Gamma(\gamma+1+n-\alpha)$ utilizando la Propiedad de Recursividad de la Función Gamma:

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\cdot(x+n-2)\cdot\ldots\cdot(x+1)\cdot x\cdot\Gamma(x)$$

lo que, traducido a nuestro ejercicio, es:

$$\Gamma(\gamma-\alpha+1+n) = (\gamma-\alpha+1+n-1)\cdot(\gamma-\alpha+1+n-2)\cdot\ldots\cdot(\gamma-\alpha+1+1)\cdot(\gamma-\alpha+1)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha+1) =$$

$$= (n+\gamma-\alpha)\cdot(n-1+\gamma-\alpha)\cdot\ldots\cdot(\gamma-\alpha+2)\cdot(\gamma-\alpha+1)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha+1).$$

Ahora, haciendo el cociente de ambas expresiones:

$$\frac{\frac{d^n}{dx^n}\left(x-a\right)^{\gamma+n-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1+n)} = \frac{(n+\gamma-\alpha)\cdot(n-1+\gamma-\alpha)\cdot\ldots\cdot(1+\gamma-\alpha)\cdot(x-a)^{\gamma-\alpha}}{(n+\gamma-\alpha)\cdot(n-1+\gamma-\alpha)\cdot\ldots\cdot(\gamma-\alpha+1)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha+1)} = \frac{(x-a)^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}.$$

1.4.5.1.2.- Casos Particulares:

Veamos, según la expresión de derivada fraccionaria que acabamos de demostrar,

$$D_{a+}^{\alpha}\left(x-a\right)^{\gamma} = \frac{\Gamma\left(\gamma+1\right)}{\Gamma\left(\gamma-\alpha+1\right)}\left(x-a\right)^{\gamma-\alpha},$$

qué ocurre al particularizar en algunos valores de γ (en concreto escogeremos $\gamma=\alpha$ y $\gamma=1$).

A) Si tomamos $\gamma=\alpha$, tenemos:

$$D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j}=0, \qquad j=1,2,....,n,$$ [14]

→ *Demostración:* Partimos de la expresión:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=\left(\frac{d^n}{dx^n}I_{a+}^{n-\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}}dt$$

Así, tenemos:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma-1}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{(t-a)^{\gamma-1}}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}}dt.$$

Tomaremos el caso particular en que $a=0,\ \ \gamma=\alpha=\frac{1}{2},\ \ n=j=1.$ Así: $\begin{cases}\gamma-1=\frac{-1}{2}\\ n-\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$

$$D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma-1}=D_0^{1/2}\left(x^{-1/2}\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}dt\right)=\begin{cases}z=\frac{t}{x},x\neq0.\\ t=x\cdot z;\quad dt=x\cdot dz;\\ t=0\Rightarrow z=0;\\ t=x\Rightarrow z=1.\end{cases}$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\left(\int_0^1(x\cdot z)^{-1/2}(x-x\cdot z)^{-1/2}\cdot x\cdot dz\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 x^{-1/2}\cdot z^{-1/2}\cdot x^{-1/2}(1-z)^{-1/2}\cdot x\cdot dz\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 z^{-1/2}(1-z)^{-1/2}dz\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\left(\beta\left(\tfrac{-1}{2}+1,\tfrac{-1}{2}+1\right)\right)=$$

---

*[14] Nótese que **la derivada fraccionaria de ciertos polinomios <u>es nula</u>**. Por tanto estos polinomios juegan el mismo papel respecto a la derivada fraccionaria que el papel que juega la función constante respecto de la derivada usual.*

Es por este motivo (que la derivada fraccionaria de una función <u>no</u> constante es nula) por el cual la expresión de Riemann-Liouville pierde importancia y da paso, por tanto, a nuevas definiciones.

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\left(\beta\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}\right)=$$

$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{0!}\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}(\pi)=0$, pues, al no depender el resultado de ninguna variable, estamos ante la derivada de una constante: cero.

B) Escogiendo $\gamma=1$,

$$\boxed{D_{a+}^{\alpha}(1)=\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.\text{(15)}}$$

→ *Demostración*: Partiendo del mismo enunciado que en el caso anterior llegamos a la siguiente expresión:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma-1}\underset{\gamma=1}{\underset{\downarrow}{=}}D_{a+}^{\alpha}(1)=\left(\frac{d^n}{dx^n}I_{a+}^{n-\alpha}f\right)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}}dt\underset{\substack{n=1\\ f(t)=1}}{\underset{\downarrow}{=}}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x(x-t)^{-\alpha}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left(\left.\frac{-(x-t)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{t=a}^{t=x}\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)=\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

C) Representación Gráfica: A continuación representaremos gráficamente las funciones obtenidas al particularizar los valores de $\gamma=\alpha$ y $\gamma=1$, es decir, compararemos las gráficas de las siguientes funciones (tomaremos por simplicidad los valores $a=0$ y $j=0$):

---

*(15) Nótese que la derivada fraccionaria de una constante **no** es cero. Sin embargo sí que se anula cuando se considera el límite $a\to-\infty$, es decir, cuando se considera la derivada de Liouville.*

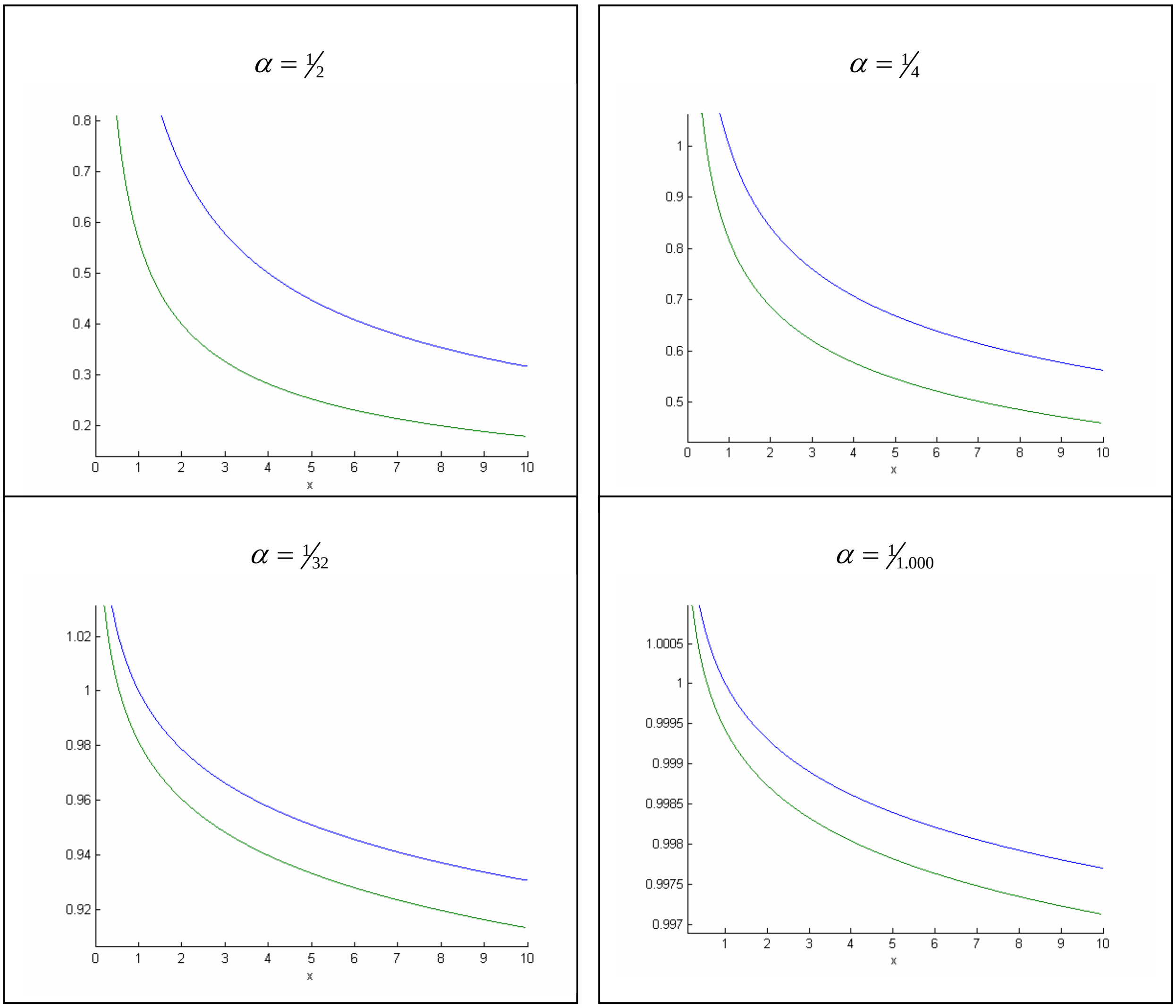
▪ Si $\gamma=\alpha$, $D_{a+}^{\alpha}\left(x-a\right)^{\alpha-j}=0,\quad j=1,2,....,n.\ \Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ (dibujada en verde)

