

**INDETERMINACIÓN Y FUNCIÓN DE UTILIDAD NO SEPARABLE EN
CONSUMO PÚBLICO Y OCIO (*)**

Esther Fernández

Jesús Ruiz

Instituto Complutense de Análisis Económico (ICAE)
Universidad Complutense de Madrid
Campus de Somosaguas
28223 Madrid

ABSTRACT

We show that in a simple growth model, where public consumption enters the utility function, and under constant returns to scale in production, the competitive equilibrium can be undetermined. Indeterminacy of equilibria arises for plausible values of the elasticity of intertemporal substitution of consumption, and even when supply and demand labor curves have the standard slopes. Non-separability between public consumption and leisure in the utility function is crucial for this result.

RESUMEN

En este trabajo se muestra que, en un modelo de crecimiento sencillo, donde el consumo público es un argumento de la función de utilidad, y en el que la tecnología de producción exhibe rendimientos constantes a escala en la producción, el equilibrio competitivo puede estar indeterminado. Se produce indeterminación de equilibrios para valores creíbles de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo. Además, puede ocurrir que las curvas de oferta y demanda de trabajo tengan las pendientes habituales. Para obtener estos resultados es imprescindible suponer preferencias en las que el consumo público y el ocio son no separables.

(*) Agradecemos al profesor Alfonso Novales sus valiosos comentarios y sugerencias, así como su apoyo. Asimismo, agradecemos la financiación recibida del Ministerio de Educación (PB98-0831) para la realización de este trabajo.

1 Introducción

En este trabajo estudiamos las condiciones bajo las cuales, en un modelo de crecimiento neoclásico, con gasto público en la función de utilidad y rendimientos constantes a escala en producción, el equilibrio se muestra indeterminado. Estas condiciones determinan la forma de la función de utilidad y la política de gasto que lleva a cabo la autoridad fiscal.

En los últimos años se han desarrollado modelos de equilibrio general dinámicos que muestran indeterminación, es decir, múltiples sendas convergiendo hacia un estado estacionario. Además, la indeterminación asegura la existencia de un continuo de equilibrios sunspot estacionarios, es decir, equilibrios de expectativas racionales estocásticos estacionarios accionados por perturbaciones que no están relacionadas con la incertidumbre sobre los fundamentos económicos. El interés de estos equilibrios sunspot se explica porque proporcionan una justificación teórica de los conocidos "animal spirits" en relación con la inestabilidad económica.

Así, se han estudiado qué características deben darse en los modelos tanto unisectoriales como multisectoriales de ciclo real estándar o en modelos de crecimiento endógeno para que ocurra indeterminación de equilibrios. En los primeros trabajos, cuando estos modelos son extendidos para incluir efectos externos, la indeterminación ocurre cuando los rendimientos crecientes a escala son suficientemente altos (véase Benhabib y Farmer (1994) y Farmer y Guo (1994), para modelos unisectoriales). Este resultado implica que el efecto externo sobre el trabajo debe ser suficientemente grande para que la curva de demanda de empleo tenga una pendiente positiva mayor que la de la curva de oferta. Sin embargo, gran parte de la investigación en este área se ha centrado en la plausibilidad empírica de las magnitudes de los rendimientos constantes a escala y de las imperfecciones requeridas para generar múltiples equilibrios. Esta es la principal razón por la que estos modelos han sido ampliamente criticados: requieren grados de rendimientos crecientes mayores de los que se estiman con datos reales.

Sin embargo, trabajos más recientes han establecido que los rendimientos crecientes necesarios para conseguir indeterminación son mucho menos exigentes, permitiendo curvas de demanda de trabajo con pendientes negativas: en i) estructuras de dos sectores con externalidades en un sector específico (Benhabib y Farmer (1996), o ver también Perli (1998), Benhabib y Nishimura (1998), Weder (1998) que introduce un sector de consumo duradero además de los sectores de inversión y del consumo no duradero o Barinci y Chéron (2001) en un modelo con dos tipos de consumidores en un entorno restringido financieramente); y ii) en modelos de un sector que incorporan características no estándar tales como preferencias no-separables (Bennett y Farmer (2000)) o incorporando en el modelo la capacidad de utilización (Wen (1998)).

Sin bien en estos últimos trabajos se consigue obtener equilibrios indeterminados para rendimientos crecientes a escala bajos, los valores de la elasticidad de sustitución intertemporal que soportan tal indeterminación es frecuentemente muy alta en relación con los valores estimados para las economías en la literatura de ciclo real. Esta alta sustitución intertemporal implica unas sendas de consumo muy volátiles en términos del output, que no se ajusta a las características cíclicas observadas en las economías reales. Esta característica (valores altos de la elasticidad de sustitución intertemporal compatibles con equilibrios indeterminados), es compartida no sólo por los modelos antes mencionados

sino también para los modelos de crecimiento endógeno generadores de indeterminación. En estas estructuras, es necesario para obtener indeterminación una externalidad suficiente junto con una alta elasticidad de sustitución intertemporal (véanse Benhabib y Perli (1994) o Xie (1994)).

Así, nosotros mostramos en el marco de un modelo de equilibrio general dinámico que, para valores de la elasticidad de sustitución intertemporal acordes con los calibrados en la literatura de ciclo real y bajo rendimientos constantes a escala, existen condiciones bajo las cuales el equilibrio se muestra indeterminado. Además, encontramos una región no trivial en el espacio paramétrico compatible con indeterminación en la que las curvas de oferta y demanda de empleo tienen las pendientes estándar siempre que los consumos privado y público sean sustitutivos.

Como en la mayor parte de la literatura de indeterminación, el modelo que postulamos no es ajeno a las externalidades. Así, extendemos el modelo de crecimiento neoclásico para incluir consumo público en la función de utilidad. Esta extensión está plenamente justificada por el hecho de que para diseñar la política fiscal es crucial conocer el efecto que el consumo público de bienes y servicios tiene sobre el consumo privado y las decisiones de ocio-trabajo. Así, existen estudios empíricos que estiman para las economías reales un grado de sustituibilidad o complementariedad no nulo entre consumo privado y público (véase Ni (1995), por ejemplo). Además, desde el punto de vista de la política fiscal, suponemos en nuestro modelo que i) el consumo público es financiado con impuestos distorsionantes (en particular, un impuesto proporcional sobre la renta salarial y de capital); ii) existe equilibrio presupuestario en cada periodo; y iii) la política de gasto se define como un porcentaje, dado exógenamente, del output.

