



“PROYECCION Y ESTUDIO DE UNA POBLACION.  
EL PAPEL DE LA MORTALIDAD”

Ana de Vicente Merino  
Julio Hernández March  
Irene Albarrán Lozano  
Cruz Ramírez Pérez

## INDICE

	<b>Página</b>
<b>PRESENTACION DE AUTORES</b> .....	3
<b>INTRODUCCION: “Incidencia de la Mortalidad en las Proyecciones Financiero-Actuariales”</b> .....	3
<b>CAPITULO I: “Una Proyección de la Mortalidad”</b>	
1. Presentación .....	4
2. La proyección de la mortalidad .....	4
3. Un modelo matemático .....	4
4. Un caso práctico .....	5
- Fase I: Estudio de la mortalidad presente y pasada en España .....	5
- Fase II: Hipótesis sobre el comportamiento futuro de la mortalidad .....	5
- Fase III: Aplicación de un modelo matemático .....	6
- Fase IV: Elaboración de la tabla de mortalidad completa .....	12
<b>CAPITULO II: “Evolución Histórica de las Tablas de Mortalidad”</b>	
1. Presentación .....	14
2. El modelo biométrico: hipótesis básicas y variables principales .....	14
3. Leyes de mortalidad .....	16
3.1. Principales modelos: exponencial, de De Moivre, de Gompertz y de Makeham .....	17
3.2. Modelos de Weibull, Pareto y otros .....	19
4. La tabla de supervivencia o de vida .....	19
4.1. Funciones biométricas .....	20
4.2. Elementos básicos de una tabla estática .....	22
5. Evolución histórica: de Ulpiano a las tablas dinámicas .....	23
<b>CAPITULO III: “Las Tablas de Mortalidad PERM/F2000”</b>	
1. Presentación .....	28
2. Las tablas suizas .....	28
3. Las ventajas de una tabla dinámica .....	29
4. Datos de partida para la mortalidad de base .....	30
5. Tabla de mortalidad de la población .....	31
6. Determinación del “factor de selección” .....	31
7. Mortalidad de base .....	32
8. Proyección .....	32
9. La tabla para la nueva producción (PERM/F 2000 P).....	33
<b>ANEXOS</b>	
Anexo 1: Cálculo de las tasas de mortalidad por grupos de edad en la tabla de 1996 .....	35
Anexo 2: Principales resultados para los hombres .....	36
Anexo 3: Tasas de mortalidad proyectadas	
- De Mujeres .....	41
- De Hombres .....	43
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	
Del capítulo I .....	45
Del capítulo II .....	45
Del capítulo III .....	46

## **PRESENTACION DE AUTORES**

**Ana de Vicente Merino es Catedrática de Economía Financiera y Actuarial de la UCM.**

**Julio Hernández March es Profesor de Estadística de la UCM.**

**Irene Albarrán Lozano es Profesora Titular de Estadística Actuarial en la Universidad de Extremadura.**

**Cruz Ramírez Pérez es Responsable de los Servicios Actuariales de La Suiza de Reaseguros España.**

## **INTRODUCCION: INCIDENCIA DE LA MORTALIDAD EN LAS PROYECCIONES FINANCIERO-ACTUARIALES**

Uno de los problemas fundamentales a considerar en la evolución de los sistemas de protección social en general, y de la Seguridad Social en particular, es ver el mantenimiento de su equilibrio financiero a medio y largo plazo para lo cual es necesario conocer cuál será su comportamiento futuro. Con este fin conviene efectuar previsiones sobre la evolución de todas las variables y los distintos aspectos (demográficos y económicos) de los sistemas.

Varios son los procedimientos para realizar previsiones, bien a través de modelos econométricos o actuariales. Nosotros vamos a verlo a través de éstos últimos basados en proyecciones demográficas y económicas.

La utilización de proyecciones para estudiar la evolución de los fenómenos, si bien es la metodología propia de los sistemas financiados por reparto también permite otras aplicaciones: conocer la evolución de la variables demograficas relacionadas con la gestión de una cartera de valores o con la realización de presupuestos plurianuales.

A partir de este planteamiento el Seminario de Población que se llevó a cabo el 10 de mayo del 2001 en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la UCM se centró, básicamente, en la influencia de la mortalidad en las proyecciones actuariales bajo determinadas hipótesis de las variables como, por ejemplo, la fecundidad, la mortalidad, el empleo, actividad etc.

Las proyecciones elaboradas a partir de la información base se tratan en términos de aleatoriedad modelizando las distintas probabilidades que en algunos casos son contrastadas mediante ajustes estadísticos. Este procedimiento se aplica a los distintos colectivos (tanto al de activos como al de pasivos) de un sistema de protección social que permitirá determinar entre otros objetivos ese equilibrio financiero entre ingresos y gastos en un determinado horizonte temporal.

Medir la incidencia de la mortalidad en un colectivo requiere elaborar una tabla de mortalidad. En este contexto, el tiempo resulta un elemento determinante. De una parte, la influencia que tiene la mortalidad sobre la población varía a lo largo del tiempo. Esto lleva a la necesidad de estimar el comportamiento futuro de dicho fenómeno demográfico, con objeto de anticipar sus repercusiones. De otra parte, con el transcurso del tiempo se han ido mejorando los instrumentos de valoración, merced al avance de la Ciencia Actuarial. A continuación, en el capítulo I se estudia un procedimiento para proyectar la mortalidad, y su aplicación a la población española en el periodo 2.001-2.025. En el capítulo II se analiza el contenido, los fundamentos y la evolución histórica de las tablas de mortalidad. Finalmente, en el capítulo III se explica el proceso de realización de las tablas PERM/F2000<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Cruz Ramírez Pérez formó parte del equipo de Swiss Re Life & Health que participó en la elaboración de las mismas.

## CAPITULO I: UNA PROYECCIÓN DE LA MORTALIDAD

### 1.- Presentación.

Si el estado actual de una población está en función de la evolución presente y pasada de los tres procesos demográficos que la determinan, a saber, fecundidad, mortalidad y movimientos migratorios parece evidente que para conocer el volumen y la composición futura de la misma debamos estimar el comportamiento futuro de dichos procesos demográficos.

Por otro lado, el estado de una población en un momento dado presenta una composición por sexo y edad concreta que, a su vez, condiciona la fecundidad, la mortalidad y la movilidad.

Si bien sexo y edad son los factores de mayor influencia en dichos procesos, hay otros como las características socioeconómicas, culturales o biofísicas que también inciden en la demografía.

Por todo lo anterior, proyectar una población exige estimar la intensidad, al menos por sexo y edad, con la que los tres procesos demográficos se van a dar en el futuro.

### 2.- La Proyección de la Mortalidad.

En el caso de las defunciones, si la tabla de mortalidad es el instrumento por excelencia que nos permite estudiar los fallecimientos por sexo y edad, proyectar la mortalidad no es otra cosa que estimar una tabla de mortalidad en un periodo futuro concreto.

Para lograr ese objetivo se deben de cubrir las siguientes etapas:

- **Primero:** Estudiar la experiencia presente y pasada de la mortalidad en la población de que se trate;
- **Segundo:** Efectuar unas hipótesis sobre el comportamiento esperado de la variable en el futuro. En esta segunda etapa resultará primordial comparar la mortalidad de la población con la de otras de similares características socioeconómicas y culturales que, en el momento presente, haya superado la fase en la que pudiera encontrarse la población sobre la que efectuar la proyección;
- **Tercero:** Aplicar un modelo matemático que proyecte alguno de los elementos que conforman una tabla de mortalidad;
- **Cuarto:** Completar la tabla de mortalidad, por sexo y edad, con el resto de los elementos que la componen.

### 3.- Un Modelo Matemático.

Corresponde al modelo explicado por **Ricard Génova** (Génova, R. et al.;1997; tomado, a su vez, de Génova, R. et al;1994).

El modelo se basa en lo siguiente:

1.- El elemento que se proyecta es la esperanza de vida al nacer de las mujeres hasta un máximo alcanzable en un futuro teórico muy alejado del año horizonte (último año para el que se proyecta).

2.- Una función matemática permite hallar los valores intermedios de las esperanzas de vida, entre el proporcionado por la última tabla conocida y el máximo teórico, acorde con la evolución registrada en el pasado.

- 3.- Se ajusta la esperanza de vida del año horizonte entre las correspondientes a dos tablas tipo<sup>2</sup>. Con ello se obtiene un coeficiente con el que se van a calcular las tasas específicas de mortalidad, por grupos de edad, de la tabla del año horizonte por interpolación lineal entre las de las tablas tipo.
- 4.- Se calculan las tasas específicas de mortalidad de las tablas de los años intermedios interpolando linealmente entre las tasas de la última tabla conocida y la estimada en el año horizonte.
- 5.- Para los hombres el cálculo es análogo una vez que se calcula la esperanza de vida máxima, para lo que se toma la relación existente entre las esperanzas de vida femeninas y masculinas en las tablas tipo.

#### **4.- Un Caso Práctico.**

Partiendo de la última tabla de mortalidad conocida para la población española, la de 1996 (calculada con los datos del bienio 1996-97), he proyectado la mortalidad para el periodo 2001-2025 utilizando el modelo matemático anterior.

A partir de lo apuntado en el primer epígrafe de esta exposición, el procedimiento constaría de las siguientes fases.

##### **Fase I: Estudio de la Mortalidad Presente y Pasada en Nuestro País.**

La mortalidad española ha experimentado un descenso muy notable a lo largo del siglo XX. Valgan dos datos como botón de muestra: la mortalidad infantil ha pasado de 186 por mil a principios de siglo (Fernández, J.A. y Leguina, J.,1991) a 5,66 por mil en el año 2000 (Population Reference Bureau, 2000) y la esperanza de vida al nacer de 34,8 años en 1900 a 81,9 años para las mujeres y 74,7 para los hombres (I.N.E., 1999; pág.22). Ello ha situado a España entre los países con menor mortalidad del mundo; en concreto y con respecto a la última medida, sólo Francia en las mujeres (con 82 años de esperanza de vida), y Suecia e Italia en los hombres (con 76,5 años y 74,9, respectivamente) superan a España dentro del conjunto de países de la U.E. (I.N.E., 1999; pág.22).

Este proceso ha ido acompañado de una reducción de la fecundidad, especialmente intensa en el último cuarto de siglo, lo que ha motivado una población envejecida con una pirámide de población que se ha estrechado en su base y ensanchado en su cima.

##### **Fase II: Hipótesis Sobre el Comportamiento Futuro de la Mortalidad.**

Está generalmente aceptado que mejorar este nivel de mortalidad no parece tarea fácil y que, en todo caso, se necesitará un periodo largo de tiempo para conseguirlo.

La comparación del caso español con algún otro país que se encuentre más avanzado, en lo que a la lucha por la vida se refiere, supone pensar que las ganancias de mortalidad vendrán más por la reducción de la tasa de mortalidad infantil (3,5 por mil en Suecia en el año 2000) que por la prolongación de la vida en su etapa final.

---

<sup>2</sup> Una tabla tipo es una tabla modelo que no se corresponde con la mortalidad de ninguna población real y que se forma a partir de la combinación de tablas de diversas poblaciones. Las tablas tipo se clasifican por niveles, según la mortalidad. Niveles altos se corresponden con esperanzas de vida al nacer mayores.

De lo anterior se desprende que lo más razonable parece ser establecer una hipótesis de una disminución lenta de la mortalidad a lo largo del próximo siglo, estableciendo una esperanza de vida femenina de 86 años en el año 2101.

### Fase III: Aplicación de un Modelo Matemático.

Pasos en la aplicación del modelo **en mujeres**:

- 1) Como se acaba de indicar se fija una esperanza de vida de 86 años alcanzable en el año 2101 alejado del año horizonte, el 2025.
- 2) A continuación se calculan las esperanzas de vida de los años intermedios. Dichas esperanzas estarán entre la de la tabla de mortalidad del año 1996, que es la de partida, y la máxima del año 2101. Ello a partir de lo siguiente:
  - 2.a) Se parte de las esperanzas de vida  $e_0^t$  de los años 1970, 1975, 1980, 1985, 1990 y 1996:

**Cuadro 1. Mujeres: esperanza de vida al nacer observada en el pasado.**

Año	$e_0^t$ observada
1970	75,06
1975	76,21
1980	78,61
1985	79,69
1990	80,49
1996	81,88

2.b) Se transforman en logits a partir de una función logit recomendada por el Banco Mundial, que es la siguiente:

$$\text{Logit}(e_0^t) = \ln \left[ \frac{e_0^{\max} - e_0^t}{e_0^t - e_0^{\min}} \right] \quad (1)$$

donde para una  $e_0^{\max} = 86$  se ha fijado, mediante tanteo, una  $e_0^{\min} = 30$  que según el autor del modelo es el valor que proporciona mejores resultados. Los valores transformados aparecen en el cuadro 2.

**Cuadro 2. Mujeres: logit correspondientes a las esperanzas observadas**

Año	$e_0^t$ observada	Logit ( $e_0^t$ ) observado
1970	75,06	-1,4156
1975	76,21	-1,5518
1980	78,61	-1,8837
1985	79,69	-2,0637
1990	80,49	-2,2152
1996	81,88	-2,5331

2.c) A continuación se construye un modelo de regresión lineal en el que los logits aparecen como variable endógena (y) y los años como variable exógena (x). Los resultados de la estimación son los siguientes:

**Cuadro 3. Mujeres: coeficientes de la recta de regresión**

		Coeficientes no estandarizados		t	Sig.	Intervalo de confianza para B al 95%	
Modelo		B	Error típ.			Límite inferior	Límite superior
1	(Constante)	83.568	4.533	18.437	.000	70.983	96.152
	x	-4.313E-02	.002	-18.866	.000	-.049	-.037

a Variable dependiente: y

**Cuadro 4. Mujeres: resumen del modelo.**

Modelo	R	R cuadrado	Error típ. de la estimación
1	.994	.989	4.92094E-02

a Variables predictoras: (Constante), x

La recta de regresión estimada queda:

$$\hat{y}_i = 83,568 - 0,04313 * x_i \quad (2)$$

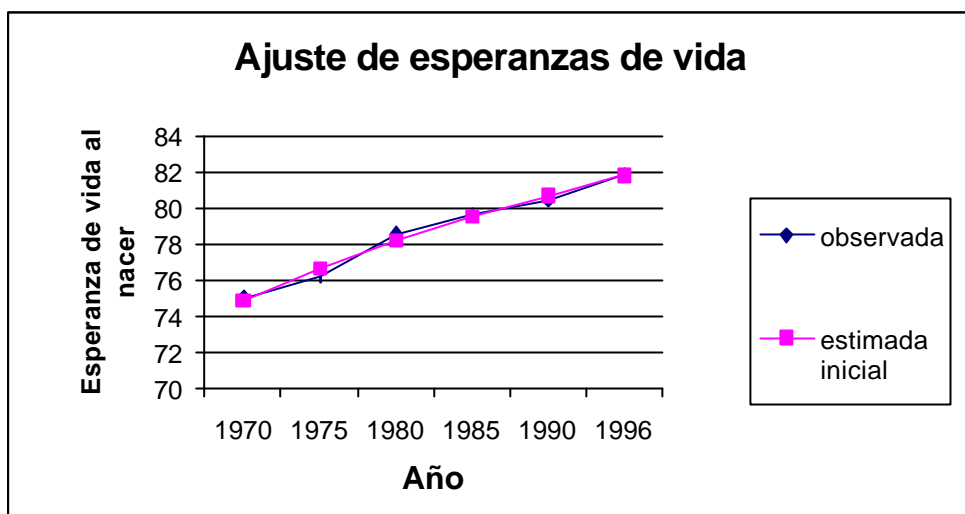
a partir de la cual se calculan los logit estimados para los años 1970 a 2101 (ver columna D del cuadro 5).

2.d) Los logit estimados para cada uno de los años se transforman en esperanzas de vida mediante la siguiente expresión (ver columna E del cuadro 5):

$$e_0^t = e_0^{\min} + \frac{(e_0^{\max} - e_0^{\min})}{(1 + \exp^{-\text{Logit}(e_0^t)})} \quad (3)$$

La evolución de la serie de esperanzas observada y estimada (columnas B y E, respectivamente, del cuadro 5), para el periodo 1970-96 queda reflejada en el gráfico 1.