▪ Si $\gamma=1,\ D_{a+}^{\alpha}\left(1\right)=\dfrac{\left(x-a\right)^{-\alpha}}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}.\ \Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ (pintada en azul).

Con los siguientes comandos en Matlab:

```
ezplot('1/x^(1/2)',[0.1,10])
ezplot('(1/gamma(1-1/2))*(1/x^(1/2))',[0.1,10])
```

Y dando distintos valores al parámetro α , obtenemos distintas gráficas:



Es decir, conforme disminuimos el valor de α más se acerca la función $g(x)$ a $f(x)$.

1.4.5.2.- Función Exponencial y Función de Mittag-Leffler:

Las siguientes propiedades ilustran el comportamiento de la derivada fraccionaria frente a la función exponencial:

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{D_{a+}^{\alpha} e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda a}}{(x-a)^{\alpha}} E_{1,1-\alpha}(\lambda x - \lambda a).}$$

Vemos que aparece de manera natural la función $E_{\alpha,\beta}(x)$, la función de Mittag-Leffler ya introducida en el apartado 1.1.3.

En cambio, para la derivada de Liouville:

$$\boxed{D_{+}^{\alpha} e^{\lambda x} = \lambda^{\alpha} e^{\lambda x}} \text{ (16)}$$

Además tenemos la siguiente propiedad en referencia a la derivada de la función de Mittag-Leffler:

$$\boxed{D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma-1} E_{\mu,\gamma}\left(\lambda(x-a)^{\mu}\right) = (x-a)^{\gamma-\alpha-1} E_{\mu,\gamma-\alpha}\left(\lambda(x-a)^{\mu}\right).}$$

1.4.6.- Derivadas Fraccionarias de Caputo

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville ha tenido un papel muy importante en el desarrollo teórico del cálculo fraccionario. Sin embargo, a nivel práctico en muchas aplicaciones se ha preferido otra definición de derivada fraccionaria, que, aunque fue introducida por Liouville, se conoce con el nombre de derivada de Caputo.

---

(16) *Nótese que* $E_{1,1}(x) = e^{x}$.

1.4.6.1.- DEFINICIÓN:

La derivada fraccionaria de Caputo se define de la forma siguiente:

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{\frac{d^n}{dx^n}\left(f(t)\right)}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}} dt,$$

donde $n = \lceil \alpha \rceil = -[-\alpha]$ y $x \in [a,b]$. [17]

1.4.6.2.- PROPIEDADES:

Se pueden demostrar dos propiedades importantes de la derivada de Caputo:

- $\lim_{\alpha \to 0}\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x).$
- $\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \left({}^{C}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a^+)}{\Gamma(1+j-\alpha)}(x-a)^{j-\alpha}$, cuando se cumplan las condiciones adecuadas para $f(x)$.

Aprovechando esta última propiedad podemos dar una definición alternativa de derivada de Caputo:

1.4.6.3.- DEFINICIÓN ALTERNATIVA:

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = D_{a+}^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a+)}{j!}(x-a)^j\right).$$

Esta relación existente entre las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo permite concluir la siguiente relación:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(a+) = 0 \quad \leftrightarrow \quad f^{(j)}(a+) = 0, \qquad j = 0,1,2,\dots,n-1.$$

Sin embargo existen diferencias.

---

[17] *Nótese que la derivada fraccionaria de Caputo definida de esta forma tiene sentido para funciones* f *tales que* $\frac{d^n f}{dx^n} \in L^1(a,b)$.

2.- LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

2.1.- Introducción.

* La transformada de Laplace toma su nombre en honor a Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), matemático y astrónomo teórico francés tan famoso en su tiempo que se le conocía como el Newton de Francia. Sus principales campos de interés fueron la mecánica celeste y la teoría de probabilidades.

* Esta transformada integral tiene una serie de propiedades que la hacen útil en el análisis de sistemas lineales. Una de las ventajas más significativas radica en que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división. Esto transforma las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, mucho más sencillas de resolver.

* Podremos utilizar la Transformada de Laplace en la solución de ecuaciones integrales, de sistemas de ecuaciones diferenciales y también se podrá aplicar al cálculo de integrales.

* La Transformada de Laplace es la más conocida y utilizada de las transformadas integrales, pues se ha mostrado de gran utilidad a la hora de resolver multitud de problemas de la ciencia y la tecnología, aplicándose de manera efectiva al estudio de temas fundamentales como teoría de vibraciones, circuitos electrónicos, búsqueda de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales, estudio de la conductividad del calor, ecuación de onda, soluciones de problemas de valor de frontera, etc.

* El método de la transformada de Laplace aporta muchas ventajas cuando se usa para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Mediante su uso es posible convertir funciones tales como senoidales o exponenciales en funciones algebraicas de una variable s compleja, de manera que operaciones como la integración y la diferenciación se sustituyen por operaciones algebraicas en el plano complejo.

* También es una herramienta teórica de gran importancia, pues permite demostrar la existencia de solución de ciertas ecuaciones funcionales más amplias que las diferenciales.

2.2.- Definición de La Transformada de Laplace.

2.2.1.- TRANSFORMACIONES INTEGRALES.

Una transformación integral consiste en considerar funciones $f(t)$ definidas en un intervalo finito o infinito $a \leq t \leq b$, y tomar una función fija $K(s,t)$ de variable t y parámetro s.