En el trabajo de Guo y Lansing (1998), en un modelo de crecimiento de ciclo real unisectorial con rendimientos crecientes a escala en producción, se demuestra que con una política de gasto también dada como un porcentaje del output, pero con una estructura impositiva que incluye, para diversos valores paramétricos alternativos, impuestos regresivos, proporcionales y progresivos, puede obtenerse indeterminación de equilibrios, si bien, la progresividad impositiva puede actuar como estabilizador económico en tanto impide el mecanismo que genera indeterminación de equilibrios. A diferencia de este trabajo, el nuestro no necesita rendimientos crecientes a escala para generar indeterminación por lo que nuestra estructura es susceptible de ser estudiada bajo las reglas impositivas de Guo y Lansing (1998) con el fin de estudiar qué grado de progresividad es necesaria para "estabilizar" la economía, en el sentido de estos autores.

Schmitt-Grohé y Uribe (1997) estudian, en un modelo similar al nuestro (sin consumo público en la función de utilidad), las condiciones para que se dé indeterminación de equilibrios. Estos autores encuentran que bajo una regla de presupuesto equilibrado de la autoridad fiscal junto con un plan de gasto constante dado exógenamente y con impuestos distorsionantes financiadores de este gasto, existe indeterminación para un rango de valores del tipo impositivo proporcional sobre la renta y para valores de la elasticidad de sustitución intertemporal acordes con los estimados en la literatura de ciclo real. Nuestro trabajo, sin embargo, demuestra que no es necesario un gasto público constante y exógeno para obtener equilibrios indeterminados y que la condición para que se den estos equilibrios es independiente del valor que tome el tipo impositivo sobre la renta .

Finalmente, mostramos que si ocurre simultáneamente que: i) existe no-separabilidad

en consumo público y ocio en la función de utilidad, y ii) la política de gasto se define como un porcentaje dado exógenamente del output, existe indeterminación para valores de la elasticidad de sustitución intertemporal inferiores a la elasticidad empleo-output de la función de producción, y la condición de indeterminación es independiente de los parámetros fiscales. Además, mostramos que el espacio paramétrico en el que se da indeterminación es compatible con elasticidades de la oferta de empleo respecto del consumo público positivas, negativas o nulas.

El resto del paper se organiza como sigue: en la sección 2 se describe el modelo. En la sección 3 se estudia la dinámica de transición del modelo y se dan las condiciones de indeterminación de equilibrios. En la sección 4 se muestra un ejemplo numérico. Por último, en la sección 5 se concluye.

2 Modelo

2.1 El Problema del Consumidor

En la economía existe un continuo de consumidores idénticos, cada uno de los cuales obtiene utilidad de consumo privado y público, así como de ocio según la función

$$U(c, g, n) = \frac{(c + \phi g)^{1-\rho} - 1}{1-\rho} - g^{1-\rho} n^{1+\chi} \quad (1)$$

donde c es el consumo privado, g es el consumo público y n es la oferta de trabajo a la Benhabib y Farmer (1994).¹ $\phi \geq 0$ determina el grado de sustituibilidad de los consumos privado y público (como en Shawn Ni (1995)), $\chi \geq 0$ define la elasticidad de la oferta de trabajo y $\rho > 0$ define la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo en sentido amplio ($C = c + \phi g$).

Cada consumidor dispone de rentas salariales y de capital que utiliza para consumir, ahorrar/invertir y pagar impuestos a un tipo proporcional $\theta \in (0, 1)$ constante sobre sus dos fuentes de renta:

$$c + \dot{k} + \delta k = (1 - \theta)(\omega n + rk) \quad (2)$$

donde ω es el salario real y r es el rendimiento del factor capital (k). Por tanto, el consumidor representativo se enfrenta al problema de optimización intertemporal

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \int_0^{\infty} e^{-\beta t} U(c, g, n) dt \\ \text{s.a.} \quad & : \quad (2) \\ & k(0) = k_0 \text{ dado.} \end{aligned} \quad (3)$$

¹Otros autores también han modelizado el trabajo en la función de utilidad de la misma manera [Benett y Farmer (2000) y Farmer (1997)].

donde $\beta > 0$ es la tasa de descuento intertemporal.
Las condiciones de primer orden del problema (3) son:

$$(c + \phi g)^{-\rho} = \lambda \quad (4)$$

$$(1 + \chi) g^{1-\rho} n^\chi = \lambda(1 - \theta)\omega \quad (5)$$

$$-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = (1 - \theta)r - (\delta + \beta) \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\beta t} \lambda = 0 \quad (7)$$

donde λ es la variable de co-estado asociada a la restricción presupuestaria del consumidor.

Combinando (4) y (5):

$$\omega = \frac{(1 + \chi)}{(1 - \theta)} (c + \phi g)^\rho g^{1-\rho} n^\chi, \quad (8)$$

es decir, el salario debe igualarse a la relación marginal de sustitución entre consumo y ocio.

Combinando (4) con (6):

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\rho} [(1 - \theta)r - (\delta + \beta)] \quad (9)$$

es decir, la tasa de crecimiento del consumo en sentido amplio es proporcional (a la tasa $\frac{1}{\rho}$) al rendimiento del capital neto de impuestos y depreciación.

2.2 Empresas

Existe un continuo de empresas competitivas idénticas cuyo número total se normaliza a uno. La función de producción agregada exhibe rendimientos constantes a escala:

$$y = Ak^\alpha n^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (10)$$

donde y es la producción agregada.

Bajo el supuesto de que los mercados de los factores son perfectamente competitivos las condiciones de maximización de beneficios de la empresa son:

$$r = \alpha \frac{y}{k} \quad (11)$$

$$\omega = (1 - \alpha) \frac{y}{n} \quad (12)$$

2.3 Gobierno

El gobierno elige un tipo impositivo θ y equilibra su presupuesto en cada período:

$$g = \theta (\omega n + rk) \quad (13)$$

Además, la autoridad fiscal realiza un gasto en bienes y servicios que representa un porcentaje constante τ de la producción. Por tanto, dado que se grava a la misma tasa las dos fuentes de renta del consumidor, en equilibrio $\theta = \tau$.