**Gráfico 1. Mujeres: esperanza de vida observada y estimada en el periodo 1970-96.**



2.e) En la serie estimada final se utilizan las esperanzas observadas para los años 1970 a 1996. En el año 1996 la  $e_0^t$  observada es 0,0544 años mayor que la estimada (81,88 frente a 81,83). La diferencia entre ambos se distribuye progresivamente en un periodo de 20 años, desapareciendo en el año 2016 (ver columna F):

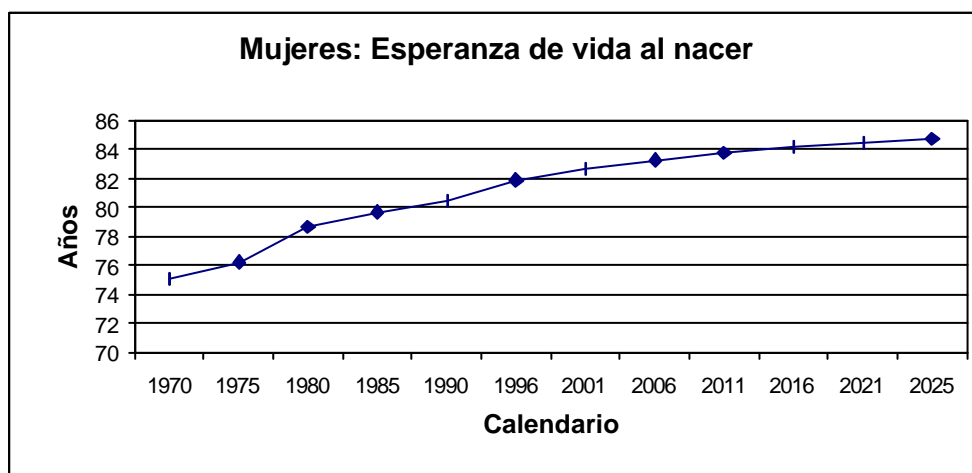
- en 1996:  $e_0^t = 81,83 + (0,0544 * 1,00) = 81,88$
- en 2001:  $e_0^t = 82,59 + (0,0544 * 0,75) = 82,63$
- en 2006:  $e_0^t = 83,22 + (0,0544 * 0,50) = 83,24$
- en 2011:  $e_0^t = 83,73 + (0,0544 * 0,25) = 83,75$
- en 2016:  $e_0^t = 84,16 + (0,0544 * 0,00) = 84,16$



**Cuadro 5. Mujeres: logit y esperanzas estimadas.**

A	B	C	D	E	F
Año	$e_0^t$ observada	Logit ( $e_0^t$ ) Observado	Logit ( $e_0^t$ ) Estimado	$e_0^t$ estimada inicial	$e_0^t$ estimada final
1970	75,06	-1,4156	-1,3975	74,90	75,06
1975	76,21	-1,5518	-1,6132	76,70	76,21
1980	78,61	-1,8837	-1,8288	78,25	78,61
1985	79,69	-2,0637	-2,0445	79,58	79,69
1990	80,49	-2,2152	-2,2601	80,71	80,49
1996	81,88	-2,5331	-2,5189	81,83	81,88
2001			-2,7346	82,59	82,63
2006			-2,9502	83,22	83,24
2011			-3,1658	83,73	83,75
2016			-3,3815	84,16	84,16
2021			-3,5971	84,51	84,51
2026			-3,8128	84,79	84,79
2031			-4,0284	85,02	85,02
2036			-4,2441	85,21	85,21
2041			-4,4597	85,36	85,36
2046			-4,6754	85,48	85,48
2051			-4,8910	85,58	85,58
2056			-5,1067	85,66	85,66
2061			-5,3223	85,73	85,73
2066			-5,5380	85,78	85,78
2071			-5,7536	85,82	85,82
2076			-5,9693	85,86	85,86
2081			-6,1849	85,88	85,88
2086			-6,4006	85,91	85,91
2091			-6,6162	85,93	85,93
2096			-6,8319	85,94	85,94
2101			-7,0475	85,95	85,95

El gráfico 2 nos muestra la evolución de la esperanza de vida al nacer para el periodo 1970-1996, con datos observados, y para el periodo de proyección 2001-2025, con datos estimados.

**Gráfico 2. Mujeres: esperanza de vida  $e_0^t$  estimada final.**

2.f) Por fin se calculan las esperanzas de vida para cada uno de los años intermedios de la serie, por medio de una interpolación lineal entre las esperanzas de vida ajustadas de los años calculados. Por ejemplo, para el periodo 2001-2006 el cálculo sería el siguiente:

- en 2002:  $e_0^t = 82,63 + ((83,24-82,63)*0,2) = 82,75$ ;

- en 2003:  $e_0^t = 82,63 + ((83,24-82,63)*0,4) = 82,87$ ;

- en 2004:  $e_0^t = 82,63 + ((83,24-82,63)*0,6) = 83,00$ ;

- en 2005:  $e_0^t = 82,63 + ((83,24-82,63)*0,8) = 83,12$ ;

Con lo que la serie completa final estimada de esperanzas de vida para el periodo de proyección 2001-2025 queda como refleja el cuadro 6.

**Cuadro 6. Mujeres: serie estimada de esperanzas de vida para el periodo 2001-2025.**

AÑO	$e_0^t$ estimada anual	AÑO	$e_0^t$ estimada anual
1970	75,06	2009	83,55
1975	76,21	2010	83,65
1980	78,61	2011	83,75
1985	79,69	2012	83,83
1990	80,49	2013	83,91
1996	81,88	2014	83,99
1997	82,03	2015	84,08
1998	82,18	2016	84,16
1999	82,33	2017	84,23
2000	82,48	2018	84,30
2001	82,63	2019	84,37
2002	82,75	2020	84,44
2003	82,87	2021	84,51
2004	83,00	2022	84,56
2005	83,12	2023	84,62
2006	83,24	2024	84,68
2007	83,34	2025	84,73
2008	83,44		

3) Una vez que se dispone de la serie de esperanzas se calculan las tasas de mortalidad por edad para el año 2025. Esto se lleva a cabo mediante interpolación lineal de las tasas específicas de mortalidad de dos tablas tipo, precisamente de aquellas que encierren la esperanza de vida del año horizonte. En nuestro caso dicha esperanza de vida es 84,73 y se sitúa entre los 82,5 años de la tabla tipo de nivel 26 y los 85 años de la tabla tipo de nivel 27. El coeficiente  $C^t$  de interpolación que se va a utilizar es el siguiente:

$$C^{2025} = \frac{84,73 - 82,5}{85 - 82,5} = 0,8933 \quad (4)$$

El cálculo de la tasa de mortalidad en el grupo de  $x$  a  $x+4$  años será:

$$M^{2025}(x) = M_{niv27}(x) * C^{2025} + ((1 - C^{2025}) * M_{niv26}(x))$$

Por ejemplo, para  $x = 10$  la tasa correspondiente será:

$$M^{2025}(10) = 0,03 * 0,8933 + (1 - 0,8933) * 0,08 = 0,0353$$

Las tasas así calculadas, para el año 2025, se recogen en el cuadro 7. También se añaden las tasas de mortalidad del año de partida, 1996.

**Cuadro 7. Mujeres: tasas de mortalidad estimadas por grupos de edad en el año 2025 y tasas de mortalidad del año 1996.**

	TABLAS TIPO		TABLA DEL	TABLA DEL
	TABLA 26	TABLA 27	AÑO 2025	AÑO 1996
Edad	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$
0	4,05	2,84	2,9691	4,6910
1	0,37	0,3	0,3075	0,3043
5	0,09	0,03	0,0364	0,1497
10	0,08	0,03	0,0353	0,1524
15	0,2	0,11	0,1196	0,2603
20	0,29	0,23	0,2364	0,2946
25	0,37	0,3	0,3075	0,4530
30	0,44	0,34	0,3507	0,6990
35	0,61	0,45	0,4671	0,8124
40	0,96	0,7	0,7277	1,1309
45	1,5	1,08	1,1248	1,5243
50	2,38	1,9	1,9512	2,2441
55	3,43	2,39	2,5010	3,3884
60	5,34	3,62	3,8036	5,4127
65	8,42	5,33	5,6598	8,9299
70	15,26	9,78	10,3648	16,1654
75	30,55	21,68	22,6266	31,4193
80	61,15	47,9	49,3141	63,4963
85	114,14	97	98,8292	122,5649
90	198,72	180	181,9978	215,2836
95	322,71	306,13	307,8995	432,1436
100	499,2	488,43	489,5794	606,5190
$e_o^t$	82,5	85	84,73	81,88

4) A continuación se calculan las tasas de mortalidad específicas para el resto de los años de la proyección, es decir, desde el año 2001 hasta el 2024. De nuevo se efectúa, para cada año, una interpolación lineal; esta vez entre las tasas de la última tabla conocida, la de 1996 (ver anexo 1), y las de la estimada en el año horizonte, el 2025.

Como se puede observar en el cuadro 7 todos los grupos de edad, excepto el [1;4], presentan mayor tasa de mortalidad en 1996 que en el 2025. Es decir, todos los grupos de edad van a disminuir su mortalidad en el periodo 1996-2025, menos el [1;4] que se queda prácticamente igual. Esto hay que interpretarlo como que, en 1996, la mortalidad femenina en España en el tramo de edades [1;4] era extraordinariamente baja, en comparación con la de los restantes tramos.

En efecto, la tasa de mortalidad del citado tramo es de 0,3043 situándose muy cerca de la correspondiente de la tabla tipo de nivel 27, que es 0,03 y que se ha tomado como observación

más favorable en la interpolación lineal que ha originado las tasas de la tabla del año 2025 (ver cuadro 7). Sin embargo la mortalidad del resto de los tramos, en 1996, se sitúa entre las tasas de las tablas tipo de nivel 25 y 26 (de 95 años en adelante, incluso por encima de las de nivel 25), indicando un peor comportamiento de la mortalidad.

Volviendo al cálculo de las tasas específicas de mortalidad, el coeficiente  $C'$  se obtiene a partir de las esperanzas de las tablas de 1996 y del 2025.

Por ejemplo, para el año 2015:

$$C^{2015} = \frac{84,08 - 81,88}{84,73 - 81,88} = 0,77$$

Para ese año las tasas para el tramo de edad  $[x; x+4]$  se obtendrán como sigue:

$$M^{2015}(x) = M^{2025}(x) * C^{2015} + ((1 - C^{2015}) * M^{1996}(x))$$

Por ejemplo para  $x = 10$ :

$$M^{2015}(10) = 0,0353 * 0,77 + (1 - 0,77) * 0,1524 = 0,0623$$

El proceso se repetiría para todos los tramos de edad y para todos los años. El cuadro con las tasas de mortalidad para cada grupo de edad de todos los años se encuentra en el anexo 3.

5) Para los hombres el cálculo es análogo y lo único que cambia es la esperanza de vida máxima. La tabla tipo de nivel 27 tiene una esperanza de vida al nacer de 85 años para las mujeres y de 78,98 para los hombres. Si la esperanza máxima para las mujeres que se ha propuesto ha sido 86 años, la respectiva masculina será:

$$(86/85) * 78,98 = 79,91 \text{ años}$$

Los resultados principales para el caso de los hombres se recogen en el anexo 2.

#### **Fase IV: Elaboración de la Tabla de Mortalidad Completa.**

La última fase de la proyección supone completar el resto de los elementos que componen una tabla de mortalidad, en particular la probabilidad de fallecimiento a cada edad, y la probabilidad perspectiva de paso o probabilidad de supervivencia en una población estacionaria (aquella en la que el número de efectivos que entra y sale de la misma permanece constante en el tiempo).

Suponiendo la distribución uniforme de los fallecimientos, dentro del intervalo de edad considerado, los principales elementos de la tabla y su formulación (Génova et al., 1997) serían:

6) Probabilidad de fallecimiento  ${}_nq_x$ :

$${}_nq_x = \frac{2 * n * m_x}{2 + (n * m_x)} \quad (5)$$

7) Número de supervivientes  $l_x$ :

$$l_{x+n} = l_x * (1 - {}_nq_x) \quad (6)$$

8) Población estacionaria  ${}_nL_x$ :

$${}_nL_x = n * [0.5 * (l_x + l_{x+n})] \quad (7)$$

9) Probabilidad perspectiva de paso  ${}_nZ_x$ :

$${}_nZ_x = \frac{{}_nL_{x+n}}{{}_nL_x} \quad (8)$$

$$Z_0 = \frac{L_0 + {}_4L_1}{5 * l_0} \quad (9)$$

$${}_4Z_1 = \frac{{}_5L_5}{L_0 + {}_4L_1} \quad (10)$$

La tabla completa proyectada para una año cualquiera, por ejemplo el 2015, quedaría como se recoge en el cuadro 8.

**Cuadro 8. Mujeres: tabla de mortalidad proyectada en el año 2015.**

Edad	n	${}_nm_x$	${}_nq_x$	$l_x$	${}_nL_x$	${}_nZ_x$
0	1	3,3655	0,0034	100.000	99.832	0,9965
1	4	0,3067	0,0012	99.664	398.412	0,9988
5	5	0,0625	0,0003	99.542	497.631	0,9997
10	5	0,0623	0,0003	99.511	497.476	0,9995
15	5	0,1520	0,0008	99.480	497.210	0,9990
20	5	0,2498	0,0012	99.404	496.711	0,9985
25	5	0,3410	0,0017	99.280	495.978	0,9981
30	5	0,4308	0,0022	99.111	495.022	0,9976
35	5	0,5466	0,0027	98.898	493.814	0,9966
40	5	0,8205	0,0041	98.628	492.130	0,9949
45	5	1,2168	0,0061	98.224	489.631	0,9920
50	5	2,0186	0,0100	97.628	485.690	0,9883
55	5	2,7052	0,0134	96.648	479.993	0,9830
60	5	4,1739	0,0207	95.349	471.823	0,9740
65	5	6,4125	0,0316	93.380	459.533	0,9560
70	5	11,7000	0,0568	90.433	439.316	0,9144
75	5	24,6504	0,1161	85.293	401.710	0,8294
80	5	52,5784	0,2324	75.391	333.162	0,6889
85	5	104,2925	0,4136	57.874	229.525	0,5015
90	5	189,6592	0,6433	33.936	115.104	0,2856
95	5	336,4968	0,9138	12.106	32.873	0,0156
100	-	516,4954	1,0000	1.044	522	

## **CAPITULO II: EVOLUCION HISTORICA DE LAS TABLAS DE MORTALIDAD**

### **1. Presentación.**

Ofrecer una evolución histórica de las tablas de mortalidad y supervivencia implica partir, al menos, de la definición y el ámbito de aplicación de las tablas a las que se hace referencia. Sentar las bases del fenómeno de estudio que se quiere modelizar (la vida humana) facilita el repaso histórico al conocer los objetivos y la utilidad de esta herramienta clave en el contexto actuarial.

El fundamento y razón de ser de la existencia de las tablas de mortalidad radica en la Ciencia Actuarial, más concretamente en la Biometría. El principal objetivo de esta ciencia es la modelización del fenómeno actuarial cuantificando la probabilidad de ocurrencia de un suceso (siniestro en el contexto de los seguros generales y fallecimiento en el de los seguros de vida) con el fin de valorar en términos financieros las consecuencias económicas del mismo.

La Estadística Actuarial se encarga de determinar las leyes de probabilidad que sustentan los fenómenos actuariales y aparece asociada al tratamiento de diversos aspectos entre los que destaca, con relación a los seguros de vida, la Biometría que engloba a la Teoría de la Supervivencia junto con la construcción de tablas de supervivencia. Biometría como ciencia que estudia la supervivencia de los organismos vivos (en general, de los humanos aunque puede aplicarse asimismo a otras situaciones) mediante la aplicación de métodos estadístico-matemáticos. El fundamento para la construcción de las tablas de mortalidad radica en el llamado modelo biométrico

Los estudios de mortalidad día tras día van adquiriendo mayor importancia en los foros actuariales europeos e internacionales preocupados por establecer las tendencias futuras de la evolución de la mortalidad mediante el establecimiento de un modelo adecuado.