De este modo, en general, una transformación integral tendrá la forma siguiente:

$$T(f(t)) = F(s) = \int_a^b K(s,t) f(t) dt.$$

Esta integral, así definida, transformará una función $f(t)$ en una función de la variable s.

Si $f(t)$ está definida cuando $t \geq 0$ la integral impropia $\int_0^\infty K(s,t) f(t) dt$ se define como el siguiente límite:

$$\int_0^\infty K(s,t) f(t) dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b K(s,t) f(t) dt.$$

Si existe este límite se dice que la integral existe o que es convergente; si no existe el límite, la integral no existe y se dice divergente.

En general el límite anterior existe sólo para ciertos valores de la variable s.

El estudio de estas transformaciones integrales generalizadas ha conducido al análisis de ciertas transformaciones específicas que han resultado de mucha utilidad al abordar ciertos problemas. Una de estas transformaciones especiales se obtiene tomando como intervalo de integración el $[0,\infty)$ no acotado y eligiendo $K(s,t) = e^{-st}$. Esta elección de $K(s,t)$ proporciona una transformación integral muy importante: La Transformada de Laplace.

2.2.2.- DEFINICIÓN: LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$. Entonces la integral:

$$\mathfrak{L}\left\{ f(t) \right\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

se llama Transformada de Laplace de f, siempre y cuando la integral converja.

→ **Nota**: Cuando esta integral converja, el resultado será una función de s.

→ **Observación**: Cuando se habla de la Transformada de Laplace, generalmente se refiere a la versión unilateral. También existe la transformada de Laplace bilateral, que se define como sigue:

$$\mathfrak{L}\left\{ f(t) \right\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

La Transformada de Laplace típicamente existe para todos los números reales $s > a$, donde a es una constante que depende del comportamiento de crecimiento de $f(t)$.

2.2.2.1.- Notación.

Siempre que sea posible utilizaremos letras minúsculas para representar la función que se va a transformar, y la mayúscula correspondiente para denotar su transformada de Laplace. Por ejemplo:

$$\mathfrak{L}\left\{ f(t) \right\} = F(s);\;\; \mathfrak{L}\left\{ g(t) \right\} = G(s);\;\; \mathfrak{L}\left\{ y(t) \right\} = Y(s)\ldots$$

Adicionalmente, en algunas ocasiones abreviaremos:

$$\mathfrak{L}\left\{ f(t) \right\} = \mathfrak{L}\left\{ f \right\}.$$

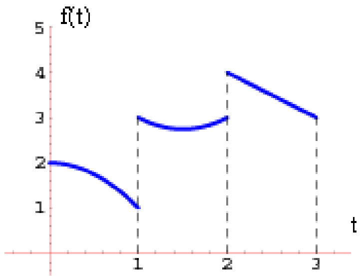
2.2.3.- CONDICIONES SUFICIENTES (Para la existencia de la Transformada de Laplace).

Para establecer las condiciones suficientes que definen la existencia de $\mathfrak{L}\left\{ f(t) \right\}$ necesitamos dos definiciones previas:

2.2.3.1.- Definiciones previas: Función Continua Por Tramos y Orden Exponencial.

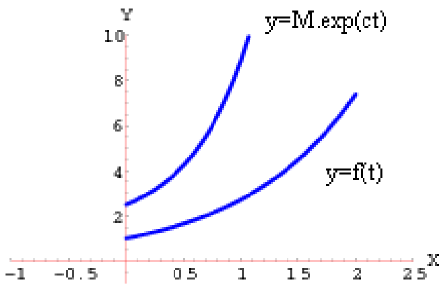
2.2.3.1.1.- Función Continua Por Tramos: Una **función** es **continua por tramos** en $[0,\infty)$ si en cualquier intervalo $0 \le a \le t \le b$ hay, a lo sumo, una cantidad finita de puntos t_k, $k = 1, 2, \ldots n$, $t_{k-1} < t_k$, en los cuales f tiene discontinuidades finitas, y es continua en todo intervalo abierto $t_{k-1} < t < t_k$.

Esta idea se muestra claramente en la gráfica siguiente:



2.2.3.1.2.- Orden Exponencial: Se dice que una función f es de **orden exponencial c** si existen constantes $c, M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \le Me^{ct}$, para todo $t > T$.

Si f es una función creciente, la condición $|f(t)| \le Me^{ct}$, $t > T$, tan solo expresa que la gráfica de f en el intervalo (T,∞) no crece con más rapidez que la gráfica de la función exponencial Me^{ct}, $c > 0$, como se muestra en la siguiente gráfica:



→ **Observación:** Una manera simple de comprobar si una función es o no de orden exponencial es calcular el siguiente límite, para algún valor de $k>0$:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|f(t)|}{e^{kt}}=L.$$

Si L es finito entonces M puede ser cualquier número mayor que L (y este determina T). Por otro lado, si L es infinito, $L=\infty$, entonces f **<u>no</u>** es de orden exponencial.

2.2.3.1.2.1.- <u>Ejemplo (de una función de orden exponencial)</u>:

Comprobaremos que $f(t)=t^3$ es una función de orden exponencial.

Para ello aplicaremos tres veces la regla de L'Hôpital en el cálculo del límite:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|f(t)|}{e^{kt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^{kt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{ke^{kt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{6t}{k^2e^{kt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{6}{k^3e^{kt}}=0,\forall k>0.$$

Por tanto, si t es suficientemente grande,

$$|t^3|<e^t,$$

y así $f(t)=t^3$ es de orden exponencial.

De este modo podemos **generalizar** diciendo que una potencia entera positiva de t siempre es de orden exponencial, porque, cuando $c>0$,

$$|t^n|\le Me^{ct}, \text{ o sea, } \left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right|\le M \text{ para } t>T,$$

lo que equivale a demostrar que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{ct}}$$

es finito para $n=1,2,3...$, resultado que se obtiene con n aplicaciones de la regla de L'Hôpital.

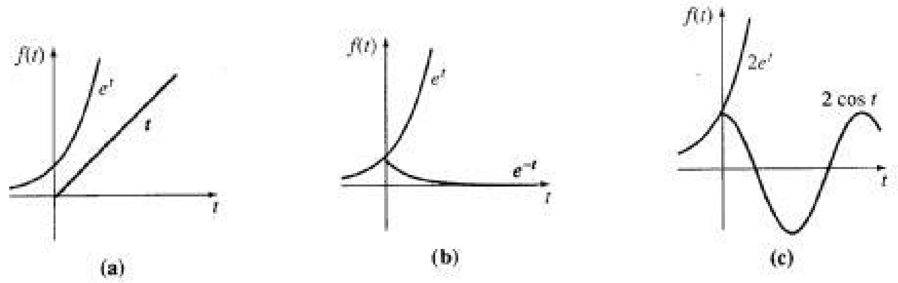
2.2.3.1.2.2.-<u>Teorema (Funciones Acotadas)</u>: Sea $f:[0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es de orden exponencial.

→ *<u>Demostración</u>:* Como f es acotada, $|f(t)|\leq M$, $\forall t\in[0,\infty)$. Entonces:

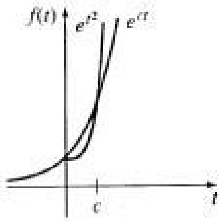
$$\lim_{t\to\infty}\frac{|f(t)|}{e^{kt}}\leq\lim_{t\to\infty}\frac{M}{e^{kt}}=0.$$

→ *<u>Observación</u>:* Como las funciones $sen(\alpha t)$ y $cos(\alpha t)$ son funciones acotadas, son de orden exponencial.