2.4 Equilibrio

Dado θ, τ y k_0 un *equilibrio competitivo* es un conjunto de trayectorias $\{c, n, k, g, \omega, r\}$ tales que: i) dadas las sendas de $\{\omega, r\}$, $\{c, n, k\}$ resuelven el problema del consumidor [(8), (9), (2), (7) y $C = c + \phi g$]; ii) dados $\{\omega, r\}$, $\{n, k\}$ resuelven el problema de la empresa [(11) y (12)], iii) se satisface la restricción presupuestaria del gobierno (13) y iv) los mercados se vacían; en particular, de (2) y (13):

$$(1 - \tau) Ak^\alpha n^{1-\alpha} = c + (\dot{k} + \delta k). \quad (14)$$

3 Dinámica Local

En esta sección analizamos la dinámica local del sistema que define el equilibrio de la economía alrededor del único estado estacionario.

El *estado estacionario* es el vector $(c_{ss}, k_{ss}, n_{ss}, \lambda_{ss}, g_{ss})$ que satisface las ecuaciones del equilibrio competitivo tal que una vez alcanzado, el sistema permanecerá en ese punto indefinidamente:

$$\frac{k_{ss}}{n_{ss}} = \left[\frac{(1 - \tau) A \alpha}{\delta + \beta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (15)$$

$$\frac{c_{ss}}{k_{ss}} = \frac{\delta (1 - \alpha) + \beta}{\alpha}, \quad (16)$$

$$\frac{c_{ss}}{g_{ss}} = \frac{[\delta (1 - \alpha) + \beta] (1 - \tau)}{(\delta + \beta) \tau}, \quad (17)$$

$$n_{ss} = \left[\frac{(1 - \tau) (1 - \alpha)}{\tau (1 + \chi)} \left(\phi + \frac{[\delta (1 - \alpha) + \beta] (1 - \tau)}{(\delta + \beta) \tau} \right)^{-\rho} \right]^{\frac{1}{1+\chi}}, \quad (18)$$

$$\lambda_{ss} = (c_{ss} + \phi g_{ss})^{-\rho}, \quad (19)$$

donde la expresión (15) se obtiene de (6), (16) se obtiene de (14), (17) se obtiene de (13), (18) se obtiene de (8) junto con (12), y (19) se obtiene de (4); todas estas ecuaciones evaluadas en el estado estacionario.

Para analizar la dinámica local del sistema es suficiente con estudiar las transiciones de las variables de estado y co-estado (k , λ). Esto requiere expresar las variables de control (c , n) en función de las dos anteriores:

$$n = \left[\frac{(1-\alpha)(1-\tau)A^\rho}{\tau^{(1-\rho)}(1+\chi)} \lambda k^{\alpha\rho} \right]^{\frac{1}{(1+\chi)-\rho(1-\alpha)}}, \quad (20)$$

$$c = \lambda^{-1/\rho} - \phi \left[\left(\frac{(1-\alpha)(1-\tau)}{1+\chi} \right) \tau^{\frac{\chi+\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1+\chi}{1-\alpha}} k^{\frac{\alpha(1+\chi)}{(1-\alpha)}} \lambda \right]^{\frac{1-\alpha}{1+\chi-\rho(1-\alpha)}}, \quad (21)$$

donde (20) se obtiene de (5) y (21) se obtiene de (4) junto con (20).

La aproximación de primer orden del sistema dinámico formado por las ecuaciones (6) y (14) es:

$$\begin{pmatrix} \dot{k}_t \\ \dot{\lambda}_t \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} k_t - k^* \\ \lambda_t - \lambda^* \end{pmatrix}$$

donde la matriz de transición Γ es (véase apéndice 1):

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \beta + \frac{\delta+\beta}{1+\chi-\rho(1-\alpha)} \left(\rho(1-\alpha) + \phi(1+\chi) \frac{\tau}{(1-\tau)} \right) & \frac{k_{ss}}{\lambda_{ss}} \left[\frac{(\delta+\beta)(1+\chi) \left(1 + \phi \frac{\tau}{(1-\tau)} \right) - \alpha\delta(1+\chi-\rho(1-\alpha))}{(1+\chi-\rho(1-\alpha))\alpha\rho} \right] \\ \frac{k_{ss}}{\lambda_{ss}} (1-\alpha)(\delta+\beta) \frac{(1+\chi-\rho)}{1+\chi-\rho(1-\alpha)} & -\frac{(\delta+\beta)(1-\alpha)}{1+\chi-\rho(1-\alpha)} \end{pmatrix}.$$

Dado que una de las variables que componen el sistema es predeterminada y la otra es libre, el sistema tendrá un único equilibrio determinado localmente cuando el estado estacionario sea una solución de punto de silla; esto requiere una raíz positiva y otra negativa de la matriz Γ . La indeterminación del equilibrio ocurre cuando las dos raíces de Γ son negativas. Debido a que la traza es igual a la suma de las raíces y el determinante es igual a su producto, la indeterminación requiere que la traza de Γ sea negativa, y el determinante positivo.

Proposition 1 *Det*(Γ) > 0 si y sólo si $\chi < -1 + (1-\alpha)\rho$.

Proof. véase apéndice 2. ■

Proposition 2 Si $\text{Det}(\Gamma) > 0$ entonces $\text{Tr}(\Gamma) < 0$ si y sólo si

$$\chi > \frac{\delta - (\delta + \beta) \left[\alpha + \phi \frac{\tau}{(1-\tau)} \right]}{\beta + (\delta + \beta) \phi \frac{\tau}{(1-\tau)}} - \frac{\delta(1-\alpha)}{\beta + (\delta + \beta) \phi \frac{\tau}{(1-\tau)}} \rho.$$

Proof. véase apéndice 3. ■

Proposition 3 Dado que $\chi > 0$, existe indeterminación de equilibrios si y sólo si $\chi < -1 + (1 - \alpha) \rho$.