Toda investigación que tenga como objetivo una proyección hacia el futuro debe detenerse a analizar, y aprender de, el pasado. Reseñar los orígenes y la evolución de estos estudios supone el punto de partida indiscutible.

Antes de centrarnos en el “repaso histórico” propiamente dicho, se comentan las hipótesis básicas y variables principales del modelo biométrico, las principales leyes de mortalidad señalando su utilidad y, por último, se detallan los elementos básicos de una tabla de mortalidad estática y cómo se construye basándonos en las funciones biométricas fundamentales.

### **2. El modelo Biométrico**

La modelización de la supervivencia humana integra el denominado modelo biométrico, caracterizado por el tiempo biométrico de los individuos (su edad), es decir, periodo transcurrido desde el nacimiento de un individuo hasta el momento actual. El tiempo biométrico se distingue del tiempo físico o de calendario (momento en el que se hace una observación) y de la línea de la vida (intervalo de tiempo del que se conoce el principio pero no el final) considerándose que el tiempo físico es la suma del tiempo biométrico y la línea de vida.

El análisis de la Teoría de la Supervivencia se fundamenta en la variable edad del individuo (tiempo biométrico o interno del individuo) e implica la formulación de unas hipótesis de partida: homogeneidad, independencia y estacionariedad.

- *Homogeneidad* al suponer que todos los individuos objeto de estudio forman un grupo homogéneo respecto al fenómeno supervivencia, es decir, que el comportamiento estadístico de su edad de fallecimiento es idéntico siendo, por tanto, la única característica relevante del colectivo la edad.
- *Independencia* respecto a que no existe interacción o contagio entre los individuos lo que implica que la probabilidad de supervivencia de un individuo a una determinada edad es independiente de la supervivencia de cualquier otro individuo del mismo grupo. Esta hipótesis se traduce en que las probabilidades, para la edad de fallecimiento de un individuo, no dependen de la edad de fallecimiento de otro individuo cualquiera.
- Además, las probabilidades de supervivencia de los individuos no dependen del tiempo físico (fecha de nacimiento) sino, únicamente, del tiempo biométrico (edad del individuo) debido a la hipótesis de *Estacionariedad*. Esta hipótesis se considera bastante restrictiva sin más que tener en cuenta el hecho de que existen numerosos factores, además de la edad, que influyen en la mortalidad: características biológicas, condiciones del entorno (modo y estilo de vida, nivel cultural), elementos congénitos y factores externos (avances médicos y sanitarios).

Puede considerarse que la mortalidad es un fenómeno determinado por la edad excepto en dos casos: la mortalidad infantil (concentrada no en el primer año de vida sino en los primeros días) y la mortalidad juvenil (sobre todo motivada por factores circunstanciales: accidentes, drogas, alcohol... que poco tiene que ver con los factores biológicos).

El sexo es una variable fundamental en el análisis demográfico. En todas las poblaciones se registran diferencias según el sexo puesto que, desde el primer día de vida se observa un mayor número de muertes en los niños que en las niñas. Así, la esperanza de vida al nacer es bastante mayor en las mujeres que en los hombres.

La mortalidad varía con la edad, el sexo y el tiempo físico del calendario. El sexo y la edad son las características de mayor significado actuarial y que mantiene una permanente interrelación con el comportamiento de la población, por eso se distingue entre tablas de mortalidad de hombres y de mujeres. El clima y la profesión también deben ser tenidas en cuenta.

#### Principales probabilidades: función de supervivencia y tanto instantáneo

Los modelos biométricos más importantes se expresan en función de dos sucesos complementarios: sobrevivir a una edad concreta o no hacerlo, siendo la variable biométrica básica por excelencia la edad de fallecimiento de un recién nacido que se denota como  $X$ . Ésta variante permite calcular distintas probabilidades: que un recién nacido fallezca entre las edades  $x$  y  $x + t$ , que un recién nacido sobreviva a la edad  $x$  o que una persona de edad  $x$  fallezca entre las edades  $x$  y  $x + t$ .

En relación con las probabilidades más importantes caben destacar dos: la función de supervivencia y el tanto instantáneo de mortalidad.

La función de supervivencia  $S(x)$  proporciona para cada edad  $x$  la probabilidad de que un recién nacido alcance con vida dicha edad. El tanto instantáneo de mortalidad (o fuerza de mortalidad) es uno de los elementos claves del estudio actuarial en seguros de vida. Considerando que la probabilidad de que una persona de edad  $x$  fallezca entre las edades  $x$  y  $x'$  es

$$P(x < X \leq x' / X > x) = \frac{F(x') - F(x)}{1 - F(x)}$$

como  $X$  es una variable aleatoria continua con función de densidad  $f(x)$ , y suponiendo que  $x'$  es una edad muy cercana a  $x$ , esta probabilidad puede aproximarse por

$$\frac{f(x)(x' - x)}{1 - F(x)}.$$

El tanto instantáneo de mortalidad a la edad  $x$  se representa por  $\mu_x$ . Es mayor o igual a cero y se define como

$$\mathbf{m}_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{S(x)}$$

Se pueden expresar  ${}_tP_x$  (probabilidad de supervivencia) y  ${}_tq_x$  (probabilidad de fallecimiento) en función del tanto instantáneo  $\mathbf{m}_z$  en  $z$  ( $\mathbf{m}$ ) sin más que integrar en la expresión:

$$\mathbf{m}_z = -\frac{\partial \text{Ln}(S(z))}{\partial z}.$$

$$\int_x^{x+t} \mathbf{m}_z dz = -\int_x^{x+t} \frac{\partial \text{Ln}(S(z))}{\partial z} dz$$

$$-\int_x^{x+t} \mathbf{m}_z dz = \text{Ln}(S(x+t)) - \text{Ln}(S(x)) = \text{Ln} \frac{S(x+t)}{S(x)} = \text{Ln}({}_tP_x)$$

Así, las expresiones quedarían:

$${}_tP_x = e^{-\int_x^{x+t} \mathbf{m}_z dz} \quad {}_tq_x = 1 - e^{-\int_x^{x+t} \mathbf{m}_z dz}$$

$$\text{en } {}_xP_0 = e^{-\int_0^t \mathbf{m}_z dz}$$

### 3. Las leyes de mortalidad

Las probabilidades de supervivencia  $S(x)$  siguen una función matemática que genera un modelo. Existen distintos modelos de comportamiento de las principales funciones biométricas que se expresan en base a una forma funcional para la función de supervivencia, el tanto instantáneo de mortalidad o para las probabilidades de supervivencia o de fallecimiento y, a partir de éstas, sus implicaciones con el resto de probabilidades y funciones biométricas. En las aplicaciones prácticas, muchas veces se utilizan combinaciones de estas leyes aceptando diferentes modelos para distintos tramos de edades.

Las probabilidades básicas de muerte y supervivencia pueden calcularse fácilmente a partir de la ley de mortalidad. Las leyes de mortalidad son expresiones analíticas de la función de supervivencia que pretenden modelizar, teóricamente, el comportamiento de la mortalidad en función de la edad. Elegir el tipo de función que mejor se adapte y represente adecuadamente la mortalidad es el objetivo. La elección del tipo de función puede hacerse según los datos observados o estableciendo ciertas hipótesis correspondientes a las características propias de la función de supervivencia.

Una constante a lo largo de la historia ha sido la búsqueda de una ley de mortalidad que sea válida para cualquier población humana, es decir, encontrar la "ley universal de mortalidad" que, probablemente, no existe. Sin embargo, para determinadas poblaciones y ciertos tramos de edad, es posible encontrar el ajuste a alguna ley teórica (lo más típico es a la ley de Makeham).



A continuación se comentarán, únicamente, las leyes que históricamente se han considerado las más importantes, usuales y de aplicación sin pretender realizar una exposición exhaustiva sino ilustrativa.

La modelización de las expresiones analíticas puede realizarse sobre la función de supervivencia o sobre otras funciones relacionadas como la probabilidad de fallecimiento o el tanto instantáneo de mortalidad. En la práctica, no se considera una única función para todas las edades sino que se consideran distintas funciones para cada edad, o bien funciones que se adapten únicamente a intervalos delimitados oportunamente como pueden ser el caso de las edades infantiles o las extremas.

### 3.1. Principales modelos: exponencial, de De Moivre, de Gompertz y de Makeham

La *ley exponencial* supone que el tanto instantáneo de mortalidad es constante:

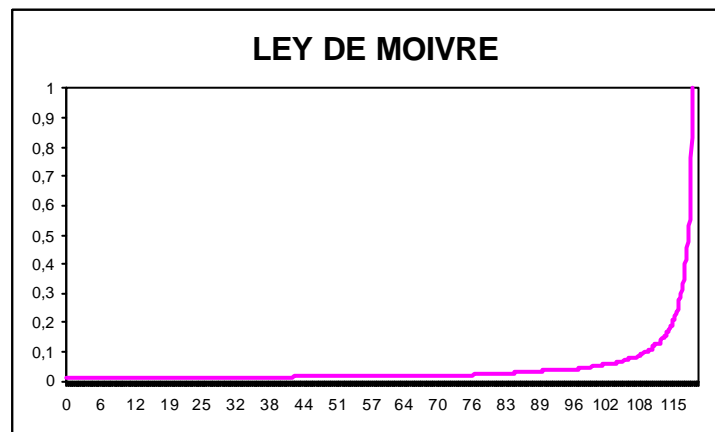
$$m_x = m \quad x \geq 0$$

Intuitivamente es claro que la fuerza de mortalidad debe aumentar con la edad. Esto implica la imposibilidad de ajustar una ley exponencial a una población real, salvo en períodos de tiempo muy cortos. Sin embargo, la simplicidad de esta ley, la facilidad de sus cálculos y su importancia histórica hacen que sea comentada en primer lugar.

La fuerza de mortalidad, como se ha mencionado, debe aumentar con la edad. La *ley de De Moivre* incorpora este efecto mediante una fórmula matemática sencilla siendo el tanto instantáneo de mortalidad:

$$m_x = \frac{1}{\omega - x} \quad x \geq 0$$

Siendo  $\omega$  la edad límite, la fuerza de mortalidad tiende hacia infinito cuando la edad lo hace hacia la edad límite.



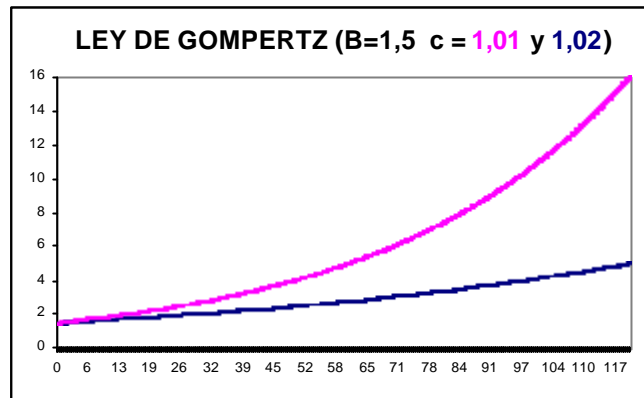
La principal crítica que se le hace a esta ley es a su hipótesis de partida: número de fallecimientos constante (igual para todas las edades) e independiente de la edad.

La *ley de Gompertz* asume que cada individuo presenta una resistencia a las enfermedades (y a fallecer por causas naturales) decreciente en función de la edad, por lo que la fuerza de

mortalidad crece con la edad y su crecimiento relativo  $\left(\frac{m'_x}{m_x}\right)$  es constante. Por tanto, se deduce que dicha fuerza de mortalidad crece exponencialmente.

Expresión:

$$m_x = Bc^x \quad x \geq 0, \quad B > 0, \quad c > 1$$

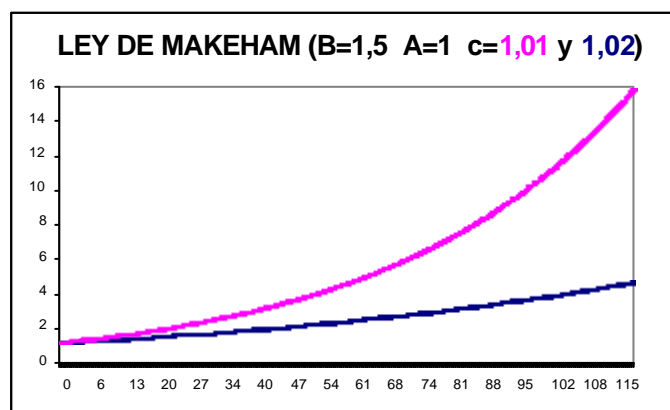


Se utiliza preferentemente para el tratamiento de las edades extremas de las tablas.

Posteriormente, *Makeham* enunció dos leyes de supervivencia. La *primera ley* considera al tanto instantáneo de mortalidad de esta ley añade simplemente una constante arbitraria, que representa la mortalidad accidental (azar) independiente de la edad, al tanto instantáneo de Gompertz. Por tanto, la muerte de un individuo es consecuencia de dos causas coexistentes: el azar y una resistencia (cada vez más débil) a la muerte conforme aumenta la edad, es decir, que además de considerar la mortalidad por causas naturales (igual que Gompertz) introduce la mortalidad accidental del individuo, independiente de la edad.

$$m_x = A + Bc^x \quad x \geq 0, \quad B > 0, \quad c > 1, \quad A > -B$$

Esta ley establece que el segundo sumando del tanto instantáneo de mortalidad coincide con el establecido por Gompertz y recoge la mortalidad por causas naturales (una inhabilidad creciente a resistir la destrucción) debidas a la edad. El primer sumando es independiente de la edad y recoge la mortalidad accidental (accidentes, intoxicaciones, epidemias, esto es, factores exógenos al individuo).



Esta ley presenta buenos ajustes en edades intermedias (adultas), mientras que proporciona problemas en las edades extremas de la tabla principalmente en las edades más jóvenes puesto que en las edades infantiles la mortalidad es decreciente. Es considerada la ley más conocida y ampliamente utilizada para ajustar diversas tablas de supervivencia.

La primera ley de Makeham tiene problemas de ajuste para las edades más jóvenes, por lo que se formula la *segunda* más elástica y fundamentada en la anterior, añadiendo a la fuerza de mortalidad otro sumando proporcional a la edad:

$$\underline{m} = A + Hx + Bc^x \quad x \geq 0, \quad B \text{ y } H > 0, \quad c > 1, \quad A > -B$$

Con estas leyes (o leyes parecidas del "tipo Makeham") se obtienen, a menudo, buenos ajustes en ciertos tramos de edad.

### 3.2. Modelos de Weibull, Pareto y otros

Existen otras muchas *leyes de mortalidad* como: la de *Weibull* que establece la siguiente expresión para el tanto instantáneo  $\underline{m} = k \cdot x^n$ , *Pareto* considera esta formulación:

$$\underline{m} = \frac{a}{x+b}, \quad \text{Risser, las de Dormoy (primera, segunda y tercera) que considera una función}$$

exponencial no negativa decreciente y convexa respecto de la edad. La de *Sang* modifica la ley de Dormoy suponiendo un comportamiento de la función de supervivencia geométrico respecto de la edad introduciendo, además, la existencia de otro factor diferente. *Lazarus* modifica la primera ley de Makeham teniendo en cuenta otro término para ampliar la utilidad hacia edades no necesariamente altas. La de *Babbage* supone una función de supervivencia polinomio de segundo grado. Se proponen *mixturas finitas* para obtener una función de densidad que combine en distintas proporciones varias de las leyes de supervivencia clásicas donde la estimación de los parámetros con distintos métodos entre los que destaca el de máxima verosimilitud apoyado en el algoritmo E.M., la estimación bayesiana, etc...

## 4.- La tabla de supervivencia o de vida

Una tabla de supervivencia (de vida o de mortalidad) contiene los elementos básicos que permiten calcular las probabilidades de muerte y supervivencia en una población homogénea a partir de las cuales se llevan a cabo los cálculos actuariales. Es la serie cronológica (registro estadístico) que expresa la reducción progresiva de un grupo inicial de individuos de la misma edad por efecto de los fallecimientos.