2.2.3.1.2.3.- <u>Otros Ejemplos</u>: Las funciones $f(t)=t$, $f(t)=e^{-t}$, $f(t)=2\cos(t)$ son de orden exponencial $c=1$ para $t>0$ porque, respectivamente, son (a) $|\,t\,|\leq e^{t}$, (b) $|\,e^{-t}\,|\leq e^{t}$, (c) $|2\cos(t)|\leq 2e^{t}$, como se puede observar en las siguientes gráficas:



Por el contrario, una función como $f(t)=e^{t^2}$ **<u>no</u>** es de orden exponencial pues, tal y como podemos observar en la figura siguiente, su gráfica crece más rápido que cualquier potencia lineal positiva de e en $t>c>0$:



Comprobamos que, en efecto, esta función **no** es de orden exponencial:

Calculando el límite tenemos, para cualquier valor de k :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|f(t)|}{e^{kt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left|e^{t^2}\right|}{e^{kt}}=\lim_{t\to\infty}e^{t^2-kt}=\infty$$

2.2.3.2.- Condiciones Suficientes para la Existencia de la Transformada de Laplace:

Las condiciones de suficiencia que garantizan la existencia de $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ son que f sea continua por tramos en $[0,\infty)$ y que además f sea de orden exponencial cuando $t>T$.

2.2.3.2.1.- Demostración: Partiendo de la expresión de $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ tenemos:

$$\mathfrak{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt=I_1+I_2.$$

La integral I_1 existe, pues se puede expresar como una suma de integrales sobre intervalos en los que $\left(e^{-st}f(t)\right)$ es continua.

Ahora, sabiendo que f es de orden exponencial:

$$|I_2|\le\int_T^\infty\left|e^{-st}f(t)\right|dt\le M\int_T^\infty e^{-st}e^{ct}dt=M\int_T^\infty e^{-(s-c)t}dt=-M\left.\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\right|_T^\infty=M\frac{e^{-(s-c)T}}{s-c},s>c.$$

Como $\int_T^\infty Me^{-(s-c)t}dt$ converge, la integral $\int_T^\infty\left|e^{-st}f(t)\right|dt$ converge de acuerdo con la Prueba o Criterio de Comparación para integrales impropias [18].

Entonces I_2 existe cuando $s>c.$

---

[18] ***Criterio de Comparación****: Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $0\le f(x)\le g(x)$ sobre $[a,\infty)$. Entonces, la convergencia de $\int_a^\infty g(x)dx$ supone la convergencia de $\int_a^\infty f(x)dx,$ y de la divergencia de $\int_a^\infty f(x)dx$ se desprende la divergencia de $\int_a^\infty g(x)dx.$*

Así, la existencia de I_1 e I_2 implica que $\mathfrak{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ existe cuando $s>c$.

Observación: Estas condiciones son suficientes, pero no necesarias para la existencia de una transformada de Laplace.

Por ejemplo, la función $f(t)=t^{-1/2}$ **no** es continua por tramos en el intervalo $[0,\infty)$ pero **sí** existe su transformada de Laplace.

→ *Demostración:* Claramente $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ tiene una discontinuidad infinita en $t=0$, con lo cual no es continua a trozos en el intervalo $[0,\infty)$, pero:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}dt \underset{\substack{\downarrow \\ u=st \\ du=sdt}}{=} \int_0^{\infty} e^{-u}\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{u}}\frac{du}{s}=\frac{\sqrt{s}}{s}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du=\begin{cases} z^2=u; \quad du=2zdz \\ \sqrt{u}=z \end{cases}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-z^2}}{z}2zdz=\frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz\overset{(*)}{=}\frac{2}{\sqrt{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}, s>0.$$

(*): Se puede demostrar que $\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2.2.4.- Ejemplo de una función cuya Transformada de Laplace no existe.

Comprobaremos a continuación que no existe $\mathfrak{L}\left\{1/t^2\right\}$:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{t^2}\right\}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-st}}{t^2}dt=\int_0^{1}\frac{e^{-st}}{t^2}dt+\int_1^{\infty}\frac{e^{-st}}{t^2}dt=I_1+I_2.$$

- $I_1=\int_0^{1}\frac{e^{-st}}{t^2}dt$ es una integral impropia en $t=0$ que diverge:

Por el Criterio de Comparación, como es $\frac{e^{-st}}{t^2}\leq\frac{1}{t^2}$, y al ser

$$\int_0^1\frac{1}{t^2}dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^1\frac{dt}{t^2}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-t^{-1}\right]_{\varepsilon}^1=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=+\infty,$$

una integral divergente, entonces podemos afirmar que $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-st}}{t^2} dt$ es una integral divergente.

- $I_2 = \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t^2} dt$ es una integral convergente para $s > 0$:

Diremos que $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente si existe y es finito $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$

Al igual que ocurría en el caso anterior, podemos establecer la comparación:

$$\frac{e^{-st}}{t^2} \leq \frac{1}{t^2},$$

y como es $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-t^{-1}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1,$ finito, podemos concluir.

Pero, al ser $\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{t^2}\right\} = I_1 + I_2,$ con I_1 divergente, la transformada de esta función no existe.

2.2.5.- Ejemplos de Transformadas de Laplace de algunas funciones.

Mostraremos a continuación algunos ejemplos de la Transformada de Laplace de algunas funciones:

I) $\mathfrak{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = \frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$

II) $\mathfrak{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \begin{cases} u = t; & du = dt \\ dv = e^{-st}dt; & v = \frac{-1}{s}e^{-st} \end{cases}$

$$= \frac{-t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-1}{s}e^{-st}dt = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}\mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

III) $\mathfrak{L}\left\{e^{-3t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}dt \underset{s+3>0}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s+3}, \quad s > -3.$

IV) $\mathfrak{L}\{sen(2t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st} sen(2t)dt = \begin{cases} u = sen(2t); \quad du = 2cos(2t)dt \\ dv = e^{-st}dt; \quad v = \frac{-1}{s}e^{-st} \end{cases}$

$$= \frac{-1}{s} sen(2t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-2}{s} e^{-st} cos(2t)dt = \quad \{s > 0\}$$

$$= \frac{2}{s}\int_0^{\infty} e^{-st} cos(2t)dt = \begin{cases} u = cos(2t); \quad du = -2sen(2t)dt \\ dv = e^{-st}dt; \quad v = \frac{-1}{s}e^{-st} \end{cases}$$

$$= \frac{2}{s}\left[\frac{-1}{s} cos(2t) \cdot e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{2}{s} e^{-st} sen(2t)dt \right] =$$

$= \frac{2}{s}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s}\int_0^{\infty} e^{-st} sen(2t)dt \right] \Rightarrow$ Recapitulando, tenemos:

$$\Rightarrow \mathfrak{L}\{sen(2t)\} = \frac{2}{s}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s}\int_0^{\infty} e^{-st} sen(2t)dt \right] = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}\mathfrak{L}\{sen(2t)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{L}\{sen(2t)\} \cdot \left(1 + \frac{4}{s^2}\right) = \frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L}\{sen(2t)\} = \frac{2}{s^2+4}, s > 0.$$

2.3.- Propiedades de La Transformada de Laplace.