Proof. Sea $\chi = -1 + (1 - \alpha) \rho$ la frontera que delimita en el plano (ρ, χ) el cumplimiento de la proposición 1. Sea $\chi = \frac{\delta - (\delta + \beta) \left[\alpha + \phi \frac{\tau}{(1-\tau)} \right]}{\beta + (\delta + \beta) \phi \frac{\tau}{(1-\tau)}} - \frac{\delta(1-\alpha)}{\beta + (\delta + \beta) \phi \frac{\tau}{(1-\tau)}} \rho$ la frontera que delimita en el plano (ρ, χ) el cumplimiento de la proposición 2. Dado que los pares (ρ, χ) que satisfacen que el $\text{Det}(\Gamma) > 0$ están por debajo de la primera de las fronteras que se acaban de definir, y dado que los pares (ρ, χ) que satisfacen la proposición 2 están por encima de la segunda de las fronteras, una condición necesaria y suficiente para que sólo la primera condición restrinja el conjunto de pares (ρ, χ) que satisfacen las proposiciones 1 y 2 es que el punto de corte de ambas fronteras tenga lugar para valores negativos de χ . Es trivial que esto sucede cuando el punto de corte de la primera de las fronteras con el eje de abscisas (ρ^*) está a la derecha del mismo para la segunda de las fronteras (ρ^{**}) :

$$\rho^* = \frac{1}{(1-\alpha)} > \rho^{**} = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[1 - \frac{(\delta + \beta)}{\delta} \left(\alpha + \phi \frac{\tau}{(1-\tau)} \right) \right].$$

■

La proposición 3 muestra que, en esta economía:

i) existe indeterminación de equilibrios para valores de la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal (ρ) mayores que $\frac{1}{(1-\alpha)}$. Es decir, si el valor de α es el que habitualmente calibrado en la literatura RBC (alrededor de 0.35), existe indeterminación de equilibrios para valores de $\rho > 1.54$, acordes con los estudios empíricos existentes sobre la estimación de este parámetro.

ii) Los parámetros de política fiscal no afectan a la condición de indeterminación de equilibrios, a diferencia del trabajo de Schmitt-Grohé y Uribe (1997). Esto significa que el tamaño del sector público no hace mayor o menor la región paramétrica de indeterminación.

Proposition 4 Para la clase de funciones de utilidad objeto de este trabajo, si $U_{ng} = 0$ entonces no existe ninguna región del espacio paramétrico para la cual el equilibrio sea indeterminado.

Proof. Véase apéndice 4. ■

La mayor parte de los trabajos que estudian modelos con indeterminación de equilibrios muestran que ésta está asociada a curvas de demanda de empleo con pendiente positiva,

curvas de oferta de empleo con pendiente negativa o ambas. En nuestro caso, dado que la externalidad tiene su origen por el lado de la oferta, definimos a continuación la curva de oferta de empleo en forma reducida con el fin de estudiar el signo de su pendiente. A partir de la política de gasto: $g = \tau y = \tau A k^\alpha n^{1-\alpha}$, y de la expresión (8), ambas evaluadas en el estado estacionario, se obtiene la curva de oferta de empleo en forma reducida:

$$\omega_{ss} = (1 + \chi) \tau A k_{ss}^\alpha n_{ss}^{1-\alpha+\chi} \left(\phi + \frac{c_{ss}}{\tau A k_{ss}^\alpha n_{ss}^{1-\alpha}} \right)^\rho, \quad (22)$$

siendo la inversa de su pendiente:

$$\frac{d\omega_{ss}}{dn_{ss}^s} = \frac{\omega_{ss}}{n_{ss}} \left[(1 - \alpha + \chi) + \frac{\rho(\alpha - 1)}{1 + \phi \frac{\tau A (k_{ss}/n_{ss})^{(\alpha-1)}}{(c_{ss}/k_{ss})}} \right].$$

Utilizando las expresiones (15) y (16) es fácil probar que la curva de oferta de trabajo en forma reducida tiene pendiente negativa si:

$$\chi < (1 - \alpha) \left[\frac{\rho}{1 + \phi \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right) \left(\frac{\delta+\beta}{\delta(1-\alpha)+\beta} \right)} - 1 \right]. \quad (23)$$

Proposition 5 *Si $U_{cg} > 0$ entonces la indeterminación de equilibrios es compatible con que la pendiente de la curva de oferta de empleo en forma reducida sea positiva.*

Proof. Como es obvio la pendiente de la frontera de indeterminación en el plano (ρ, χ) es menor que la pendiente de la condición (23) expresada con igualdad en el mismo plano. Además, la ordenada (χ) en el origen de la frontera de indeterminación es menor que la ordenada en el origen de (23). Por tanto, la condición (23) expresada con igualdad divide la región de indeterminación en pares (ρ, χ) compatibles con curva de oferta de empleo en forma reducida positiva, negativa y nula. ■

Corollary 6 *Si $\phi = 0$, no existe indeterminación de equilibrios con una curva de oferta de empleo en forma reducida con pendiente positiva. Además, la condición de indeterminación de equilibrios coincide con una condición análoga a la encontrada por Benhabib y Farmer (1994): la pendiente de la curva de oferta de trabajo en forma reducida es mayor en valor absoluto que la curva de demanda de empleo.*

Proof. Es fácil comprobar que si $\phi = 0$, de (23), la condición para que la curva de oferta de empleo en forma reducida tenga pendiente positiva es, $\chi > (1 - \alpha)\rho - (1 - \alpha)$. Esta condición y la condición de indeterminación de equilibrios son incompatibles.

La inversa de la pendiente de la curva de demanda de empleo es:

$$\frac{d\omega_{ss}}{dn_{ss}^d} = -\alpha \frac{\omega_{ss}}{n_{ss}}.$$

Es obvio que la condición Benhabib-Farmer: $\frac{d\omega_{ss}}{dn_{ss}} < \frac{d\omega_{ss}^d}{dn_{ss}^d}$ implica que $\chi < -1 + \rho(1 - \alpha)$, que es la condición de indeterminación de equilibrios. ■