Es el mejor instrumento para conocer las condiciones de mortalidad de una población. Por tanto, miden la incidencia del fenómeno supervivencia/mortalidad en la población que se estudia. Son muy utilizadas día a día por los actuarios en sus tareas cotidianas tanto para el cálculo de primas, reservas matemáticas y de jubilación, bases técnicas de seguros y planes y fondos de pensiones como en determinados trabajos financieros.

La forma más tratada para la presentación de las mismas en la literatura (y extendida en el trabajo actuarial) ha sido la denominada forma tabular. Este modelo tabular clásico utiliza valores enteros de  $x$  para los que se calcula su correspondiente valor según  $S(x)$ .

Existen distintos tipos de tablas de mortalidad. Pueden ser de generación (basadas en el estudio de cohortes, como conjunto de individuos de una población que comparten la experiencia de un mismo suceso origen, definidas por el suceso-origen nacimiento) o de momento (un año concreto), abiertas (si dejan que se incorporen individuos al grupo inicial, es decir, éste no es

cerrado) o cerradas. Además, según se consideren una o varias causas de salida del colectivo analizado se habla de tablas de único (salida sólo por fallecimiento) o múltiples decrementos (considerándose también otros fenómenos adicionales al fallecimiento como puede ser la invalidez...).

Es importante diferenciar entre tablas de mortalidad para la población general o las de asegurados. Se ha comprobado empíricamente que la mortalidad de un grupo de personas que ha contratado un seguro es distinta a la de otro grupo cualquiera debido, entre otras causas a que, si se trata de un seguro de muerte las compañías exigen un examen médico previo. En el caso de un seguro de vida-ahorro es el propio asegurado quien, por sí mismo, juzga su estado de salud.

Existen varios métodos estadístico-económicos y actuariales para la estimación de la función de supervivencia. Tras un proceso de depuración y suavizado de los datos demográficos procedentes de los censos de población (INE) o de las estadísticas de población (Registro Civil) se realiza la estimación de los parámetros de las leyes y sus posteriores ajustes utilizando:

- 1).- Mínimos cuadrados ordinarios o máxima verosimilitud
- 2).- Polinomios ortogonales
- 3).- Técnicas no paramétricas: contrastes Chi cuadrado, Kolmogorov-Smirnov,...

4).- Método de King-Hardy o método de las sumas, siendo éste el único sistema propio (es decir, propiamente actuarial) que estima los parámetros de las leyes de mortalidad siendo aplicable a las distintas leyes expuestas anteriormente.

Una vez estimada la función de supervivencia, para la construcción de una tabla de vida se parte de la estimación de las funciones biométricas que la componen para el intervalo de edad considerado  $0 \leq x \leq \omega$ , suponiendo como edad límite  $\omega$  años, edad a la que la probabilidad de sobrevivir es nula.

Una vez demostrado que la función de supervivencia utilizada es decreciente, se verifica que para el intervalo de edades  $[0, \omega)$  dicha función es positiva (propiedad de la misma).

#### 4.1. Funciones biométricas

Generalmente el análisis de la supervivencia implica la definición de lo que se denomina "grupo cerrado" entendido, en este contexto, como aquél cuya única fuente de variación es la muerte de sus componentes. De esta manera, a partir de un número determinado de individuos que forman el grupo no existe ningún tipo de entrada y, únicamente, una causa de salida: la muerte.

Las expresiones matemáticas de las variaciones que sufre el grupo en función de su tiempo biométrico (edad de sus componentes) se denominan **funciones biométricas**. Son, básicamente, cuatro: función  $l(x)$ , función de fallecimiento, función del tanto de mortalidad y función del tanto de supervivencia.

##### 1.- Función $l(x)$ o $l_x$ .

Refleja el número de individuos procedentes del grupo inicial  $l_0$  que tienen exactamente la edad  $x$ . Así,

$l_0$  es el número de personas que tienen la edad inicial de estudio (en el caso de recién nacidos la edad inicial será, lógicamente, la edad 0). Es el primer valor de la función  $l_x$  y representa el número total de individuos que forman el grupo.

$l_x$  es el número de personas que quedan del grupo con edad exactamente  $x$ .

$l_w = 0$  es el último valor y, como era de esperar, su valor es cero ya que nos hemos situado en la edad límite donde, lógicamente, no ha de quedar vivo ningún individuo del grupo.

Se obtiene a partir de la función de supervivencia,  $S(x)$ , mediante la expresión:

$$l_x = l_0 \cdot S(x)$$

Es una función decreciente, por tanto, para cualquier edad  $x+1$  se cumple que  $l_x > l_{x+1}$ .

## 2.- Función de mortalidad o de fallecimiento $d(x)$ o $d_x$ .

A partir de la función anterior se define ésta que recoge el número de personas que fallecen con edad  $x$  y antes de cumplir la edad  $x+1$ . Diferencia entre el número de individuos de edad  $x$  y edad  $x+1$ :

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Se cumple la siguiente relación:

$$l_x = d_x + d_{x+1} + \dots + d_{w-1} = \sum_{t=0}^{w-x-1} d_{x+t}$$

Dadas las características de la supervivencia, los individuos vivos en un momento determinado irán falleciendo en periodos posteriores.

## 3.- Función del tanto de mortalidad.

La función del tanto de mortalidad del período de duración  $t$  correspondiente a la edad  $x$  recoge la probabilidad de ser afectado por el suceso fallecimiento entre la edad  $x$  y  $x+t$ . Utilizando la función  $l_x$ , siguiendo la concepción frecuentista y particularizando para  $t = 1$ , la probabilidad será:

El numerador representa el número de fallecidos entre  $x$  y  $x+1$  (casos favorables) y el

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

denominador los individuos vivos con edad  $x$  (casos posibles). Este caso particular de  $t = 1$  recoge la probabilidad de ser afectado por el suceso fallecimiento entre dos edades consecutivas.

## 4.- Función del tanto de supervivencia

El tanto de supervivencia del período de duración  $t$  (correspondiente a la edad  $x$ ) recoge la probabilidad de que el individuo de edad  $x$  continúe con vida al cumplir la edad  $x+t$ , siendo  $t = 1$ .

Siguiendo lo expuesto en el caso anterior, la función es:

$$P_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Este caso de  $t = 1$  recoge la probabilidad de continuar vivo un año más.

Una vez definida la función del tanto de supervivencia, se puede escribir la siguiente expresión como suma de dos probabilidades asociadas a sucesos complementarios:

$$P_x = 1 - q_x$$

## 4.2. Elementos básicos

Los **elementos que definen la tabla de supervivencia estática** se presentan en forma de columnas conteniendo las dos primeras los datos necesarios para construir el resto.

\*) 1ª columna: valores enteros,  $x$ , que representan la edad de los individuos. Comienza en 0 (recién nacidos) y termina en  $\omega$  (edad límite).

\*) 2ª columna: valores  $l(x)$  o  $l_x$ , notación procedente del inglés *life o living*, que representan el número de supervivientes entre un número inicial de personas prefijado a la edad  $x = 0$ , dado por  $l_0$ .

Se cumple que  $l_0 \geq l_1 \geq \dots \geq l_x \geq \dots \geq l_\omega \geq 0$ .

\*) 3ª columna: valores  $d(x)$  o  $d_x$  que representan al número de personas que fallecen a la edad  $x$ . Diferencia entre el número de sobrevivientes a las edades  $x$  y  $x + 1$ .

\*) 4ª columna: valores  $q_x$  que representan la probabilidad que tiene una persona de edad  $x$  de fallecer dentro del año, es decir, no alcanzar el año siguiente.

\*) 5ª columna: valores  $P_x$ . Probabilidad que tiene una persona de edad  $x$  de vivir un año más.

De esta forma, y previa introducción en la primera columna de la tabla (columna "edad") de dicho intervalo, se realiza (en la segunda columna) la estimación del número de personas que tienen una determinada edad (edad  $x$ ), es decir, estimamos  $l_x$  a partir de la expresión:

$$l_x = l_0 \cdot S(x)$$

El valor de  $x$  será directamente obtenido a partir de los valores de la primera columna una vez estimada una función de supervivencia  $S(x)$  ajustada para un colectivo teórico formado por  $l_0$  personas.

Directamente, y a partir de  $l_x$ , se estima el resto de funciones biométricas atendiendo a su definición. En la tercera columna se representa la **función de fallecimiento**,  $d_x$ , obtenida a partir de la 2ª columna ( $l_x$ ) mediante la expresión:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

determinando el número de personas que fallecen entre la edad  $x$  y la edad  $x + 1$ .

A continuación (columna 4) estimamos la **función del tanto de mortalidad (probabilidad anual de fallecimiento)** relacionando la columna 2 ( $l_x$ ) y la 3 ( $d_x$ ) mediante el cociente:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

y la **función del tanto de supervivencia (probabilidad anual de supervivencia)** (columna 5) mediante la expresión:

$$P_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

o bien, utilizando el suceso complementario:  $P_x = 1 - q_x$

Así, a través del proceso presentado se construye una tabla de supervivencia que permitirá al actuario disponer de la información necesaria en el momento de elaborar un producto propio del mercado asegurador.

La combinación de la información estadístico-probabilística extraída de la tabla y los términos precisos para realizar el tratamiento financiero necesario permitirán realizar lo que será una primera aproximación a la elaboración, por ejemplo, de una prima de seguros (“precio de un determinado seguro”).

La tabla 1 presenta el desarrollo numérico de una tabla no real suponiendo:  $S(x) = (20.000 - 2x^2) / 20.000$ , el intervalo de edades entre  $[0, 100]$  donde  $S(x)$  es positiva,  $l_0 = 1.000.000$  de personas y sustituyendo,  $l_x = 10^6 \cdot [(20000 - 2x^2) / 20000] = 1000000 - 100x^2 = 10^6 - 100x^2$ .

X	l(x)	d(x)	Qx	Px
0	1.000.000	100	0,0001	0,9999
1	999.900	300	0,00030003	0,99969997
2	999.600	500	0,0005002	0,9994998
.	.....	.....	.....	.....
...	.....	.....	.....	.....
50	750.000	10.100	0,01346667	0,98653333
...	.....	.....	.....	.....
.	.....	.....	.....	.....
98	39.600	19.700	0,49747475	0,50252525
99	19.900	19.900	1	0
100	0	0	1	0

Tabla 1.- Ejemplo no real de tabla de mortalidad

### 5.- Evolución histórica: de Ulpiano a las tablas dinámicas

Una vez detallada la estructura y los elementos que componen una tabla de vida o supervivencia, se ofrece un breve repaso por la historia de la Ciencia Actuarial como instrumento imprescindible para la comprensión de las formas de seguro actuales. Se enfoca al tema que nos ocupa desde los orígenes del seguro (aproximadamente en el año 5.000 a.C.) hasta nuestros días con las tablas de mortalidad más recientes: las dinámicas. Así mismo se señalan las aportaciones más relevantes relacionadas con el estudio actuarial de la supervivencia humana.

# Ciencia Actuarial: Historia

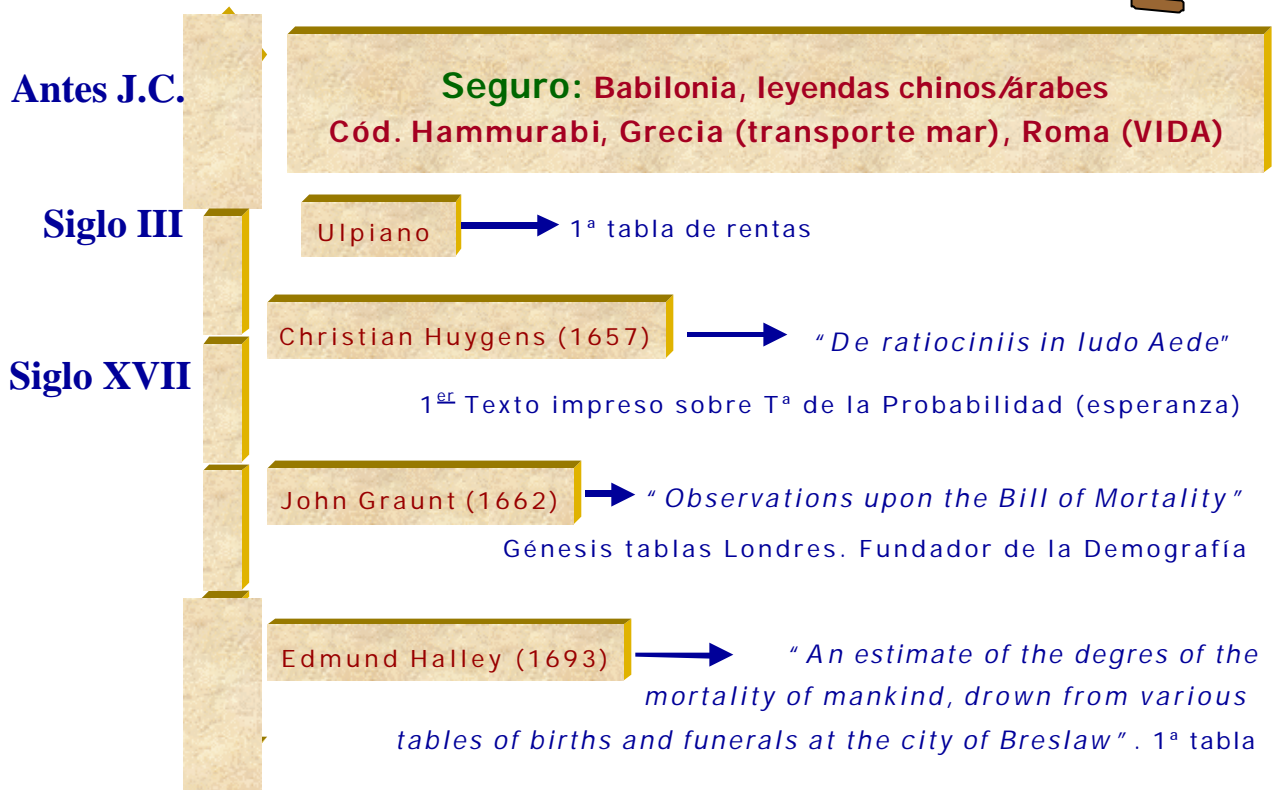


Tabla 2. Repaso histórico I

Se considera que el seguro es el mecanismo para reducir la incertidumbre de una parte llamada asegurado por medio de la transferencia de ciertos riesgos a otra, asegurador, quien responde (al menos parcialmente) de las pérdidas económicas sufridas por el asegurado.

Aunque en ocasiones se citan distintas leyendas sobre conocimientos chinos y árabes relativas al nacimiento de esta institución, se considera que el seguro nace en la antigua Babilonia (Oriente Medio) entorno al año 5.000 a.C.. Los mercaderes, comerciantes y hombres de negocios sufrían distintos riesgos a causa de la acción de los piratas, bandidos, las inclemencias del tiempo... Para garantizar las mercancías se desarrolló un "contrato" semejante al del seguro que cubría dichos riesgos a cambio del pago de unos tipos muy altos (la prima).

En Grecia existen vestigios de contratos de préstamos, por ejemplo, en el caso de lo que hoy en día se conoce como seguro marítimo. Los capitanes de los barcos para evitar las pérdidas económicas derivadas de los naufragios firmaban este tipo de contratos por los que dichas pérdidas eran compartidas por todos los participantes del contrato, no sólo por el afectado (idea de reparto del riesgo).

En el propio Código de Hammurabi (hacia el año 1.750 a.C.) aparece claramente la idea de compensación o restitución de pérdidas: idea esencial que genera el contrato de seguro.



En Roma aparece una de las mayores contribuciones al nacimiento y consolidación de los seguros: la organización de sociedades de enterramiento como forma rudimentaria de los actuales seguros de vida y enfermedad. Además, es en Roma donde se ubican los antecedentes más importantes del seguro de vida en una norma por la que las viudas de los prestatarios de unos determinados contratos de préstamos percibían una indemnización en forma de renta. En la ley Falcidia (año 40 a.C.) aparece, por primera vez, el concepto de anualidad.

Las tablas de mortalidad constituyeron la base racional para endeudarse el estado que financiaba sus necesidades dinerarias mediante capitales tomados a préstamo que se devolvían en forma de rentas vitalicias variables como las *operaciones tontinas* que llevaron incluso al asesinato de pensionistas.