2.3.1.- Linealidad: Para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathfrak{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathfrak{L}\{f_2(t)\}$$

→ *Demostración:*

$$\mathfrak{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right)dt = c_1\int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t)dt + c_2\int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) =$$

$$= c_1\mathfrak{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathfrak{L}\{f_2(t)\}.$$

→ *Observación*: Debido a la propiedad de linealidad, en general si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones de orden exponencial, la suma $f(t) + g(t)$ y el producto $f(t) \cdot g(t)$ también serán de orden exponencial.

→ *Ejemplo del empleo de la Linealidad*: Aplicaremos la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace y utilizaremos los resultados hallados en los ejemplos anteriores para calcular, por ejemplo, $\mathfrak{L}\{3t-5sen(2t)\}$:

$$\mathfrak{L}\{3t-5sen(2t)\}=3\mathfrak{L}\{t\}-5\mathfrak{L}\{sen(2t)\}=3\cdot\frac{1}{s^2}-5\cdot\frac{2}{s^2+4}=\frac{12-7s^2}{s^2(s^2+4)},s>0.$$

2.3.2.- Desplazamiento: Para todo $a\in\mathbb{R}$,

$$\mathfrak{L}\{f(t)e^{at}\}(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}(s-a)$$

→ *Demostración:*

$$\mathfrak{L}\{f(t)e^{at}\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\left(f(t)e^{at}\right)dt=\int_0^\infty e^{at-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt=\mathfrak{L}\{f(t)\}(s-a)$$

2.3.3.- Derivación respecto de parámetros:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(t,\alpha)\right\}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathfrak{L}\{f(t,\alpha)\}$$

→ *Demostración:* Derivando bajo el signo integral, basta con suponer que $(\partial/\partial\alpha)f$ existe y también satisface una condición de crecimiento exponencial:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathfrak{L}\{f(t,\alpha)\}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty e^{-st}f(t,\alpha)dt=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\alpha}f(t,\alpha)e^{-st}dt=\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}f(t,\alpha)\right\}.$$

2.3.4.- Transformada de la potencia n de t:

$$\mathfrak{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

→ *Demostración:* Integrando por partes en la expresión obtenida: $\begin{cases}u=t^n; & du=nt^{n-1}dt\\ dv=e^{-st}dt; & v=\frac{-1}{s}e^{-st}\end{cases}$

$$\mathfrak{L}\{t^n\}=\int_0^\infty e^{-st}t^ndt=\frac{-1}{s}t^ne^{-st}\Big|_0^\infty+\frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt=\frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt=\frac{n}{s}\mathfrak{L}\{t^{n-1}\},n=1,2,3...$$

Ahora, conocido $\mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0,$ por iteración de la expresión que acabamos de obtener, $\mathfrak{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathfrak{L}\{t^{n-1}\}$, será:

$$\mathfrak{L}\{t\} = \frac{1}{s}\mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathfrak{L}\{t^2\} = \frac{2}{s}\mathfrak{L}\{t\} = \frac{2!}{s^3}, \quad \mathfrak{L}\{t^3\} = \frac{3}{s}\mathfrak{L}\{t^2\} = \frac{3\cdot 2}{s^4} = \frac{3!}{s^4}, \quad \ldots$$

Así, parece razonable concluir que en general es $\mathfrak{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

2.3.4.1.- Transformada de la potencia n de t, cuando $n \notin \mathbb{Z}^+$:

Cuando n *no* es un número entero haremos el cambio de variables $u = st;\ \ du = sdt$ y tenemos:

$$\mathfrak{L}\{t^a\} = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt \xrightarrow{st=u} \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^a \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^a du = \frac{1}{s^{a+1}}\Gamma(a+1),$$

por definición de función Gamma.

2.3.5.- Derivación respecto de s:

$$\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\{f(t)\}(s) = \mathfrak{L}\{-t\cdot f(t)\}(s)$$

→ *<u>Demostración</u>:* Derivando bajo el signo integral:

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathfrak{L}\{f(t)\}(s) = \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty (-t)e^{-st} f(t)dt = \mathfrak{L}\{-t\cdot f(t)\}.$$

2.3.6.- Transformada de Exponenciales:

I) $\mathfrak{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}\ ,\ \ s > a$

→ *<u>Demostración</u>:* Partiendo de $\mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0,$ por la propiedad de Desplazamiento:

$$\mathfrak{L}\{f(t)e^{at}\}(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}(s-a),$$

tenemos:

$$\mathfrak{L}\left\{1\cdot e^{at}\right\}(s)=\mathfrak{L}\{1\}\left(s-a\right)=\frac{1}{s-a},\quad s-a>0.$$

II) $\mathfrak{L}\left\{t^m e^{at}\right\}=\dfrac{m!}{(s-a)^{m+1}}$

→ *Demostración:* Partiremos, por un lado, derivando m veces en s la expresión obtenida para $\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}$:

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s)=\frac{\partial^m}{\partial s^m}\left(\frac{1}{s-a}\right)=\frac{(-1)^m\cdot m!}{(s-a)^{m+1}},$$

pues:

Si $m=1$: $\dfrac{\partial}{\partial s}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s)=\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{1}{s-a}\right)=\dfrac{-1}{(s-a)^2};$

Para $m=2$: $\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s)=\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\dfrac{-1}{(s-a)^2}\right)=\dfrac{2}{(s-a)^3};$

Para $m=3$: $\dfrac{\partial^3}{\partial s^3}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s)=\dfrac{\partial^3}{\partial s^3}\left(\dfrac{2}{(s-a)^3}\right)=\dfrac{-2\cdot 3}{(s-a)^4};$ ...

Así, se puede construir fácilmente $\dfrac{\partial^m}{\partial s^m}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s)=\dfrac{(-1)^m\cdot m!}{(s-a)^{m+1}}.$

Por otro lado, utilizaremos la propiedad 2.3.4 de Derivación respecto de s:

$$\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)=\mathfrak{L}\{-t\cdot f(t)\}(s)$$

De este modo, aplicándola a $f(t)=e^{at}$ tenemos:

$$\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)=\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s)=\mathfrak{L}\{-t\cdot f(t)\}(s)=\mathfrak{L}\left\{-t\cdot e^{at}\right\}(s).$$

Derivando sucesivamente, es:

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s)=\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\left\{-t\cdot e^{at}\right\}(s)=\mathfrak{L}\left\{-t\cdot(-t\cdot e^{at})\right\}(s)=\mathfrak{L}\left\{t^2\cdot e^{at}\right\}(s).$$

$$\frac{d^3}{ds^3}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \frac{d}{ds}\mathfrak{L}\left\{t^2 \cdot e^{at}\right\}(s) = \mathfrak{L}\left\{-t^3 \cdot e^{at}\right\}(s).$$

...

Así, en la iteración se observa como es $\frac{d^m}{ds^m}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = (-1)^m \cdot \mathfrak{L}\left\{t^m \cdot e^{at}\right\}(s),$ aplicando adicionalmente la propiedad de linealidad.