Exigir $U_{cg} > 0$ para tener indeterminación de equilibrios con curva de oferta de empleo en forma reducida con pendiente positiva no es restrictivo desde el punto de vista del signo de la elasticidad de la oferta de empleo respecto del nivel del consumo público. De (22) se obtiene:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,g} &= \frac{dn_{ss}}{dg_{ss}} \frac{g_{ss}}{n_{ss}} = - \left(\frac{\rho\phi}{\chi} \right) \left(\frac{1}{(c_{ss}/g_{ss} + \phi)} \right) + \frac{\rho - 1}{\chi} \\ &= - \left(\frac{\rho\phi}{\chi} \right) \left(\frac{1}{\left(\left(\frac{1-\tau}{\tau} \right) \left(\frac{\delta(1-\alpha)+\beta}{\delta+\beta} \right) + \phi \right)} \right) + \frac{\rho - 1}{\chi},\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha utilizado (17). Es fácil ver que $\varepsilon_{n,g} \gtrless 0$ si $\rho \gtrless 1 + \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right) \left(\frac{\phi(\delta+\beta)}{\delta(1-\alpha)+\beta} \right)$. Anteriormente se probó que existe indeterminación de equilibrios para valores del parámetro $\rho > \frac{1}{1-\alpha}$; por tanto si $\frac{1}{1-\alpha} < 1 + \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right) \left(\frac{\phi(\delta+\beta)}{\delta(1-\alpha)+\beta} \right)$ la condición $\rho = 1 + \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right) \left(\frac{\phi(\delta+\beta)}{\delta(1-\alpha)+\beta} \right)$ que garantiza $\varepsilon_{n,g} = 0$, divide la región de indeterminación en el plano (ρ, χ) en dos subespacios cada uno de los cuales es compatible con elasticidades de la oferta de empleo respecto del consumo público positivas y negativas. El lector puede comprobar que cuanto mayor es τ y ϕ más probable es que $\varepsilon_{n,g} < 0$.

4 Un Ejemplo Numérico

En esta sección se ilustran gráficamente los resultados analíticos obtenidos, identificando las regiones, para una parametrización dada, que especifican determinación e indeterminación de equilibrios (en este último caso, también se identifica la región para la cual los autovalores son reales o complejos).

La figura 1.A contiene las combinaciones formadas por la elasticidad de la oferta de trabajo (χ) y por la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal (ρ) tales que son compatibles con la existencia de indeterminación de equilibrios. Además, de entre todas éstas, se identifican aquéllas en las que la indeterminación existe aunque la curva de oferta conserve su pendiente positiva en el óptimo. Por último, se ofrecen aquellas combinaciones (ρ, χ) en las que la indeterminación está asociada a curvas de oferta de trabajo con pendiente negativa pero superior en valor absoluto a la curva de demanda de trabajo (es decir, que incumplen la condición propuesta por Benhabib-Farmer (1994)). Los valores de los restantes parámetros son: $\beta = \ln(1/1.01)$, $\alpha = 0.35$, $\phi = 0.9$ (pertenece al rango de valores estimados en el trabajo de Ni(1995)), $\tau = 0.2$, $A = 1$, $\delta = 0.0252$. Por tanto, si suponemos una periodicidad trimestral, estos valores son compatibles con una tasa de depreciación anual del 10% y un tipo de interés real de estado estacionario anual del 4%.

Las figuras 1.B y 1.C son réplicas de la figura 1.A para un conjunto distinto de valores paramétricos. En particular, en la figura 1.B, la única diferencia estriba en que se supone

$\phi = 0.6$. En la figura 1.C, sin embargo, se utilizan los valores de la figura 1.A salvo para el tipo impositivo; en este caso, $\tau = 0.4$. Comparando las tres figuras se observa que cuanto mayor es el grado de sustitución del consumo privado por público (ϕ) y cuanto mayor es el tipo impositivo (y/o el peso que el consumo público representa en la producción), existe un conjunto mayor de combinaciones de los parámetros (ρ, χ) compatibles con situaciones en las que la existencia de indeterminación de equilibrios va asociada a que las pendientes de las curvas de oferta y de demanda de trabajo tienen los signos estándar.

La figura 2 muestra, de entre las combinaciones de los parámetros (ρ, χ) para las cuales existe indeterminación de equilibrios, aquellas para las cuales los dos autovalores son reales o, por el contrario, son complejos, implicando un mecanismo endógeno de propagación de los shocks cíclico. La parametrización utilizada es la misma que en la figura 1.A. Se observa que el mayor número de equilibrios sunspots tienen lugar con autovalores reales.

5 Conclusión

En este trabajo, para una clase de funciones de utilidad que se caracteriza principalmente por la no-separabilidad en consumo público y ocio, una función de producción con rendimientos constante a escala, y una política de gasto definida como un porcentaje (fijado exógenamente) del output donde el gasto es financiado con impuestos distorsionantes, encontramos que existe una región no vacía del espacio paramétrico para el cual es posible los equilibrios indeterminados. Además, esta región paramétrica se caracteriza fundamentalmente por tres propiedades:

- i) Es compatible con curvas de oferta y demanda de empleo con las pendientes estándar (si los consumos privados y públicos son sustitutivos),
- ii) la aversión relativa al riesgo debe ser superior a la inversa de la participación de la renta salarial en la renta total, es decir, valores acordes con los estimados en la literatura RBC (en muchos casos, por encima de 1.47).
- iii) El tamaño del sector público medido por la participación del consumo público en la producción total, no afecta a la condición que caracteriza la región de indeterminación. Sin embargo, cuanto mayor es el tamaño del sector público, mayor es el subespacio de la región de indeterminación en el que los equilibrios sunspot ocurren con las pendientes de las curvas de oferta y demanda de empleo estándar.

Apéndice 1

De la expresión (6) y (11) se tiene:

$$\dot{\lambda} = -\lambda [(1 - \tau) \alpha A k^{\alpha-1} [N(\lambda)]^{1-\alpha} - (\delta + \beta)] \quad (24)$$

donde $N(\lambda)$ es la expresión (20).

De (14) se tiene:

$$\dot{k} = (1 - \tau) A k^{\alpha} N(\lambda)^{1-\alpha} - \delta k - [C(\lambda)]. \quad (25)$$

donde $C(\lambda)$ es la expresión (21).

El sistema dinámico formado por (24) y (25) en las variables (λ, k) es aproximado linealmente, alrededor del estado estacionario:

$$\begin{pmatrix} \dot{k}_t \\ \dot{\lambda}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_t - k^* \\ \lambda_t - \lambda^* \end{pmatrix}$$

donde,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= (1 - \tau) A \alpha \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}} \right)^{\alpha-1} - \delta + (1 - \tau)(1 - \alpha) A \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}} \right)^{\alpha} \frac{\partial n}{\partial k} \Big|_{ss} - \frac{\partial c}{\partial k} \Big|_{ss} \quad (26) \\ &= \beta + (1 - \tau)(1 - \alpha) A \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}} \right)^{\alpha} \frac{\partial n}{\partial k} \Big|_{ss} - \frac{\partial c}{\partial k} \Big|_{ss} \end{aligned}$$

utilizando (15);

$$\Gamma_{12} = (1 - \tau)(1 - \alpha) A \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}} \right)^{\alpha} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \Big|_{ss} - \frac{\partial c}{\partial \lambda} \Big|_{ss} \quad (27)$$

$$\Gamma_{21} = -\lambda_{ss}(1 - \tau) \left[\alpha(\alpha - 1) k_{ss}^{\alpha-2} n_{ss}^{1-\alpha} + \alpha(1 - \alpha) k_{ss}^{\alpha-1} n_{ss}^{-\alpha} \frac{\partial n}{\partial k} \Big|_{ss} \right] \quad (28)$$

$$\Gamma_{22} = -\lambda_{ss}(1 - \tau) \alpha(1 - \alpha) k_{ss}^{\alpha-1} n_{ss}^{-\alpha} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \Big|_{ss} \quad (29)$$

donde $\frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{ss}$, $x = n, c$; $z = k, \lambda$, denota dicha derivada evaluada en el estado estacionario.