Se citan, a continuación y con más detalle, varios autores cuyas contribuciones se consideran esenciales en el desarrollo de las tablas de mortalidad.

- **DOMITIUS ULPIANO (230 d.C.)**

Elaboró la conocida **Tabla de Ulpiano**, en la que aparecen reflejadas distintas edades asociadas a la esperanza de vida en años de cada una de ellas. Dicha tabla ha sido la más utilizada a lo largo de la historia para calcular las anualidades de rentas vitalicias.

<b>Edades</b>	0-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-41	41-42	42-43	43-44
<b>Esperanza de vida en años</b>	30	28	25	22	20	19	18	17	16
<b>Edades</b>	44-45	45-46	46-47	47-48	48-49	49-50	50-55	55-60	60-
<b>Esperanza de vida en años</b>	15	14	13	12	11	10	9	7	5

La aparición de esta tabla de rentas se considera el nacimiento u origen de la Estadística Actuarial.

- **JOHN GRAUNT (1662 d.C.)**

En 1662, únicamente cinco años después de que Christian Huygens publicara el primer texto escrito sobre Teoría de la Probabilidad (*De Ratiociniis in Ludo Aede*), John Graunt publicó *Observations upon the Bills of Mortality*, trabajo posteriormente reconocido como el precursor de la Estadística Demográfica, en el que se incluye la primera tabla de mortalidad rudimentaria relativa a la población de Londres.

Los registros de mortalidad a los que tuvo acceso Graunt indicaban la causa de la muerte y el sexo de los difuntos pero no su edad. Por esto, registró la proporción de personas que morían de enfermedades infantiles (los cuales serían presumiblemente niños), añadiendo la mitad de las que morían de enfermedades como sarampión o varicela que afectan tanto a niños como a adultos, concluyendo que 36 de cada 100 personas morían antes de los 6 años. El último dato de la tabla se lo proporcionó la hipótesis de que nadie sobrevivía más de 76 años.

Graunt no explica cómo obtuvo las filas intermedias pero Hacking (1995) considera la posible interpolación efectuada entre los 6 y los 76 años siguiendo una ley exponencial tomando como  $\mu = 0.047$  (tanto instantáneo de mortalidad constante). Así, la función de supervivencia definida por este autor para las edades comprendidas entre 6 y 76 años es  $l_x = 64 e^{-0.047(x-6)}$

La tabla elaborada es la siguiente:

x	0	6	16	26	36	46	56	66	76
l <sub>x</sub>	100	64	40	25	16	10	6	3	1

Debido a esta aportación, Graunt es conocido como el fundador de la Demografía.

• **EDMUND HALLEY (1693)**

El famoso astrónomo, matemático y actuariólogo inglés Edmund Halley quien calculó la órbita del cometa que lleva su nombre, fue el primero en construir en 1693 una tabla de mortalidad tal y como hoy en día las conocemos. Se basó en las estadísticas mortuorias (número de nacimientos y fallecimientos) de la ciudad alemana de Breslaw en un período de n años. Computó el número de personas de edad comprendida entre 0 y 1 año:

$$d_0^1, d_0^2, d_0^3, d_0^4, d_0^5, \dots, d_0^n$$

Lo mismo hizo para las personas comprendidas entre 1 y 2 años y así sucesivamente.

$$d_1^1, d_1^2, d_1^3, d_1^4, d_1^5, \dots, d_1^n$$

.....

$$d_{30}^1, d_{30}^2, d_{30}^3, d_{30}^4, d_{30}^5, \dots, d_{30}^n \dots$$

Posteriormente redujo los datos obtenidos en n años a un valor por cada período simplemente efectuando una media aritmética

$$\bar{d}_0 = \frac{d_0^1 + d_0^2 + d_0^3 + \dots + d_0^n}{n}$$

obteniendo así  $\bar{d}_0, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_n$ . Como  $l_0 = \bar{d}_0 + \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \dots + \bar{d}_n$ , mediante unas simples rectas obtuvo  $l_1, l_2, l_3, l_4, \dots, l_n$  de la siguiente manera:  $l_1 = l_0 - \bar{d}_0, l_2 = l_1 - \bar{d}_1, \dots$

El inconveniente que presenta el planteamiento de este autor es que supone la mortalidad constante, hipótesis falsa debido al efecto de los progresos médicos, higiénicos..., el factor de los movimientos migratorios (el de máxima importancia) que influyen y modifican seriamente la mortalidad.

Los cálculos de Halley fueron, después de los de De Wit, uno de los intentos más tempranos e importantes en el sentido de que han sido aplicados mucho más en la práctica.

Este siglo XVII se considera enormemente fructífero para la Estadística Actuarial debido al desarrollo del cálculo de probabilidades y los avances en esta materia efectuados por: Pascal, Fermat, Kepler, Galileo, Paccioli, Bernouilli, Bayes, Laplace, Markov y Kolmogorov, entre otros.

Durante los siglos siguientes (XVIII y XIX principalmente) cabe mencionar las aportaciones efectuadas a los estudios de mortalidad de Abraham De Moivre y los eminentes actuariólogos Gompertz y Makeham en el establecimiento y formulación de las leyes de mortalidad que llevan sus nombres ya comentadas en epígrafes anteriores.

De Moivre en 1725 fue el primero en calcular una prima de seguros de vida, James Dobson, cincuenta años después, no sólo calculaba primas para distintos tipos de seguros sino también

reservas matemáticas. Estableció, por vez primera, un modelo global aplicable a la sistematización de una compañía de seguros de vida para garantizar su existencia y estabilidad.

Los avances en el desarrollo de técnicas para estimar y ajustar leyes de mortalidad, analizar colectivos para estudiar sus características demográficas, elaborar y construir tablas de mortalidad más precisas, etc... han seguido produciéndose a lo largo del siglo XX.

Una vez comentada brevemente la evolución histórica de las tablas de supervivencia estáticas, es en este siglo XXI cuando se ha generalizado la utilización en España de las llamadas tablas dinámicas. Éstas serán desarrolladas en el epígrafe siguiente.

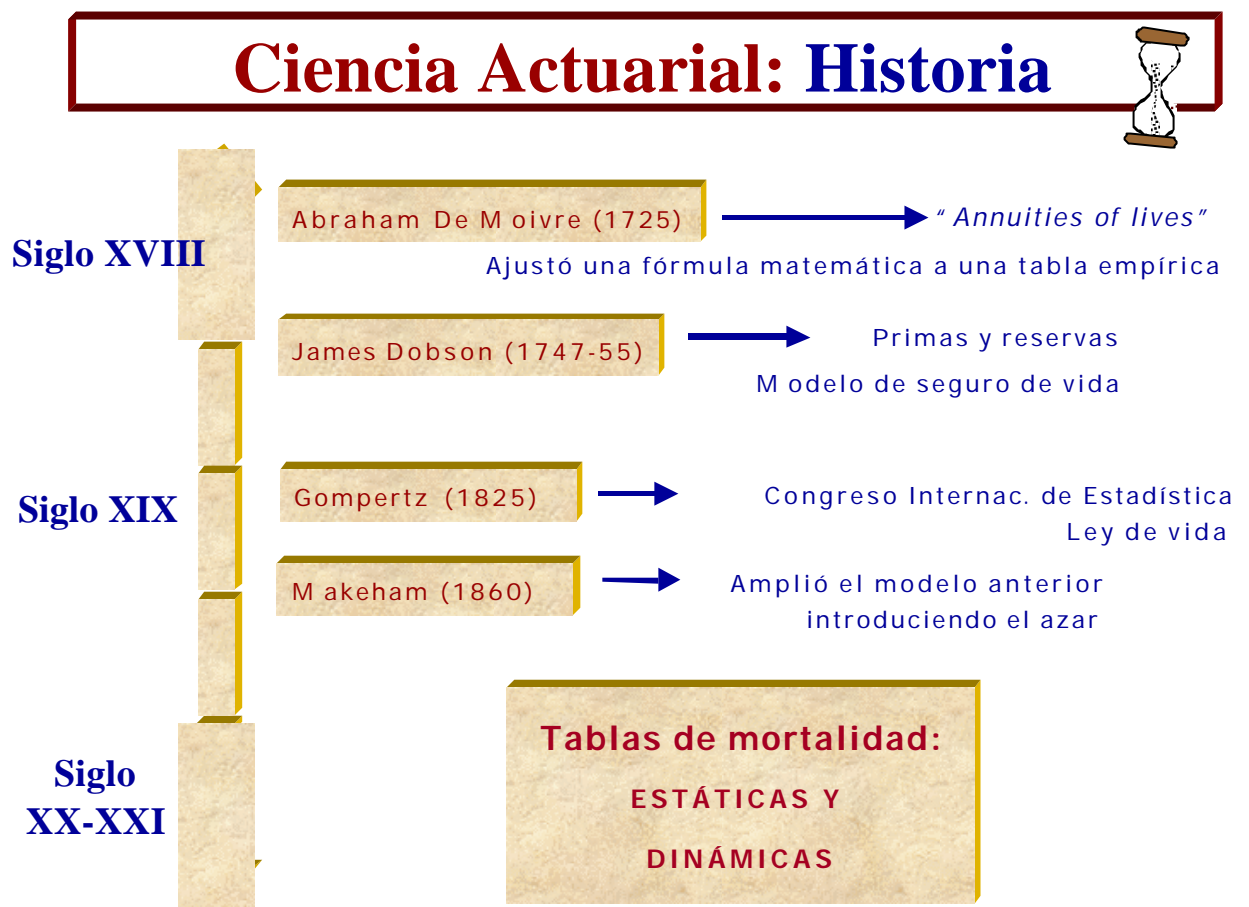


Tabla 3.- Repaso histórico II

## CAPITULO III: LAS TABLAS DE MORTALIDAD PERM/F2000

### 1. Presentación.

**UNESPA, la patronal del seguro español, solicitó en febrero de 2000 la colaboración de Swiss Re en la coordinación del proyecto de desarrollo de una tabla de mortalidad para rentistas. En esta importante labor participaron, además de los técnicos de la patronal y de Swiss Re, expertos de Munchener, Bayerische y Nacional de Reaseguros.**

El objetivo de este proyecto era ofrecer al mercado una tabla de mortalidad que sirviera como base para el cálculo del negocio de la exteriorización de compromisos por pensiones de las empresas con sus trabajadores. Esta constituiría una solución transitoria, a la espera de que la Comisión Técnica liderada por el Instituto de Actuarios Español, finalice los estudios iniciados en 1998 con el “Protocolo de colaboración para el estudio continuado de la mortalidad”.

Dado el escaso tiempo disponible para desarrollar el proyecto, el grupo técnico optó por elegir métodos ya establecidos y probados en otros países<sup>3</sup>. A pesar de todas las dificultades derivadas del proceso, las nuevas tablas constituyen un paso importante para el mercado español, teniendo en cuenta que el sector de seguros español no contaba con tablas propias para el negocio de rentas. La solución final, consistente en dos tablas, una para las carteras existentes y otra con márgenes adicionales para la nueva producción, fue lanzada el 3 de octubre del 2000 por la Dirección General de Seguros.

### 2. Las tablas suizas

En el mercado español era frecuente la utilización de las tablas suizas GRM/F 80 para el cálculo de las obligaciones derivadas de pensiones. Más recientemente, se aplicaban con una reducción de las edades de dos años, para tener en cuenta el efecto de la longevidad. La tabla suiza más reciente, la GRM/F 95, suponía casi una solución lógica para los próximos años, pero esta tabla no es la más adecuada para la valoración de pensiones en el esquema actual de compromisos diferidos. Esto se debe a que en 1985 hubo modificaciones en la legislación Suiza relativa a las pensiones. Las rentas diferidas se reemplazaron por una capitalización pura hasta la edad de jubilación. Por tanto, no existían datos de supervivencia para las edades menores de 60 años en el censo que sirvió para el desarrollo de la tabla GRM/F 95.

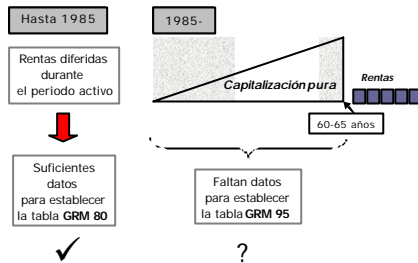
---

<sup>3</sup> Para desarrollar la tarea encomendada, se utilizaron los datos facilitados por Unespa del censo de población asegurada de los años 1997 y 1998, así como las tablas de mortalidad de la población entre 1900 y 1997 del Instituto Nacional de Estadística.

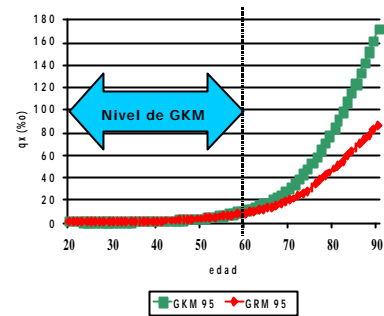
La experiencia en otros países, como Alemania o Suiza, demuestra que la mortalidad de los rentistas en los fondos de pensiones, difiere bastante del resto de la población asegurada. Sin embargo, los datos del censo podrían servir como referencia.

Por eso esta tabla está a nivel de la de fallecimiento (GKM/F 95) para las edades jóvenes. **Gráfico I y II**. De hecho, si se compara la GRM95 con la tabla de *mortalidad base* que resulta para España, se observan márgenes negativos para las edades menores de 65 años, lo que confirma que la GRM/F95 no es una tabla adecuada para el cálculo de las rentas diferidas.

Seguro de grupo en Suiza



Comparación GRM / GKM 95

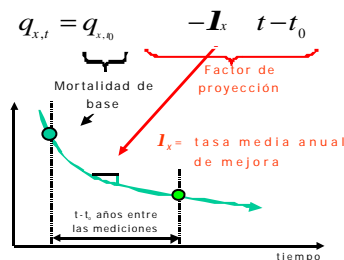
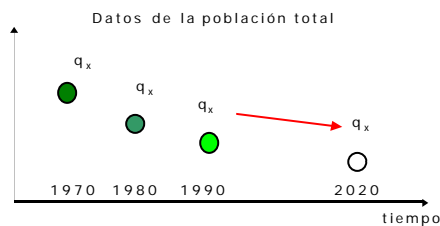


### 3. Las ventajas de una tabla dinámica

Es evidente que en España hay un desarrollo bastante acusado de la longevidad. Las tasas de mortalidad se han ido reduciendo más cada año y es previsible que esta tendencia se mantenga en el futuro. La simple utilización de una tabla estática conservadora no puede resolver el problema de la longevidad, en concreto, la insuficiencia de reservas para años futuros. Esto significa, en la práctica, márgenes muy elevados durante los primeros años y márgenes más reducidos en el futuro para hacer frente a los compromisos asumidos.

Se pensó desarrollar una tabla dinámica, es decir, una tabla generacional, para contemplar el cambio de la mortalidad, ya que dicha tasa depende no sólo de la edad y del sexo de la persona, sino también de la generación a la que pertenece. En este sentido, las tasas destinadas a años futuros tienen en cuenta la disminución de la mortalidad entre la mortalidad del momento actual y el año correspondiente. Esta disminución futura se basa en una extrapolación del desarrollo en el pasado: Basándonos en las tasas de mortalidad en los años pasados *para una edad x fija*, se calculan las tasas de mortalidad en los años futuros *para esta misma edad x*.

Existen distintos métodos de proyección de la mortalidad. Para el caso español se optó por la utilización del modelo exponencial [  $q_{x,t} = q_{x,t_0} \cdot e^{-I_x \cdot (t-t_0)}$  ], con un porcentaje fijo de mejora anual (**gráficos III, IV**).



Como primer paso del proyecto se construyó una tabla básica representativa de la mortalidad actual de los rentistas ( $q_{x,t_0}$ ), la *mortalidad de base*. A continuación, era preciso observar el desarrollo de la mortalidad para pronosticar su evolución futura ( $q_{x,t}$ ).

El modelo exponencial permite cuantificar los cambios de manera sencilla y resulta muy útil en la práctica. Utilizando las propiedades de los logaritmos a partir de una multitud de puntos de referencia, se pueden obtener los factores de tendencia ( $\lambda_x$ ), mediante una regresión lineal.