De este modo hemos llegado a las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^m}{\partial s^m}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \dfrac{(-1)^m \cdot m!}{(s-a)^{m+1}}, \text{ y} \\ \dfrac{d^m}{ds^m}\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = (-1)^m \cdot \mathfrak{L}\left\{t^m \cdot e^{at}\right\}(s) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{L}\left\{t^m \cdot e^{at}\right\}(s) = \frac{m!}{(s-a)^{m+1}}.$$

2.3.7.- Transformada de Funciones Trigonométricas:

I) $\mathfrak{L}\left\{sen(kt)\right\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$ **II)** $\mathfrak{L}\left\{cos(kt)\right\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

→ *Demostración:*

$\mathfrak{L}\left\{sen(kt)\right\}$ y $\mathfrak{L}\left\{cos(kt)\right\}$ se pueden calcular directamente por partes, pero es mucho más simple pasar formalmente al campo complejo [19]. Así:

$$\mathfrak{L}\left\{cos(\omega t) + i sen(\omega t)\right\} = \mathfrak{L}\left\{e^{i\omega t}\right\} = \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Ahora, basta con identificar partes reales e imaginarias, y aplicar la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace.

---

[19] Todavía estamos manteniendo la variable s en el campo real, lo que es distinto a extender la definición de la Transformada a valores complejos de la variable s.

Cabe destacar que la verdadera potencia de la transformación de Laplace reside en su extensión al campo complejo, como se aprecia en la siguiente ***Fórmula de Inversión*** *de Riemann-Mellin:*

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F(a+it)e^{ist}dt, \quad a > r.$$

2.4.- Transformada de la Derivada.

Una de las aplicaciones a destacar de las transformadas de Laplace es la resolución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales.

Para ello será necesario evaluar expresiones como:

$$\mathfrak{L}\left\{{dy}/{dt}\right\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{L}\left\{{d^2y}/{dt^2}\right\}.$$

La simplicidad de las transformadas de Laplace de los casi-polinomios, que son precisamente las funciones que aparecen como soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes, no puede dejar de ser indicativo de algún tipo de conexión entre ambas teorías. En realidad, dicha conexión existe, y es extraordinariamente sencilla.

Así, si f' es continua para $t \geq 0$, al integrar por partes [20] obtenemos:

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \overset{(*)}{=} e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt =$$

$$= -f(0) + s\mathfrak{L}\{f(t)\} = sF(s) - f(0),$$

con $F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$.

Es decir, la **Transformada de la Derivada** tiene la forma siguiente:

$$\boxed{\mathfrak{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)}$$

Análogamente, la transformada de la segunda derivada [21] será, integrando:

---

[20] *Tomaremos* $(*): \begin{cases} u = e^{-st}; du = -s \cdot e^{-st}dt \\ dv = f'(t)dt; v = f(t) \end{cases}$ *, y supondremos que* f *es derivable y tiene crecimiento exponencial, es decir,* $e^{-st} f(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$

$$\mathfrak{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt \overset{(**)}{=} e^{-st} f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = -f'(0) + s\mathfrak{L}\{f'(t)\} =$$

$$= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Luego, la **Transformada de la Segunda Derivada** es de la forma:

$$\boxed{\mathfrak{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)}$$

Observando la naturaleza recursiva de estas expresiones se demuestra por inducción que la **Transformada de Laplace de la derivada n-ésima** es de la forma siguiente:

$$\boxed{\mathfrak{L}\{f^{n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0) = s^nF(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i f^{n-1-i}(0).}$$

Con $f(t)$, $f'(t)$, ... , $f^{n-1)}(t)$ funciones continuas en $[0,\infty)$, funciones de orden exponencial y $f^{n)}(t)$ continua parte por parte en $[0,\infty)$.

→ **Observación**: Si f solo está definida en $(0,\infty)$ hay que interpretar $f(0)$ como $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$.

2.5.- Convolución

Como ya comentamos brevemente en la nota al pié de página número 8, si las funciones f y g son continuas parte por parte en $[0,\infty)$, la convolución de f y g se representa por $f * g$ y se define con la integral:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

---

(21) *En el caso de la segunda derivada, la integración por partes es:* $(**): \begin{cases} u = e^{-st}; du = -s\cdot e^{-st}dt \\ dv = f''(t)dt; v = f'(t) \end{cases}$

Esto es, se define como la integral del producto de ambas funciones f y g después de que una sea invertida y desplazada una distancia τ.

El rango de integración dependerá del dominio sobre el que estén definidas las funciones.

Por ejemplo, la convolución de $f(t)=e^t$ y $g(t)=sen(t)$ es:

$$e^t * sen(t)=\int_0^t e^\tau sen(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\left[e^t-\cos(t)-sen(t)\right].$$

→ *Demostración*:

$$e^t * sen(t)=\int_0^t e^\tau sen(t-\tau)d\tau=\begin{cases} u=e^\tau; du=e^\tau d\tau \\ dv=sen(t-\tau)dt; v=\cos(t-\tau) \end{cases}$$

$$=e^\tau \cos(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t e^\tau \cos(t-\tau)d\tau=\begin{cases} u=e^\tau; du=e^\tau d\tau \\ dv=\cos(t-\tau)dt; v=-sen(t-\tau) \end{cases}$$

$$=e^t-\cos(t)-\left[-e^\tau sen(t-\tau)\Big|_0^t+\int_0^t e^\tau sen(t-\tau)d\tau\right]=$$

$$=e^t-\cos(t)-sen(t)-\int_0^t e^\tau sen(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^\tau sen(t-\tau)d\tau \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^\tau sen(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\left[e^t-\cos(t)-sen(t)\right].$$

→ *Observación*: Es posible determinar la Transformada de Laplace de la Convolución de dos funciones sin tener que evaluar una integral como la que acabamos de resolver (lo veremos más adelante, con el Teorema de la Convolución).

2.5.1.- Propiedades de la Convolución.

Las propiedades de los diferentes operadores de convolución son las siguientes:

I) Conmutatividad: $f*g=g*f$

II) Asociatividad: $f*(g*h)=(f*g)*h$

III) Distributiva: $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$

IV) Asociatividad con multiplicación escalar:

$$a(f*g)=(af)*g=f*(ag),\quad \forall a\in \mathrm{K},\quad \mathrm{K}=\mathbb{R}\ \ \acute{o}\ \ \mathbb{C}$$

V) Regla de Derivación:

$$\mathcal{D}\ (f*g)=\mathcal{D}\, f*g=f*\mathcal{D}\, g,$$

donde $\mathcal{D}\, f$ denota la derivada de f, o, en el caso discreto, el operador diferencia: $\mathcal{D}\, f(n)=f(n+1)-f(n).$

2.5.2.- Teorema de Convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas por tramos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial, entonces:

$$\mathfrak{L}\{f*g\}=\mathfrak{L}\{f(t)\}\ \mathfrak{L}\{g(t)\}=F(s)\ G(s).$$

→ *Demostración*: Sean:

$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau,$ y

$G(s)=\mathfrak{L}\{g(t)\}=\int_0^\infty e^{-s\beta}g(\beta)d\beta.$

Al proceder formalmente multiplicando ambas expresiones, obtenemos:

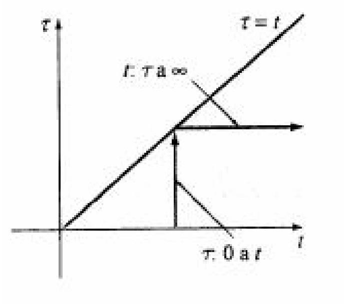
$$F(s)\cdot G(s)=\left(\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\beta}g(\beta)d\beta\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)}f(\tau)g(\beta)\ d\tau\ d\beta=$$

$$=\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)}g(\beta)d\beta.$$

Si mantenemos fija τ y escribimos $\begin{cases} t=\tau+\beta \\ dt=d\beta \end{cases}$, tenemos: $\begin{cases} \text{si } \beta=0\Rightarrow t=\tau \\ \text{si } \beta=\infty\Rightarrow t=\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$

$$F(s)\cdot G(s)=\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt.$$

Estamos integrando en el plano $t\ \tau$ sobre la parte que queda por debajo de la recta $\tau=t$ de la figura siguiente:



Así, puesto que f y g son continuas por tramos en $[0,\infty)$ y son de orden exponencial, es posible intercambiar el orden de integración:

$$F(s)\cdot G(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}dt=\mathfrak{L}\{f*g\}.$$

Luego,

$$\mathfrak{L}\{f*g\}=F(s)\cdot G(s)$$

Es decir, hemos demostrado que *la Transformada de Laplace de la Convolución de dos funciones es el producto de las Transformadas de* f y g.

3.- APÉNDICE I - Bibliografía

- "Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias". Carlos Fernández Pérez, Francisco José Vázquez Hernández y José Manuel Vegas Montaner. Editorial Thomson.
- "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado". Dennis G. Zill. Editorial Thomson.
- "Complex Análisis". Serge Lang. Editorial Springer.
- "Variable Compleja y Aplicaciones". James Ward Brown y Ruel V. Churchill. Editorial Mc Graw Hill.
- "Matemática Superior – Problemas Resueltos – Tomo 5 – Variable Compleja". A. K. Boiarchuk. Editorial URSS.
- "Fórmulas Matemáticas Fundamentales". V. Vodnev, A. Naumovich y N. Naumovich. Editorial Rubiños.
- Otra bibliografía (direcciones de Internet):
  - http://personales.ya.com/casanchi/mat/funciongamma01.htm
  - http://gaussianos.com/la-funcion-gamma-una-generalizacion-del-factorial/
  - http://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_gamma
  - http://books.google.es/books?id=s9F71NJxwzoC&pg=PA183&lpg=PA183&dq=Cauchy-Saalschutz&source=web&ots=crzq7boE35&sig=z99pcB05hRbPmqhYNXa9CDEKwSw&hl=es&sa=X&oi=book_result&resnum=1&ct=result
  - http://mathworld.wolfram.com/PuncturedPlane.html

- http://books.google.es/books?id=Edf4KrG_vlYC&pg=PA2&lpg=PA2&dq=Cauchy-Saalsch%C3%BCtz&source=web&ots=ZDrUYbD6O0&sig=7mcMtPjwMRR-QX4qAi2rEQaVW-4&hl=es&sa=X&oi=book_result&resnum=6&ct=result#PPA1,M1
- http://en.citizendium.org/wiki/Gamma_function
- http://functions.wolfram.com/GammaBetaErf/Gamma/introductions/Gamma/05/
- http://www.dm.uba.ar/materias/matematica_4/2007/1/tdl2000.pdf
- http://www.monografias.com/trabajos32/transformada-laplace/transformada-laplace.shtml
- http://mazinger.sisib.uchile.cl/repositorio/ap/ciencias_quimicas_y_farmaceuticas/apmat4f/07a1.html
- http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma-841/laplace/home.htm
- http://www.elprisma.com/apuntes/matematicas/fourierlaplace/default3.asp
- http://personales.ya.com/casanchi/mat/tlaplace.htm
- http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/EcuacionesDiferenciales/EDO-Geo/edo-cap5-geo/laplace/node3.html#1.3

4.- APÉNDICE II - Formulario

A continuación se muestra un resumen de las principales fórmulas (SIN demostración) que aparecen en este documento.

1.1.1.- Función Gamma

→ Representación Infinitesimal: $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x n! \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}, \ \forall x \notin \left[\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\right]$

→ Representación Integral: $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \ \forall x > 0$

→ Propiedad de Recursividad: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \ \forall x > 0$

→ Fórmula del Factorial Generalizado: $\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{N}$

→ Derivada: $\Gamma^{n)}(x) = \frac{d^n \Gamma(x)}{dx^n} = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\log t)^n \, dt$

→ Identidad de Weierstrass: $\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma x} x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{\frac{-x}{n}}$

→ Fórmula del Complemento o la Reflexión de Euler: $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sen(\pi x)}$

→ Ejemplos:

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
- $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$

→ Expresión integral de Cauchy-Saalschütz: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \left(e^{-t} - \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot \frac{t^j}{j!} \right) dt, \ \forall k \in \mathbb{N}$

tales que $\mathrm{Re}(x) < 0$ y $-(k+1) < \mathrm{Re}(x) < -k, \ k = 0,1,\ldots$

→ Expresión integral de Hankel: $\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_C t^{z-1} e^{-t} dt, \ \forall z \in \mathbb{C} - \left[\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\right]$

→ El Residuo de $\Gamma(z)$ en los polos z_n de la función, $z_n = -n, \ n = 0,1,2,\ldots$ es $\frac{(-1)^n}{n!}$

1.1.2.- Función Beta $\left[\forall x, y>0\right]$

→ Representación Integral: $\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

→ Representación Trigonométrica: $\beta(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(t))^{2x-1}(\cos(t))^{2y-1}dt$

→ Otra Representación Integral: $\beta(x,y)=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$

→ Relación entre las funciones Gamma y Beta: $\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

1.1.3.- Función de Mittag-Leffler

→ Definición: $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \ si\ \ \mathrm{Re}(\alpha)>0$

→ Casos Particulares:

- Función Exponencial: $E_{1,1}(z)=e^z$
- Suma de una Progresión Geométrica: $E_{0,1}(z)=\frac{1}{1-z}$
- Coseno Hiperbólico: $E_{2,1}(z)=\cosh(\sqrt{z})$
- Función Error: $E_{\frac{1}{2},1}(z)=\exp(z^2)\cdot erfc(-z)$

1.3.- Integral Fraccionaria

→ Fórmula de Cauchy para la Integral Iterada:

$$\int_a^x dx_1\int_a^{x_1}dx_2....\int_a^{x_{n-1}}f(t)\,dt \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1}\ f(t)\,dt \quad = \quad I_{a+}^n f(x)$$

→ Integral Fraccionaria de Liouville (también denominada de *Weyl)*:

$$\left(I_+^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,\ \text{con}\ \alpha\in\mathbb{R}^+\ \text{y}\ x\in(-\infty,+\infty)$$

→ Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α :

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}^{+} \text{ y } x\in[a,b]$$

- Propiedades:
  - $\lim_{\alpha\to 0}\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=f(x)$
  - $\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=0 \;\leftrightarrow\; f(x)=0$
  - *Propiedad de Semi-Grupo*: $\left(I_{a+}^{\alpha}\left(I_{a+}^{\beta} f\right)\right)(x)=\left(I_{a+}^{\alpha+\beta}(f)\right)(x)$

→ Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α por la izquierda:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=\left(\frac{d^n}{dx^n}I_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}}dt,\;\; n=\lceil\alpha\rceil,\; x\in[a,b]$$

→ Derivada Fraccionaria de Liouville:

$$\left(D_{+}^{\alpha} f\right)(x)=\left(\frac{d^n}{dx^n}I_{+}^{n-\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}}dt$$

→ Propiedades de la Derivada Fraccionaria $\left[f\in L^1(a,b),\; \forall x\in(a,b)\right]$

- Si $\beta>\alpha,\; \left(D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta} f\right)(x)=I_{a+}^{\beta-\alpha} f(x)$
- Si $\alpha>\beta,\; \left(D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta} f\right)(x)=D_{a+}^{\alpha-\beta} f(x)$
- $\left(D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=f(x)$
- $\left(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n}\left(D_{a+}^{\alpha-j} f\right)(a)\frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$

- Al aplicar el operador derivada usual: $\left[r \in \mathbb{N}\right]$

    - Si $r \leq n,\ \left(\frac{d^r}{dx^r} I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = I_{a+}^{\alpha-r} f(x)$

    - Si $r > n,\ \left(\frac{d^r}{dx^r} I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = D_{a+}^{r-\alpha} f(x)$

    - $\left(\frac{d^r}{dx^r}\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)\right)(x) = D_{a+}^{\alpha+r} f(x)$

    - $\left(D_{a+}^{\alpha}\left(\frac{d^r}{dx^r} f\right)\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha+r}(f)\right)(x) - \sum_{j=1}^{r}\left(D_{a+}^{r-j} f\right)(a)\frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}$

- **No** se verifica la propiedad de Semi-Grupo, por tanto:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}\left(D_{a+}^{\beta} f\right)\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha+\beta}(f)\right)(x) - \sum_{j=1}^{m}\left(D_{a+}^{\beta-j} f\right)(a)\frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}$$

→ <u>Derivadas e Integrales Fraccionarias de Polinomios</u>:

- $I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}(x-a)^{\gamma+\alpha-1}$, i.e. $I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)}(x-a)^{\gamma+\alpha}$

- $D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(x-a)^{\gamma-\alpha-1}$, i.e. $D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}(x-a)^{\gamma-\alpha}$

    - Caso $\gamma = \alpha,\ D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots., n$

    - Caso $\gamma = 1,\ D_{a+}^{\alpha}(1) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$

→ <u>Función Exponencial y Función de Mittag-Leffler</u>: $\left[\forall \alpha \in \mathbb{R}\right]$

- Derivada Fraccionaria de Riemman-Liouville: $D_{a+}^{\alpha} e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda a}}{(x-a)^{\alpha}} E_{1,1-\alpha}(\lambda x - \lambda a)$

- Derivada Fraccionaria de Liouville: $D_{+}^{\alpha} e^{\lambda x} = \lambda^{\alpha} e^{\lambda x}$

- Derivada de la función de Mittag-Leffler:

$$D_{a+}^{\alpha}\left(x-a\right)^{\gamma-1} E_{\mu,\gamma}\left(\lambda\left(x-a\right)^{\mu}\right)=\left(x-a\right)^{\gamma-\alpha-1} E_{\mu,\gamma-\alpha}\left(\lambda\left(x-a\right)^{\mu}\right)$$

→ <u>Derivadas Fraccionarias de Caputo</u>:

- $$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=\left(I_{a+}^{n-\alpha}\frac{d^{n}}{dx^{n}} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{x}\frac{\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(f\left(t\right)\right)}{\left(x-t\right)^{\alpha-(n-1)}}dt$$

    - *Propiedades*:

        - $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)= f\left(x\right)$

        - $\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)+\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dfrac{f^{(j)}\left(a^{+}\right)}{\Gamma\left(1+j-\alpha\right)}\left(x-a\right)^{j-\alpha}$

- $$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha} f\right)(x)=D_{a+}^{\alpha}\left(f\left(x\right)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}\left(a+\right)}{j!}\left(x-a\right)^{j}\right)$$

    - *Consecuencia relación Derivada Fraccionaria Riemann-Liouville y Caputo:*

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)\left(a+\right)=0 \quad\leftrightarrow\quad f^{(j)}\left(a+\right)=0, \qquad j=0,1,2,\ldots,n-1$$

2.2.2.- La Transformada de Laplace

→ <u>Definición</u>: $\left[\forall t\geq 0\right]$

- *Versión Unilateral:* $\mathfrak{L}\left\{f(t)\right\}(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt,\ \ \forall s\in\mathbb{R}/s>a,$ donde a es una constante que depende del comportamiento de crecimiento de $f(t)$.

- *Versión Bilateral*: $\mathfrak{L}\left\{f(t)\right\}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$

→ Tabla de Transformadas de Laplace:

- $\mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \;\; s > 0$

- $\mathfrak{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \;\; s > 0$

- $\mathfrak{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}, \;\; s > a$

- $\mathfrak{L}\left\{t^m e^{at}\right\} = \frac{m!}{(s-a)^{m+1}}, \;\; s > a$

- $\mathfrak{L}\{sen(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2}\;, \;\; s > 0$

- $\mathfrak{L}\{cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}\;, \;\; s > 0$

- $\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t,\alpha)\right\} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\mathfrak{L}\{f(t,\alpha)\}$

- $\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\{f(t)\}(s) = \mathfrak{L}\{-t \cdot f(t)\}(s)$

- $\mathfrak{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \;\; \forall n \in \mathbb{Z}^+$

- $\mathfrak{L}\left\{t^a\right\} = \frac{1}{s^{a+1}}\Gamma(a+1), \;\; \forall n \notin \mathbb{Z}^+$

→ Propiedades:

- *Linealidad:* $\mathfrak{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathfrak{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathfrak{L}\{f_2(t)\}, \;\; \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- *Desplazamiento:* $\mathfrak{L}\left\{f(t)e^{at}\right\}(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}(s-a), \;\; \forall a \in \mathbb{R}$

→ Transformada de la Derivada:

- $\mathfrak{L}\left\{ f\,'(t) \right\} = s \cdot F(s) - f(0)$

- $\mathfrak{L}\left\{ f\,''(t) \right\} = s^2 F(s) - sf(0) - f\,'(0)$

  ...

- $\mathfrak{L}\left\{ f^{\,n)}(t) \right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f\,'(0) - ... - f^{\,n-1}(0) = s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i f^{\,n-1-i}(0)$

2.5.- Convolución

→ Definición: $f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$

→ Propiedades:

- *Conmutatividad:* $f * g = g * f$

- *Asociatividad:* $f * (g * h) = (f * g) * h$

- *Distributiva:* $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

- *Regla de Derivación:* $\mathcal{D}\,(f * g) = \mathcal{D} f * g = f * \mathcal{D}\, g$

→ Teorema de Convolución:

$$\mathfrak{L}\left\{ f * g \right\} = \mathfrak{L}\left\{ f(t) \right\} \mathfrak{L}\left\{ g(t) \right\} = F(s)\; G(s)$$

■