Utilizando (15) en (26) y operando obtenemos:

$$\Gamma_{11} = \beta + \frac{\delta + \beta}{1 + \chi - \rho(1 - \alpha)} \left[\rho(1 - \alpha) + \phi \left(\frac{\tau}{1 - \tau} \right) (1 + \chi) \right] \quad (30)$$

A partir de las expresiones (20) y (21), se deduce que, (27) es análogo a:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= (1 - \tau)(1 - \alpha) A \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}} \right)^{\alpha} \frac{1}{1 + \chi - \rho(1 - \alpha)} \left(\frac{n_{ss}}{\lambda_{ss}} \right) \quad (31) \\ &\quad - \frac{1}{[1 + \chi - \rho(1 - \alpha)] \lambda_{ss}} \left[c_t \left(1 - \alpha - \frac{1 + \chi}{\rho} \right) - \phi \frac{(1 + \chi)}{\rho} g_{ss} \right] \end{aligned}$$

Multiplicando y dividiendo ambos sumandos de (31) por k_{ss} , utilizando (15), (16) y (17) y sacando factor común a $\frac{1}{1 + \chi - \rho(1 - \alpha)} \left(\frac{k_{ss}}{\lambda_{ss}} \right)$:

$$\Gamma_{12} = \left(\frac{k_{ss}}{\lambda_{ss}} \right) \left[\frac{(\delta + \beta)(1 + \chi) \left(1 + \phi \left(\frac{\tau}{1 - \tau} \right) \right) - \alpha \delta (1 + \chi - \rho(1 - \alpha))}{\alpha \rho (1 + \chi - \rho(1 - \alpha))} \right] \quad (32)$$

Respecto a Γ_{21} , cuando se multiplica y divide (28) por k_{ss} ambos sumandos y se utiliza (20) para obtener $\frac{\partial n}{\partial k}|_{ss}$:

$$\Gamma_{21} = \left(\frac{\lambda_{ss}}{k_{ss}} \right) (1 - \tau) \alpha (1 - \alpha) (k_{ss}/n_{ss})^{\alpha-1} A \left[\frac{1 + \chi - \rho}{1 + \chi - \rho(1 - \alpha)} \right],$$

si utilizamos (15):

$$\Gamma_{21} = \left(\frac{\lambda_{ss}}{k_{ss}} \right) (1 - \alpha) (\delta + \beta) \left[\frac{1 + \chi - \rho}{1 + \chi - \rho(1 - \alpha)} \right]. \quad (33)$$

Por último, a partir de (20) y utilizando (15):

$$\Gamma_{22} = - (1 - \alpha) \frac{(\delta + \beta)}{1 + \chi - \rho(1 - \alpha)}. \quad (34)$$

Apéndice 2

Proof. proposición 1

De (30)-(34),

$$Det(\Gamma) = \frac{-1}{1 + \chi - \rho(1 - \alpha)} \left\{ \begin{array}{l} (1 - \alpha) (\delta + \beta) \left[\beta + \frac{(\delta + \beta)(\rho(1 - \alpha) + \phi(\frac{\tau}{1 - \tau})(1 + \chi))}{1 + \chi - \rho(1 - \alpha)} \right] \\ + \frac{(\delta + \beta)(1 + \chi) [1 + \phi(\frac{\tau}{1 - \tau})] - \alpha \delta [1 + \chi - \rho(1 - \alpha)]}{\alpha \rho} \end{array} \right\}.$$

Operando en esta expresión, obtenemos:

$$Det(\Gamma) = \frac{-(1 - \alpha) (\delta + \beta) (1 + \chi)}{[1 + \chi - \rho(1 - \alpha)] \alpha \rho} \left[\delta (1 - \alpha) + \beta + (\delta + \beta) \phi \left(\frac{\tau}{1 - \tau} \right) \right]. \quad (35)$$

De (35) es fácil demostrar que $Det(\Gamma) > 0$ si y solo si $1 + \chi - \rho(1 - \alpha) < 0$. ■

Apéndice 3

Proof. proposición 2

De (30) y (34):

$$Tr(\Gamma) = \beta + \frac{(\delta + \beta)}{[1 + \chi - \rho(1 - \alpha)]} \left[(1 - \alpha) (\rho - 1) + \frac{\phi \tau (1 + \chi)}{(1 - \tau)} \right]. \quad (36)$$

De (36) es trivial que, si $\rho > 1$, una condición suficiente, aunque no necesaria para que $Tr(\Gamma) < 0$ es que $1 + \chi - \rho(1 - \alpha) < 0$; bajo este supuesto, el segundo sumando de dicha expresión es positivo.

Operando en (36):

$$Tr(\Gamma) = \frac{1}{[1 + \chi - \rho(1 - \alpha)]} \left[\chi \left(\beta + \frac{\phi\tau(\delta + \beta)}{(1 - \tau)} \right) + \delta(1 - \alpha)(\rho - 1) + \alpha\beta + \frac{\phi\tau(\delta + \beta)}{(1 - \tau)} \right]. \quad (37)$$

Si $Det(\Gamma) > 0$, es decir, si $1 + \chi - \rho(1 - \alpha) < 0$, es fácil comprobar que $Tr(\Gamma) < 0$ si el término entre corchetes en (37) es positivo. Esta condición implica:

$$\chi > \frac{\delta - (\delta + \beta) \left(\alpha + \frac{\phi\tau}{(1 - \tau)} \right)}{\beta + \frac{\phi\tau(\delta + \beta)}{(1 - \tau)}} - \frac{\delta(1 - \alpha)}{\beta + \frac{\phi\tau(\delta + \beta)}{(1 - \tau)}} \rho.$$

■

Apéndice 4

Proof. proposición 4.