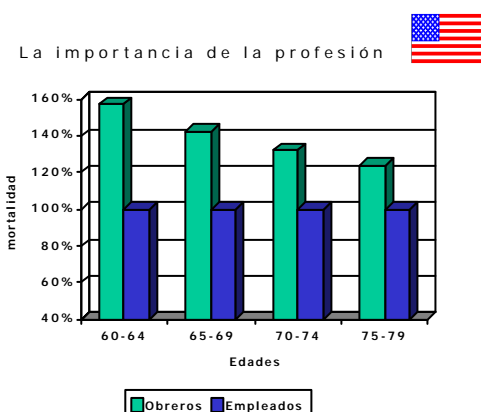
#### 4. Datos de partida para la mortalidad de base

UNESPA proporcionó 12.918.450 registros. Esos datos ya habían sufrido una primera depuración en la que se eliminaron alrededor de seis millones de registros. Swiss Re realizó comprobaciones adicionales sobre el censo facilitado. Tras aplicar los chequeos de consistencia habituales en estos casos, se procedió a eliminar los datos dudosos. Quedaron 11.763.125 registros.

A la luz de los primeros contrastes sobre el censo depurado surgían tasas de mortalidad poco razonables: daba la impresión de que la fecha de fallecimiento no había sido registrada. Muchos productos con el código para supervivencia son productos de ahorro puro, en los que el supuesto de fallecimiento no importa, ya que los beneficios no varían, no computándose la salida por fallecimiento. Por eso, el número de fallecidos censado era demasiado bajo en comparación con la experiencia alemana y suiza.

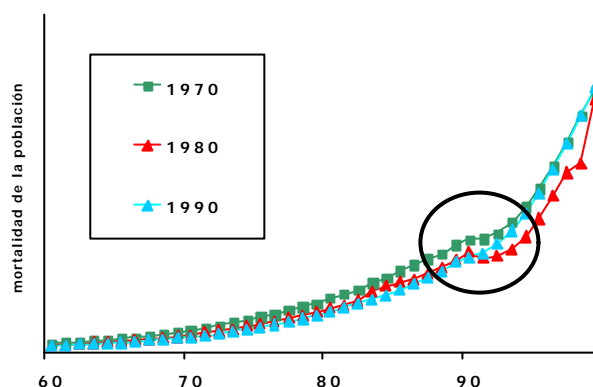
Después de analizar los datos del censo, el grupo de trabajo llegó a la conclusión de que no disponían de la suficiente información para aplicar un método de ajuste adecuado para la generación de una tabla de rentistas. En consecuencia, en base a la experiencia de otros países, se decidió tomar como referencia los datos poblacionales y determinar “factores de selección”, comparando la mortalidad de las carteras razonables del censo con la mortalidad de la población total y las experiencias de otros países.

Antes de fijar estos factores, se estudió su sensibilidad respecto a diferentes grupos. Por ejemplo, la influencia de la profesión en la mortalidad es considerable, como muestra la experiencia en Estados Unidos, e ilustra el gráfico V. Aunque se han utilizado como referencia los datos del censo basados en la población asegurada, deben tomarse con cautela y no pueden representar la mortalidad en los fondos de pensiones aún no asegurados.



## 5. Tabla de mortalidad de la población

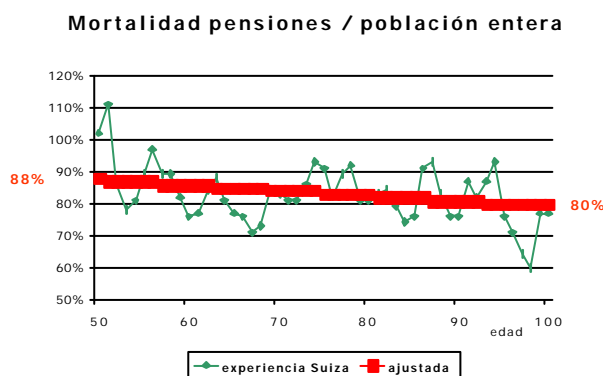
Las tablas de mortalidad disponibles de la población española se cortan a la edad de 100 años, siendo este límite demasiado bajo para una tabla de rentistas. Además, se observa un extraño efecto en los últimos tramos de edad. Aparentemente, estas tablas habían sido extrapoladas con una función demasiado sencilla después de la edad de 90, lo que se aprecia claramente mirando el **gráfico VI**. Así pues, antes de aplicar los *factores de selección* para obtener una tabla de *mortalidad de base*, fue necesario extrapolar la tabla de la población para las edades superiores a 89 años. Esto se hizo en base a las tasas de mortalidad de la población suiza, adaptándolas mediante un factor corrector al nivel español para la edad de 89 años.



## 6. Determinación del “factor de selección”

La comparación de los niveles de mortalidad de la población entre España y Suiza aporta resultados muy similares, por lo que se consideró pertinente observar los *factores de selección* que se utilizan en Suiza para un negocio parecido. Así se comparó la tabla EVK90, (fondo de pensión de los empleados del Estado, período de observación 1982-1987), con el promedio de la mortalidad de la población total de los años 1980 y 1990; y la experiencia de seguros de grupo de los años 1981-1984, con la mortalidad de la población de los años 1978-1983.

La tabla EVK90 incluye márgenes. En consecuencia, se decidió determinar los *factores de selección* en base a la experiencia con los seguros de grupo, y se hizo un ajuste con una regresión lineal entre las edades 50 y 100 para obtener una curva lineal (**Gráfico VII**).



## 7. Mortalidad de base

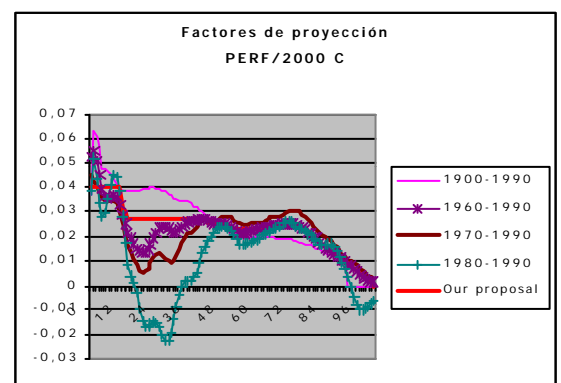
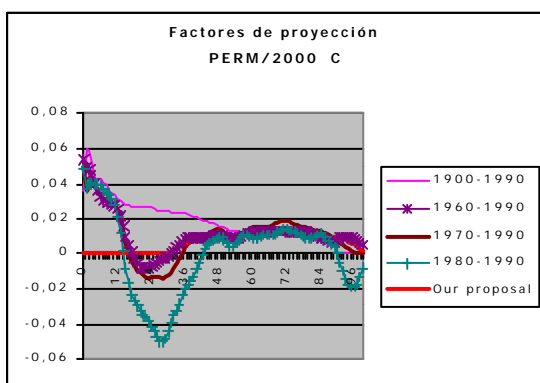
La mortalidad de base se calculó aplicando los factores de selección antes mencionados a las tasas de mortalidad de la población. El objetivo era partir de una *mortalidad de base* actual, y empezar las proyecciones de la nueva tabla en el año 2000. Para ello, era preciso conocer la mortalidad de la población en ese año. Esto se logró tomando como referencia la mortalidad de la población del año 1990 y aplicando factores de proyección durante 10 años.

El último paso consistió en buscar una solución para un margen de seguridad adecuado. Esto fue problemático, pues había que estimar la mortalidad actual de una manera exacta. Este problema se da con frecuencia en muchos países. En Suiza, a diferencia de Alemania, el margen total se subdivide en una parte ligada a la mortalidad de base y una parte ligada a los factores de tendencias. Debido a ello, el grupo técnico decidió utilizar los márgenes suizos.

## 8. Proyección

Para analizar el desarrollo de la mortalidad se utilizan en España las tablas de mortalidad de la población valoradas por el Instituto Español de Estadística (INE). Estas tablas corresponden a los años 1900/1910 y hasta los años 1996/1997. Para evitar conclusiones erróneas, se realizó un análisis exhaustivo de la construcción de estas tablas y del proceso de recolección de datos. En este sentido se pudo observar que la tabla 1996/1997 es una proyección de la tabla 1990; que el método de ajuste de la tabla 1950 es diferente; y, finalmente, que los datos de los años 1900-1940 contemplan los efectos de las guerras, además de métodos de ajuste diferentes.

Con estas conclusiones, se decidió, para analizar el desarrollo de la mortalidad y establecer los *factores de tendencia*, enfocar el estudio en los años 1960-1990. De todas maneras, este desarrollo a corto plazo es mucho más significativo, como muestran las experiencias recientes en Alemania en la elaboración de las tablas DAV94R. Para obtener los *factores de tendencia*, se analizaron, concretamente, los períodos 1960-1990, 1970-1990 y 1980-1990. A corto plazo, las tendencias se pueden determinar sólo para las edades mayores de 40 años, especialmente para los varones, porque la tabla 1990, comparada con las tablas anteriores, muestra un incremento extraordinario de la probabilidad de muerte entre las edades de 15 y 40 años. En este caso, se asume una mortalidad constante, es decir, una tendencia de cero. En base a las curvas obtenidas se determinaron los factores  $\lambda_x$ . La situación descrita se aprecia bien en los gráficos VIII y IX para la tabla PERM/F C 2000.



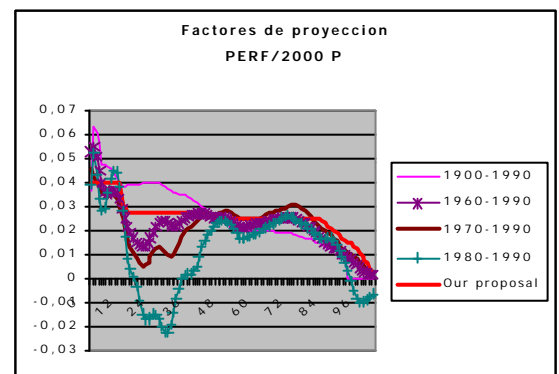
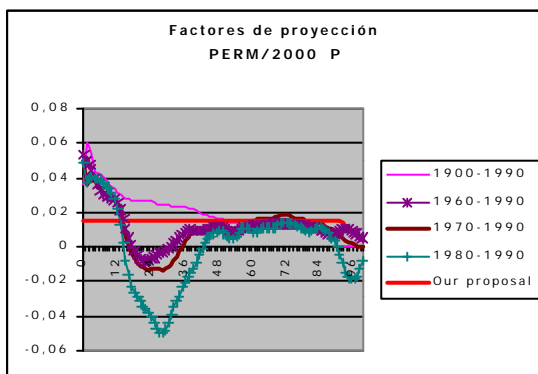


## 9. La tabla para la nueva producción (*PERM/F 2000 P*)

Como complemento a la tabla para las carteras existentes *PERM/F2000 C*, UNESPA solicitó el desarrollo de una tabla para la nueva producción. Debido a las incertidumbres que conlleva el nuevo negocio, resultaba razonable introducir en esta nueva tabla márgenes más elevados. Como es evidente, se partió de la hipótesis de que esta tabla se va a utilizar tanto para la determinación del precio, como para el cálculo de las reservas correspondientes. Para ello, se revisaron los márgenes aplicados en la *mortalidad de base* y en los *factores de tendencia*.

Existe una considerable influencia de la profesión en relación con la *mortalidad base*. Dada la dificultad para estimar la composición del negocio futuro con respecto a las profesiones, el grupo técnico decidió, sobre la base de los márgenes habituales en otros países, introducir un margen adicional de un **10%**. Por otra parte, en lo que respecta a los márgenes en los *factores de tendencia*, y al igual que en otros países, el desarrollo de la mortalidad varía en función de las profesiones. Este hecho, junto con el desconocimiento de la composición de la cartera futura, llevó a incluir márgenes adicionales en los *factores de tendencia*.

Asimismo, los factores negativos para hombres jóvenes que se pueden observar en la población española, por ejemplo, se deben a un crecimiento de la probabilidad de accidentes. Esta probabilidad está fuertemente vinculada a las profesiones. Debido a que en otros países se observan factores positivos para estas edades, se decidió incluir márgenes adicionales para obtener factores constantes y positivos hasta la edad de 91 años (Gráficos X y XI).



Por último, se realizaron algunos cálculos partiendo de las nuevas tablas para edades entre 40 y 80 años y a una tasa de interés de 3,15%; Los resultados rondan el nivel de la tabla Alemana DAV94 R, entre 97% y 101% para el negocio de cartera. Teniendo en cuenta las diferencias de la esperanza de vida, España tiene un año más, y del negocio, grupos en lugar de negocio individual, esto parece muy razonable. Se realizaron las mismas simulaciones para la nueva producción, resultando para los mismos supuestos, niveles entre el 100% y el 104%, lo que ponen de manifiesto los márgenes adicionales contemplados.

Las tablas que resultaron de este trabajo: las *PERM/F C 2000* para el negocio de cartera y las *PERM/F P 2000* para nueva producción fueron lanzadas por la Dirección General de Seguros en octubre del 2000 y desde entonces se ha generalizado su utilización para la valoración de rentas en España.

No obstante, somos conscientes que este proyecto ha sido sólo un primer paso en el camino de dotar al sector español de las adecuadas bases estadísticas propias. Las dificultades, encontradas durante su desarrollo, han mostrado nuevas direcciones a seguir en la recogida y tratamiento de los datos en el futuro. Así como, la importancia y necesidad de establecer procesos continuados de seguimiento de la mortalidad. Sólo la estandarización del estudio continuado de la siniestralidad y su adecuada monopolización dotaran al sector de los instrumentos claves para garantizar la deseada solvencia y estabilidad.

## ANEXOS

**ANEXO 1: CALCULO DE LA TASA DE MORTALIDAD POR GRUPOS DE EDAD EN LA TABLA DE 1996.**

Se han utilizado los datos de población media del periodo y defunciones por edad, aportados por el I.N.E. (1999; págs. 36 y siguientes) para calcular las tasas específicas de mortalidad por grupos de edad, a partir de la siguiente formulación:

$${}_n m_x = \frac{{}_n D_x}{{}_n P_x} \quad (11) \quad \text{donde:}$$

- ${}_n m_x$  representa la tasa de mortalidad del grupo de edades  $[x; x+n]$ ;
- ${}_n D_x$  representa las defunciones ocurridas en el grupo de edades  $[x; x+n]$  y
- ${}_n P_x$  representa la población media del periodo para el grupo de edades  $[x; x+n]$ .

Esta ha sido la formulación utilizada por los grupos de edad quinquenales hasta los 90 años de edad (para  $x = 0$  se ha considerado la edad simple y el primer grupo de edad es cuatrienal).

**Cuadro 9: Tasas específicas de mortalidad por grupos de edad.**

TABLA QUINQUENAL DE 1996 DE MUJERES				TABLA QUINQUENAL DE 1996 DE HOMBRES			
Edad	Población	Defunciones	${}_n m_x$	Edad	Población	Defunciones	${}_n m_x$
0	175.230	822	4,6910	0	185.675	1.148	6,1828
1	732.918	223	0,3043	1	781.365	284	0,3635
5	968.671	145	0,1497	5	1.025.582	190	0,1853
10	1.147.954	175	0,1524	10	1.207.103	264	0,2187
15	1.452.053	378	0,2603	15	1.522.159	959	0,6300
20	1.626.125	479	0,2946	20	1.692.845	1.564	0,9239
25	1.598.393	724	0,4530	25	1.654.732	2.212	1,3368
30	1.559.422	1.090	0,6990	30	1.589.038	3.281	2,0648
35	1.447.604	1.176	0,8124	35	1.453.086	3.297	2,2690
40	1.279.483	1.447	1,1309	40	1.275.242	3.388	2,6568
45	1.213.693	1.850	1,5243	45	1.198.874	4.611	3,8461
50	1.132.738	2.542	2,2441	50	1.101.045	6.397	5,8099
55	981.888	3.327	3,3884	55	923.656	8.146	8,8193
60	1.113.499	6.027	5,4127	60	1.006.264	14.067	13,9794
65	1.074.701	9.597	8,9299	65	922.488	20.153	21,8464
70	937.683	15.158	16,1654	70	735.293	26.076	35,4634
75	707.877	22.241	31,4193	75	468.986	26.905	57,3685
80	500.407	31.774	63,4963	80	274.183	26.761	97,6027
85	283.768	34.780	122,5649	85	134.820	21.727	161,1556
90	97.894	22.142	215,2836	90	39.994	10.239	238,7528
95	17.329	6.690	432,1436	95	6.585	2.499	443,8190
100	3.740	1.031	606,5190	100	2.012	286	613,0980

Para los grupos de edades [90-94] y [95-99] se han promediado las  $Q_x$  que arroja la tabla de mortalidad 1996-97, para cada edad. Ello viene justificado por el bajo número de fallecidos registrado en los mayores de 90 años que desvirtúa la tasa calculada según (11)(ver pág. 12 de I.N.E.; 1999). Para los mayores de 100 años se ha utilizado la  $Q_x$  que recoge la propia estadística del Instituto.