Para la clase de funciones de utilidad que estamos considerando, el supuesto $U_{ng} = 0$ implica:

$$U(c, g, n) = \frac{(c + \phi g)^{1 - \rho}}{1 - \rho} - n^{1 + \chi}.$$

Para esta función de utilidad, las expresiones (20) y (21) son:

$$n = \left[\frac{(1 - \alpha)(1 - \tau)A}{(1 + \chi)} \lambda k^\alpha \right]^{\frac{1}{(\chi + \alpha)}}, \quad (38)$$

$$c = \lambda^{-1/\rho} - \phi\tau \left[\left(\frac{(1 - \alpha)(1 - \tau)}{1 + \chi} \right) A^{\frac{1 + \chi}{1 - \alpha}} k^{\frac{\alpha(1 + \chi)}{(1 - \alpha)}} \lambda \right]^{\frac{1 - \alpha}{(\chi + \alpha)}}. \quad (39)$$

De (39) es obvio que:

$$\frac{\partial c}{\partial k} = \left(\frac{c - \lambda^{-1/\rho}}{k} \right) \left(\frac{\alpha(1 + \chi)}{\chi + \alpha} \right) < 0, \quad (40)$$

ya que la condición de primer orden del problema de optimización intertemporal para el consumo privado es: $(c + \phi g)^{-\rho} = \lambda$, es decir, $\phi g = \lambda^{-1/\rho} - c > 0$. Por tanto, es fácil demostrar, a partir de (38)-(40) que $Tr(\Gamma) > 0$ para cualquier conjunto de valores paramétricos que cumplen las hipótesis del modelo:

$$\begin{aligned}
Tr(\Gamma) &= \left[\beta + (1 - \tau)(1 - \alpha) A \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}} \right)^\alpha \frac{\partial n}{\partial k} \Big|_{ss} - \frac{\partial c}{\partial k} \Big|_{ss} \right] \\
&\quad + \left[- \left(\frac{\lambda_{ss}}{k_{ss}} \right) (1 - \tau) \alpha (1 - \alpha) \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}} \right)^\alpha \frac{\partial n}{\partial \lambda} \Big|_{ss} \right] \\
&= \beta - \frac{\partial c}{\partial k} \Big|_{ss} + (1 - \tau)(1 - \alpha) A \left(\frac{k_{ss}}{n_{ss}} \right)^\alpha \left[\frac{\partial n}{\partial k} \Big|_{ss} - \alpha \left(\frac{\lambda_{ss}}{k_{ss}} \right) \frac{\partial n}{\partial \lambda} \Big|_{ss} \right].
\end{aligned}$$

Utilizando (38) se comprueba que $\left[\frac{\partial n}{\partial k} \Big|_{ss} - \alpha \left(\frac{\lambda_{ss}}{k_{ss}} \right) \frac{\partial n}{\partial \lambda} \Big|_{ss} \right] = 0$; por tanto,

$$Tr(\Gamma) = \beta - \frac{\partial c}{\partial k} \Big|_{ss} > 0,$$

luego no es posible la indeterminación de equilibrios. ■

Referencias

1. Barinci, J.P. and A. Chéron, Sunspots and the business cycle in a finance constrained economy, *Journal of Economic Theory* **97** (2001), 30-49.
2. Benhabib, J. and R.E.A. Farmer, Indeterminacy and increasing returns, *Journal of Economic Theory* **63** (1994), 19-41.
3. Benhabib, J. and R.E.A. Farmer, Indeterminacy and sector specific externalities, *Journal of Monetary Economics* **37** (1996), 421-443.
4. Benhabib, J. and K. Nishimura, Indeterminacy and sunspots with constant returns, *Journal of Economic Theory* **81** (1998), 58-96.
5. Benhabib, J. and R. Perli, Uniqueness and indeterminacy: transitional dynamics with multiple equilibria”, *Journal of Economic Theory* **63** (1994), 113-142.
6. Benett, R.L. and R.E.A. Farmer, Indeterminacy with non-separable utility, *Journal of Economic Theory* **93** (2000), 118-143.
7. Farmer, R.E.A., Money in a real business cycle model, *Journal of Money Credit and Banking* **29** (1997), 568-611.
8. Farmer, R.E.A. and J.T. Guo, Real business cycles and de animal spirits hypothesis, *Journal of Economic Theory* **63** (1994), 42-73.
9. Guo, J. and K.J. Lansing, Indeterminacy and stabilization policy, *Journal of Economic Theory* **82** (1998), 481-490.
10. Ni, S., An empirical analysis on the substitutability between private consumption and government purchases, *Journal of Monetary Economics* **36** (1995), 593-605.

11. Perli, R., Indeterminacy, home production and the business cycle, *Journal of Monetary Economics* **41** (1998), 105-125.
12. Schmitt-Grohé, S. And M. Uribe, Balanced-budget rules, distortionary taxes, and aggregate inestability, *Journal of Political Economy* **105** (1997), 976-1000.
13. Weder, M., Fickle consumers, durable goods and business cycles, *Journal of Economic Theory* **81** (1998), 37-57.
14. Wen, Y., "Capacity utilization under increasing returns to scale", *Journal of Economic Theory* **81** (1998), 7-36.
15. Xie, D., Divergence in economic performance: transitional dynamics with multiple equilibria, *Journal of Economic Theory* **63** (1994), 97-112.

Indeterminacy Frontier

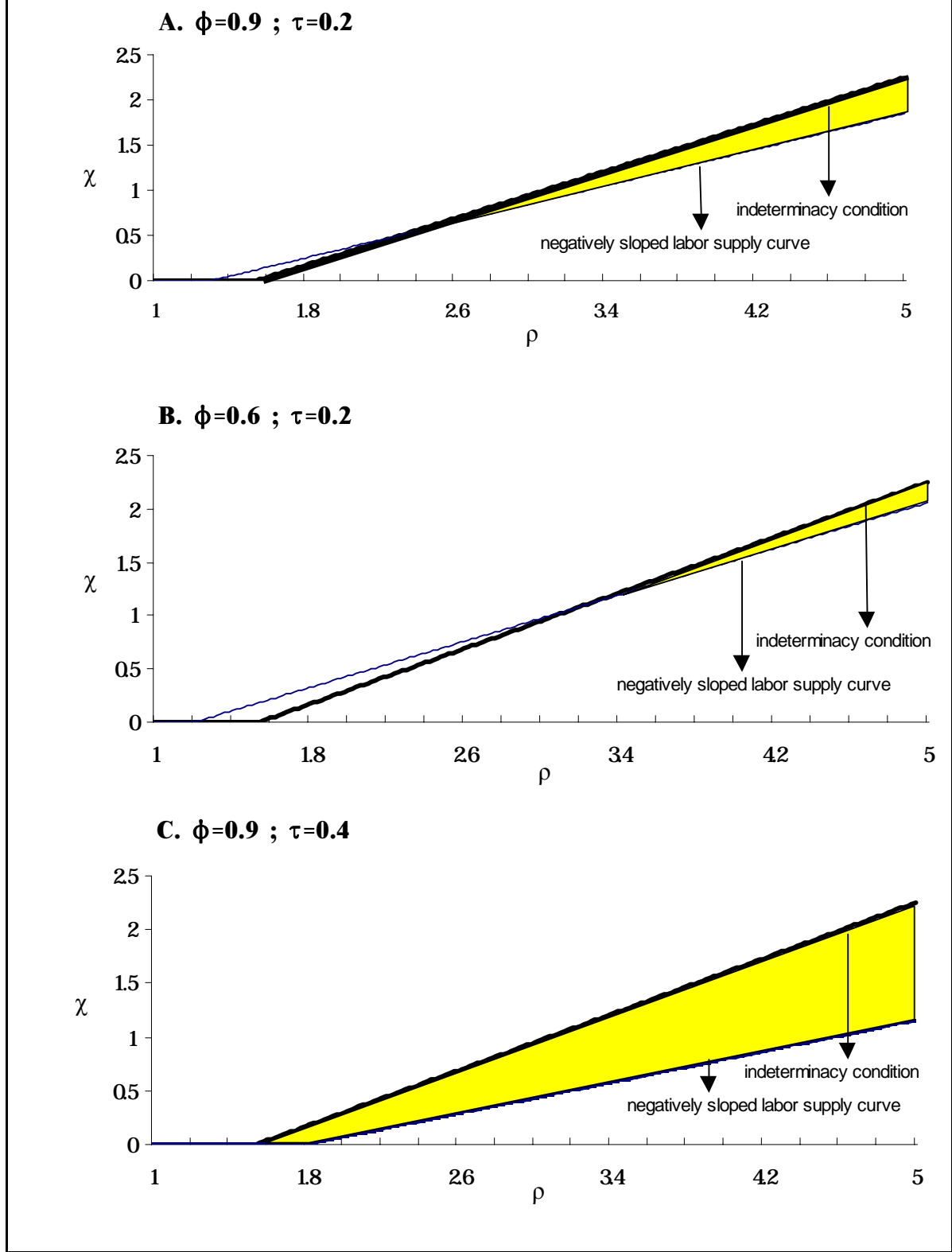


Fig. 1. Parameter regions for indeterminacy of equilibria and for a positively sloped labor supply curve. Points below each line satisfy the associated condition. The shaded region presents the (ρ, χ) -pairs for which equilibrium is indeterminate and the reduced-form labor supply curve obtained holding constant consumption has the standard slope.

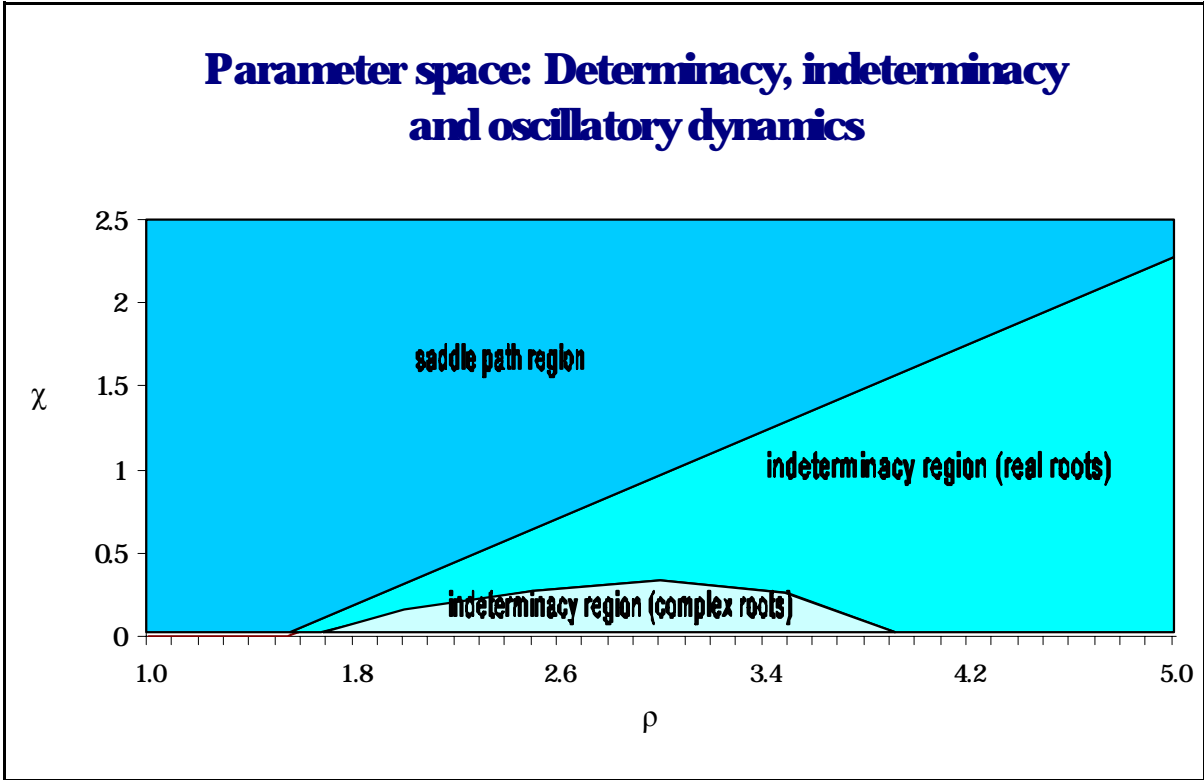


Fig. 2.