## ANEXO 2: PRINCIPALES RESULTADOS PARA LOS HOMBRES.

La recta de regresión estimada queda:

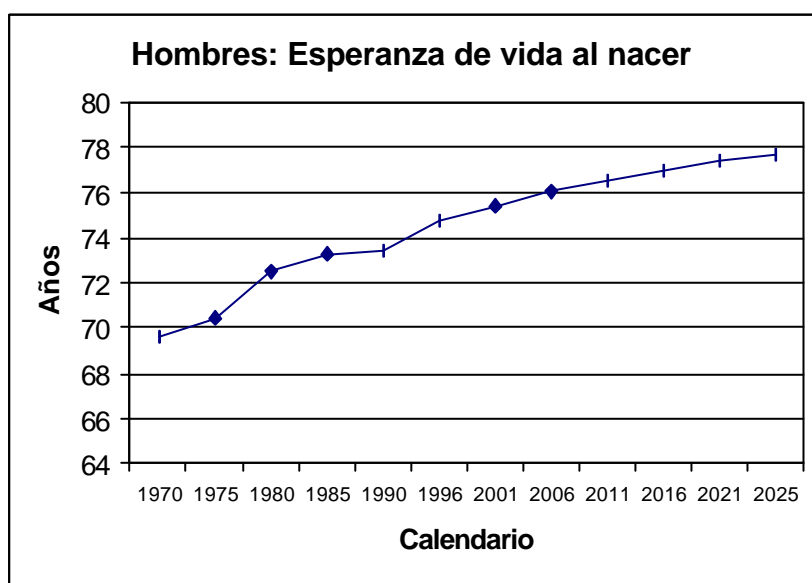
$$\hat{y}_i = 59,4198 - 0,03085 * x_i \quad (12); \quad R^2 = 0,9562$$

(9,079) (-9,345)

donde entre paréntesis figura el valor del estadístico t.

La aplicación de la ecuación 1 a la  $\vartheta^t$  observada para cada año (columna B del cuadro 10) permite obtener el logit observado (col. C). Posteriormente se aplica la ecuación 12 para obtener el logit estimado (col. D), que se transforma en esperanza por medio de la ecuación 3 (col. E). Finalmente se ajusta, durante un periodo de 20 años, la diferencia entre la esperanza observada en el año 1996 (74,74) y la estimada (74,73); en nuestro caso resulta un 0,0084, casi imperceptible. La serie estimada final de esperanzas de vida masculinas al nacer se recogen en la col. F.

**Gráfico 3. Hombres: esperanza de vida  $e_0^t$  estimada final.**



El gráfico 3 recoge la serie de la col. F del cuadro 10 siguiente.

**Cuadro 10. Hombres: logit y esperanzas estimadas.**

A	B	C	D	E	F
AÑO	$e_o^t$ observada	Logit ( $e_o^t$ ) observado	Logit ( $e_o^t$ ) estimado	$e_o^t$ estimada inicial	$e_o^t$ estimada final
1970	69,57	-1,3421	-1,3541	69,67	69,57
1975	70,41	-1,4478	-1,5083	70,87	70,41
1980	72,52	-1,7498	-1,6626	71,95	72,52
1985	73,27	-1,8743	-1,8168	72,93	73,27
1990	73,4	-1,8971	-1,9711	73,81	73,40
1996	74,74	-2,1580	-2,1562	74,73	74,74
2001			-2,3104	75,41	75,41
2006			-2,4647	76,00	76,00
2011			-2,6189	76,52	76,52
2016			-2,7732	76,98	76,98
2021			-2,9274	77,37	77,37
2026			-3,0817	77,72	77,72
2031			-3,2359	78,02	78,02
2036			-3,3902	78,28	78,28
2041			-3,5444	78,51	78,51
2046			-3,6987	78,70	78,70
2051			-3,8529	78,87	78,87
2056			-4,0072	79,02	79,02
2061			-4,1614	79,14	79,14
2066			-4,3157	79,25	79,25
2071			-4,4699	79,35	79,35
2076			-4,6242	79,43	79,43
2081			-4,7784	79,49	79,49
2086			-4,9327	79,55	79,55
2091			-5,0869	79,60	79,60
2096			-5,2412	79,65	79,65
2101			-5,3954	79,68	79,68

Por fin, las esperanzas de vida para cada año se obtendrían mediante la interpolación lineal entre las esperanzas de vida ajustadas cada cinco años, tal y como se presenta en el cuadro 11.

**Cuadro 11. Hombres: serie estimada de esperanzas de vida para el periodo 2001-2025.**

AÑO	$e_o^t$ estimada anual	AÑO	$e_o^t$ estimada anual
1970	69,57	2009	76,31
1975	70,41	2010	76,42
1980	72,52	2011	76,52
1985	73,27	2012	76,61
1990	73,40	2013	76,70
1996	74,74	2014	76,79
1997	74,87	2015	76,88
1998	75,01	2016	76,98
1999	75,14	2017	77,06
2000	75,28	2018	77,13
2001	75,41	2019	77,21
2002	75,53	2020	77,29
2003	75,65	2021	77,37
2004	75,77	2022	77,44
2005	75,88	2023	77,51
2006	76,00	2024	77,58
2007	76,11	2025	77,65
2008	76,21		

A continuación el coeficiente  $C^{2025}$  de la ecuación 4 en hombres es el siguiente:

$$C^{2025} = \frac{77,65 - 76,19}{78,98 - 76,19} = 0,5237$$

donde:

- $e_0^{2025} = 77,65$  y
- 78,98 y 76,19 son las esperanzas de vida al nacer de las tablas tipo de nivel 27 y 26, respectivamente.

El cuadro 12 refleja las tasas de mortalidad del año 2025, construidas a partir de dicho coeficiente. También se incorporan las tasas de mortalidad del año 1996.

**Cuadro 12. Hombres: tasas de mortalidad estimadas por grupos de edad en el año 2025 y tasas de mortalidad del año 1996.**

	TABLAS TIPO		TABLA DEL	TABLA DEL
	TABLA 26	TABLA 27	AÑO 2025	AÑO 1996
Edad	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$
0	5,13	3,57	4,3130	6,1828
1	0,45	0,37	0,4081	0,3635
5	0,14	0,05	0,0929	0,1853
10	0,13	0,05	0,0881	0,2187
15	0,55	0,33	0,4348	0,6300
20	0,9	0,75	0,8214	0,9239
25	1,02	0,9	0,9572	1,3368
30	0,97	0,8	0,8810	2,0648
35	1,2	0,93	1,0586	2,2690
40	1,87	1,45	1,6500	2,6568
45	3	2,28	2,6229	3,8461
50	5,15	4,32	4,7153	5,8099
55	7,68	5,62	6,6012	8,8193
60	12,24	8,78	10,4280	13,9794
65	19,63	13,37	16,3516	21,8464
70	32,56	22,48	27,2810	35,4634
75	58,34	44,49	51,0866	57,3685
80	99,28	82,42	90,4502	97,6027
85	161,46	143,44	152,0227	161,1556
90	250,97	234,51	242,3497	238,7528
95	372,84	360,19	366,2150	443,8190
100	537,15	527,85	532,2795	613,0980
$e_o^t$	76,19	78,98	77,65	74,74

Las tasas específicas de mortalidad por grupos de edades, para cada año, se obtendrán interpolando entre las tasas del año de partida, 1996, y las del año horizonte, 2025.

Entre 1996 y el 2025 las tasas de mortalidad se reducen en todos los grupos de edad con excepción de dos, el [1;4] y el [90-94].

En el primero de ellos se repite la casuística de las mujeres, por lo que el argumento es el mismo, es decir, la existencia en 1996 de un nivel de mortalidad masculino excepcionalmente bajo, en comparación con otros tramos.

Por la misma razón diríamos que, en 1996, la mortalidad del tramo [90;94] era baja en comparación con otros. Ello manteniendo cierta cautela, habida cuenta de las distorsiones encontradas en la estadística de fallecidos con más de 90 años (I.N.E., 1999, pág.12).

En el anexo 3 aparecen recogidas las tasas específicas de mortalidad para cada uno de los años proyectados, desde el 2001 hasta el 2025.

Finalmente, aplicando la hipótesis de distribución uniforme de los fallecimientos y las ecuaciones 5, 6, 7, 8, 9 y 10 se obtendrían las tablas de mortalidad completas para cada uno de los años proyectados. El cuadro 13 recoge la tabla del año 2015.

**Cuadro 13. Hombres: tabla de mortalidad proyectada en el año 2015.**

Edad	n	${}_n m_x$	${}_n q_x$	$l_x$	${}_n L_x$	${}_n Z_x$
0	1	4,8051	0,0048	100.000	99.760	0,9951
1	4	0,3964	0,0016	99.521	397.767	0,9983
5	5	0,1172	0,0006	99.363	496.669	0,9994
10	5	0,1225	0,0006	99.305	496.372	0,9985
15	5	0,4862	0,0024	99.244	495.618	0,9967
20	5	0,8484	0,0042	99.003	493.967	0,9952
25	5	1,0571	0,0053	98.584	491.621	0,9944
30	5	1,1925	0,0059	98.064	488.864	0,9936
35	5	1,3772	0,0069	97.481	485.734	0,9918
40	5	1,9150	0,0095	96.812	481.755	0,9879
45	5	2,9449	0,0146	95.890	475.945	0,9804
50	5	5,0034	0,0247	94.488	466.604	0,9701
55	5	7,1850	0,0353	92.154	452.637	0,9549
60	5	11,3627	0,0552	88.901	432.229	0,9302
65	5	17,7978	0,0852	83.990	402.061	0,8900
70	5	29,4346	0,1371	76.834	357.839	0,8185
75	5	52,7400	0,2330	66.301	292.890	0,7053
80	5	92,3327	0,3751	50.854	206.586	0,5549
85	5	154,4265	0,5571	31.780	114.640	0,3829
90	5	241,4030	0,7527	14.076	43.892	0,2016
95	5	386,6402	0,9830	3.481	8.849	0,0033
100	-	553,5507	1,0000	59	30	



**ANEXO 3: TASAS DE MORTALIDAD PROYECTADAS DE MUJERES I**

<b>AÑO</b>	<b>2001</b>	<b>2002</b>	<b>2003</b>	<b>2004</b>	<b>2005</b>	<b>2006</b>	<b>2007</b>
<b>Coefficiente B</b>	0,26	0,30	0,35	0,39	0,43	0,48	0,51
<b>Edad</b>	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$
0	4,2403	4,1660	4,0917	4,0174	3,9431	3,8687	3,8078
1	0,3051	0,3052	0,3054	0,3055	0,3057	0,3058	0,3059
5	0,1200	0,1151	0,1103	0,1054	0,1005	0,0956	0,0916
10	0,1218	0,1167	0,1117	0,1066	0,1016	0,0965	0,0924
15	0,2235	0,2174	0,2113	0,2053	0,1992	0,1931	0,1881
20	0,2793	0,2768	0,2743	0,2718	0,2693	0,2668	0,2647
25	0,4149	0,4086	0,4023	0,3960	0,3898	0,3835	0,3783
30	0,6078	0,5928	0,5777	0,5627	0,5477	0,5326	0,5203
35	0,7220	0,7071	0,6922	0,6773	0,6624	0,6475	0,6353
40	1,0254	1,0080	0,9906	0,9732	0,9558	0,9384	0,9241
45	1,4197	1,4025	1,3852	1,3680	1,3508	1,3335	1,3194
50	2,1675	2,1548	2,1422	2,1295	2,1169	2,1043	2,0939
55	3,1561	3,1178	3,0795	3,0412	3,0029	2,9646	2,9332
60	4,9915	4,9221	4,8526	4,7832	4,7137	4,6443	4,5873
65	8,0740	7,9329	7,7917	7,6506	7,5094	7,3683	7,2526
70	14,6472	14,3968	14,1465	13,8961	13,6458	13,3954	13,1902
75	29,1179	28,7384	28,3590	27,9795	27,6000	27,2205	26,9094
80	59,7843	59,1722	58,5601	57,9480	57,3359	56,7238	56,2220
85	116,3524	115,3280	114,3036	113,2791	112,2547	111,2303	110,3905
90	206,5715	205,1349	203,6983	202,2617	200,8251	199,3885	198,2109
95	399,6244	394,2620	388,8997	383,5373	378,1749	372,8126	368,4170
100	575,9116	570,8645	565,8174	560,7703	555,7232	550,6761	546,5390

<b>AÑO</b>	<b>2008</b>	<b>2009</b>	<b>2010</b>	<b>2011</b>	<b>2012</b>	<b>2013</b>
<b>Coefficiente B</b>	0,55	0,58	0,62	0,65	0,68	0,71
<b>Edad</b>	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$	$n_{m_x}$
0	3,7469	3,6860	3,6251	3,5642	3,5145	3,4648
1	0,3060	0,3061	0,3062	0,3064	0,3065	0,3065
5	0,0876	0,0836	0,0796	0,0756	0,0723	0,0690
10	0,0882	0,0841	0,0799	0,0758	0,0724	0,0690
15	0,1832	0,1782	0,1732	0,1682	0,1642	0,1601
20	0,2627	0,2606	0,2586	0,2565	0,2548	0,2531
25	0,3732	0,3680	0,3629	0,3577	0,3535	0,3494
30	0,5080	0,4957	0,4834	0,4710	0,4610	0,4509
35	0,6231	0,6108	0,5986	0,5864	0,5764	0,5665
40	0,9099	0,8956	0,8813	0,8671	0,8554	0,8438
45	1,3053	1,2911	1,2770	1,2629	1,2513	1,2398
50	2,0835	2,0732	2,0628	2,0524	2,0440	2,0355
55	2,9018	2,8704	2,8390	2,8076	2,7820	2,7564
60	4,5304	4,4735	4,4166	4,3596	4,3132	4,2668
65	7,1369	7,0212	6,9055	6,7898	6,6955	6,6012
70	12,9850	12,7798	12,5746	12,3693	12,2020	12,0346
75	26,5983	26,2873	25,9762	25,6651	25,4114	25,1578
80	55,7203	55,2185	54,7168	54,2150	53,8059	53,3967
85	109,5508	108,7111	107,8713	107,0316	106,3468	105,6620
90	197,0332	195,8556	194,6780	193,5004	192,5401	191,5798
95	364,0214	359,6258	355,2302	350,8346	347,2501	343,6657
100	542,4018	538,2646	534,1275	529,9903	526,6166	523,2429

**ANEXO 3: TASAS DE MORTALIDAD PROYECTADAS DE MUJERES II**

<b>AÑO</b>	<b>2014</b>	<b>2015</b>	<b>2016</b>	<b>2017</b>	<b>2018</b>	<b>2019</b>
<b>Coefficiente B</b>	0,74	0,77	0,80	0,82	0,85	0,87
<b>Edad</b>	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$
0	3,4151	3,3655	3,3158	3,2738	3,2319	3,1899
1	0,3066	0,3067	0,3068	0,3069	0,3070	0,3071
5	0,0657	0,0625	0,0592	0,0564	0,0537	0,0509
10	0,0657	0,0623	0,0589	0,0561	0,0532	0,0504
15	0,1561	0,1520	0,1479	0,1445	0,1411	0,1376
20	0,2515	0,2498	0,2481	0,2467	0,2453	0,2439
25	0,3452	0,3410	0,3368	0,3332	0,3297	0,3261
30	0,4409	0,4308	0,4208	0,4123	0,4038	0,3953
35	0,5565	0,5466	0,5366	0,5282	0,5198	0,5113
40	0,8322	0,8205	0,8089	0,7991	0,7893	0,7794
45	1,2283	1,2168	1,2052	1,1955	1,1858	1,1760
50	2,0271	2,0186	2,0102	2,0031	1,9959	1,9888
55	2,7308	2,7052	2,6796	2,6580	2,6364	2,6148
60	4,2204	4,1739	4,1275	4,0883	4,0491	4,0099
65	6,5068	6,4125	6,3181	6,2384	6,1587	6,0791
70	11,8673	11,7000	11,5326	11,3913	11,2499	11,1086
75	24,9041	24,6504	24,3968	24,1825	23,9683	23,7540
80	52,9876	52,5784	52,1692	51,8237	51,4781	51,1325
85	104,9773	104,2925	103,6077	103,0293	102,4509	101,8725
90	190,6195	189,6592	188,6989	187,8878	187,0767	186,2656
95	340,0812	336,4968	332,9123	329,8848	326,8572	323,8296
100	519,8692	516,4954	513,1217	510,2721	507,4225	504,5730

<b>AÑO</b>	<b>2020</b>	<b>2021</b>	<b>2022</b>	<b>2023</b>	<b>2024</b>	<b>2025</b>
<b>Coefficiente B</b>	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	1,00
<b>Edad</b>	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$
0	3,1479	3,1060	3,0718	3,0376	3,0033	2,9691
1	0,3071	0,3072	0,3073	0,3073	0,3074	0,3075
5	0,0482	0,0454	0,0432	0,0409	0,0387	0,0364
10	0,0475	0,0446	0,0423	0,0400	0,0377	0,0353
15	0,1342	0,1308	0,1280	0,1252	0,1224	0,1196
20	0,2424	0,2410	0,2399	0,2387	0,2376	0,2364
25	0,3226	0,3190	0,3161	0,3133	0,3104	0,3075
30	0,3868	0,3784	0,3714	0,3645	0,3576	0,3507
35	0,5029	0,4945	0,4877	0,4808	0,4739	0,4671
40	0,7696	0,7598	0,7518	0,7438	0,7358	0,7277
45	1,1663	1,1566	1,1486	1,1407	1,1328	1,1248
50	1,9816	1,9745	1,9687	1,9629	1,9570	1,9512
55	2,5931	2,5715	2,5539	2,5363	2,5186	2,5010
60	3,9707	3,9315	3,8995	3,8675	3,8355	3,8036
65	5,9994	5,9197	5,8547	5,7897	5,7248	5,6598
70	10,9672	10,8259	10,7106	10,5954	10,4801	10,3648
75	23,5397	23,3255	23,1508	22,9761	22,8013	22,6266
80	50,7869	50,4413	50,1595	49,8777	49,5959	49,3141
85	101,2941	100,7157	100,2441	99,7725	99,3009	98,8292
90	185,4545	184,6434	183,9820	183,3206	182,6592	181,9978
95	320,8020	317,7744	315,3057	312,8369	310,3682	307,8995
100	501,7234	498,8738	496,5502	494,2266	491,9030	489,5794

**ANEXO 3: TASAS DE MORTALIDAD PROYECTADAS DE HOMBRES I**

<b>AÑO</b>	<b>2001</b>	<b>2002</b>	<b>2003</b>	<b>2004</b>	<b>2005</b>	<b>2006</b>	<b>2007</b>
<b>Coefficiente B</b>	0,23	0,27	0,31	0,35	0,39	0,43	0,47
<b>Edad</b>	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$
0	5,7517	5,6757	5,5997	5,5238	5,4478	5,3718	5,3052
1	0,3738	0,3756	0,3774	0,3792	0,3810	0,3828	0,3844
5	0,1640	0,1602	0,1564	0,1527	0,1489	0,1452	0,1419
10	0,1886	0,1833	0,1780	0,1727	0,1674	0,1621	0,1574
15	0,5850	0,5771	0,5691	0,5612	0,5533	0,5453	0,5384
20	0,9003	0,8961	0,8919	0,8878	0,8836	0,8795	0,8758
25	1,2492	1,2338	1,2184	1,2030	1,1875	1,1721	1,1586
30	1,7918	1,7437	1,6956	1,6475	1,5994	1,5513	1,5091
35	1,9899	1,9407	1,8915	1,8423	1,7932	1,7440	1,7008
40	2,4246	2,3837	2,3428	2,3019	2,2610	2,2201	2,1842
45	3,5641	3,5144	3,4647	3,4150	3,3653	3,3156	3,2720
50	5,5575	5,5131	5,4686	5,4241	5,3796	5,3352	5,2961
55	8,3078	8,2177	8,1276	8,0374	7,9473	7,8572	7,7781
60	13,1605	13,0162	12,8719	12,7276	12,5833	12,4390	12,3124
65	20,5793	20,3560	20,1328	19,9095	19,6863	19,4631	19,2671
70	33,5766	33,2442	32,9117	32,5793	32,2468	31,9144	31,6226
75	55,9199	55,6647	55,4094	55,1542	54,8990	54,6438	54,4198
80	95,9534	95,6628	95,3722	95,0816	94,7910	94,5004	94,2453
85	159,0496	158,6786	158,3075	157,9364	157,5654	157,1943	156,8687
90	239,5822	239,7284	239,8745	240,0206	240,1668	240,3129	240,4412
95	425,9240	422,7710	419,6181	416,4651	413,3122	410,1592	407,3920
100	594,4618	591,1782	587,8946	584,6111	581,3275	578,0439	575,1621

<b>AÑO</b>	<b>2008</b>	<b>2009</b>	<b>2010</b>	<b>2011</b>	<b>2012</b>	<b>2013</b>
<b>Coefficiente B</b>	0,51	0,54	0,58	0,61	0,64	0,67
<b>Edad</b>	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$
0	5,2385	5,1718	5,1051	5,0384	4,9801	4,9218
1	0,3860	0,3876	0,3892	0,3908	0,3922	0,3936
5	0,1386	0,1353	0,1320	0,1287	0,1258	0,1229
10	0,1527	0,1481	0,1434	0,1388	0,1347	0,1306
15	0,5314	0,5245	0,5175	0,5105	0,5044	0,4984
20	0,8721	0,8685	0,8648	0,8612	0,8580	0,8548
25	1,1450	1,1315	1,1180	1,1044	1,0926	1,0808
30	1,4669	1,4247	1,3825	1,3402	1,3033	1,2664
35	1,6577	1,6145	1,5713	1,5282	1,4904	1,4527
40	2,1483	2,1124	2,0765	2,0406	2,0092	1,9778
45	3,2283	3,1847	3,1411	3,0975	3,0593	3,0212
50	5,2571	5,2181	5,1790	5,1400	5,1059	5,0717
55	7,6990	7,6199	7,5408	7,4617	7,3925	7,3233
60	12,1857	12,0591	11,9325	11,8058	11,6950	11,5843
65	19,0712	18,8752	18,6793	18,4834	18,3120	18,1406
70	31,3308	31,0391	30,7473	30,4555	30,2003	29,9450
75	54,1958	53,9718	53,7478	53,5238	53,3278	53,1319
80	93,9903	93,7352	93,4802	93,2252	93,0020	92,7789
85	156,5430	156,2173	155,8917	155,5660	155,2811	154,9962
90	240,5694	240,6977	240,8260	240,9542	241,0664	241,1786
95	404,6247	401,8575	399,0902	396,3230	393,9023	391,4816
100	572,2802	569,3983	566,5164	563,6346	561,1136	558,5926

**ANEXO 3: TASAS DE MORTALIDAD PROYECTADAS DE HOMBRES II**

<b>AÑO</b>	<b>2014</b>	<b>2015</b>	<b>2016</b>	<b>2017</b>	<b>2018</b>	<b>2019</b>
<b>Coefficiente B</b>	0,71	0,74	0,77	0,80	0,82	0,85
<b>Edad</b>	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$
0	4,8635	4,8051	4,7468	4,6957	4,6445	4,5934
1	0,3950	0,3964	0,3977	0,3990	0,4002	0,4014
5	0,1201	0,1172	0,1143	0,1118	0,1092	0,1067
10	0,1266	0,1225	0,1184	0,1148	0,1113	0,1077
15	0,4923	0,4862	0,4801	0,4747	0,4694	0,4641
20	0,8516	0,8484	0,8452	0,8424	0,8396	0,8368
25	1,0689	1,0571	1,0452	1,0348	1,0245	1,0141
30	1,2295	1,1925	1,1556	1,1232	1,0909	1,0585
35	1,4149	1,3772	1,3394	1,3063	1,2732	1,2401
40	1,9464	1,9150	1,8836	1,8561	1,8285	1,8010
45	2,9830	2,9449	2,9067	2,8733	2,8398	2,8063
50	5,0376	5,0034	4,9693	4,9393	4,9094	4,8795
55	7,2542	7,1850	7,1158	7,0551	6,9944	6,9338
60	11,4735	11,3627	11,2519	11,1548	11,0576	10,9605
65	17,9692	17,7978	17,6264	17,4761	17,3258	17,1755
70	29,6898	29,4346	29,1793	28,9555	28,7318	28,5080
75	52,9359	52,7400	52,5440	52,3722	52,2004	52,0286
80	92,5558	92,3327	92,1096	91,9140	91,7184	91,5227
85	154,7113	154,4265	154,1416	153,8918	153,6420	153,3922
90	241,2908	241,4030	241,5152	241,6136	241,7120	241,8103
95	389,0609	386,6402	384,2195	382,0970	379,9745	377,8520
100	556,0717	553,5507	551,0298	548,8193	546,6089	544,3984

<b>AÑO</b>	<b>2020</b>	<b>2021</b>	<b>2022</b>	<b>2023</b>	<b>2024</b>	<b>2025</b>
<b>Coefficiente B</b>	0,88	0,90	0,93	0,95	0,98	1,00
<b>Edad</b>	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$	$n m_x$
0	4,5423	4,4911	4,4466	4,4021	4,3575	4,3130
1	0,4026	0,4039	0,4049	0,4060	0,4070	0,4081
5	0,1042	0,1017	0,0995	0,0973	0,0951	0,0929
10	0,1041	0,1005	0,0974	0,0943	0,0912	0,0881
15	0,4587	0,4534	0,4487	0,4441	0,4394	0,4348
20	0,8340	0,8312	0,8288	0,8263	0,8239	0,8214
25	1,0037	0,9933	0,9843	0,9752	0,9662	0,9572
30	1,0261	0,9937	0,9655	0,9373	0,9092	0,8810
35	1,2070	1,1739	1,1451	1,1162	1,0874	1,0586
40	1,7735	1,7459	1,7220	1,6980	1,6740	1,6500
45	2,7729	2,7394	2,7103	2,6812	2,6521	2,6229
50	4,8495	4,8196	4,7935	4,7675	4,7414	4,7153
55	6,8731	6,8124	6,7596	6,7068	6,6540	6,6012
60	10,8634	10,7662	10,6817	10,5971	10,5125	10,4280
65	17,0252	16,8749	16,7441	16,6133	16,4824	16,3516
70	28,2842	28,0604	27,8655	27,6707	27,4758	27,2810
75	51,8568	51,6849	51,5354	51,3858	51,2362	51,0866
80	91,3271	91,1315	90,9612	90,7909	90,6205	90,4502
85	153,1424	152,8926	152,6751	152,4577	152,2402	152,0227
90	241,9087	242,0071	242,0927	242,1784	242,2640	242,3497
95	375,7294	373,6069	371,7589	369,9110	368,0630	366,2150
100	542,1880	539,9775	538,0530	536,1285	534,2040	532,2795

## BIBLIOGRAFÍA

### DEL CAPITULO I:

1. Fernández, J.A. y Leguina, J.: “Situación y Perspectivas de la Población Española” en Revista de Economía y Sociología del Trabajo; nº 11/marzo 1991; pág.52.
2. Génova, R. et al. : “Demografía, Análisis y Proyecciones”; editorial Síntesis, 1997.
3. Génova, R. et al. : “La mortalidad en la proyección multirregional de la población española”; Madrid, Instituto de Demografía; C.S.I.C.; 1994.
4. Instituto Nacional de Estadística: “Tablas de Mortalidad de la Población Española 1996-1997”; Madrid 1999.
5. Population Reference Bureau: “PRB 2000 World Pop Data Sheet” en [www.prb.org](http://www.prb.org).

### DEL CAPITULO II:

1. Artís, M., Ayuso, M. y Carrillo, M.: “Estadística Actuarial Vda. Parte I.”; Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española; Universidad de Barcelona; 1996.
2. Beaver, B. J.: “Study Guide with Student Solutions. Introduction to Probability and Statistics”; Duxbury Press; California; 1994.
3. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. y Nesbitt, C. J.: “Actuarial Mathematics”; The Society of Actuaries; Illinois; 1986.
4. Daykin, C. D., Pentikäinen, T. y Pesonen, M.: “Practical Risk Theory for Actuaries”; Chapman and Hall; London; 1994.
5. Felipe, A. y Guillén, M.: “Evolución y predicción de tablas de mortalidad dinámicas para la población española”; Fundación MAPFRE Estudios; Madrid; 1999.
6. Fernández, J.: “Tablas de mortalidad de la población española de 1950 a 1990: tabla proyectada del año 2000. Tablas con y sin margen de seguridad”; Actuarios, 12; 1995.
7. Gil, J.A., Heras, A. y Vilar, J.L.: “Matemática actuarial vida”; MAPFRE; Madrid; 1999.
8. Habberman, S. y Sibbett, T.A.: “The History of Actuarial Science. Vol. I y II”; Pickering y Chatto; 1995.
9. Jordan, C. W.: Society of Actuaries' Textbook on Life Contingences; The Society of Actuaries; Chicago; 1991.
10. Levi, E.: “Curso de Matemática Financiera y Actuarial. Vol. II.”; Bosch; Casa Editorial; Barcelona; 1973.
11. López Cachero, M. y López de la Manzanara, J.M.: “Estadística para actuarios”; MAPFRE; Madrid; 1996.
12. Nieto de Alba, U. y Vegas Asensio, J.: “Matemática Actuarial”; MAPFRE; Madrid; 1993.
13. Vegas Pérez, A.: “Estadística: Aplicaciones Económicas y Actuariales”; Pirámide.

**DEL CAPITULO III:**

1. Heubeck K. & Herrmann, R.: “Sterbetafeln für Selbständige”; International Congress of Actuaries, Birmingham 1998.
2. Koller, Michael et al.: “Methodik zur Konstruktion von Generationentafeln”; VPL 1998.
3. Loebus, Horst: “Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter”; Blätter der DGVM, Band XXI, Heft 4, 1994.
4. Maeder, Philippe: “La construction des tables de mortalité du tarif collectif 1995 de l’UPAV”; Association Suisse de Actuaires No. 2/1995.
5. Martín Guzmán, María Pilar: “Tablas de Mortalidad de la Población Española 1994-95”; Instituto Nacional de Estadística, 1998.
6. Nolfi, P.: “Die Berücksichtigung der Sterblichkeitsverbesserung in der Rentenversicherung nach der Optimalmethode der Spieltheorie”; MSVM 1959.
7. Prieto Pérez, Eugenio: “Tablas de Mortalidad de la Población Española PEM 70 y PEF 70”; Instituto de Actuarios Españoles, 1982.
8. Prieto Pérez, Eugenio y Fernández Plasencia, M. Javier: “Tablas de Mortalidad de la Población Española de 1950 a 1990”; Servicio Actuarial de UNESPA, 1994.
9. Renshaw A.E., Haberman, S. & Hatzopoulos, P.: “The Modelling of Recent Mortality Trends in United Kingdom Male Assured Lives”; British Actuarial Journal, 2,II (1996).
10. Schmithals, B & Schütz, E. U.: “Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 für Rentenversicherungen”; Blätter der DGVM, Band XXII, Heft 1, 1995.
11. Wang, S.: “A frailty model for projection of mortality improvement”; Working Paper, University of Waterloo, Canada.