

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2016

EL TEOREMA DE JORDAN Y LOS GRAFOS PLANARES

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

JAIME DAN PORRAS RHEE

RESUMEN. En este trabajo estudiamos el *teorema de la curva de Jordan*, con énfasis especial en algunos aspectos relacionados con la Teoría de Grafos, más exactamente con la *planaridad*. Explicamos como los dos famosos ejemplos K_5 y $K_{3,3}$ de no planaridad contienen una parte relevante de la esencia topológica del teorema de Jordan. Además, analizamos cuidadosamente las construcciones a menudo imprecisas escondidas en la demostración del teorema de Kuratowski, proporcionando pruebas rigurosas de algunos hechos que usualmente se dan por inmediatos.

Palabras clave: Teorema de la curva de Jordan, Teorema del punto fijo de Brouwer, grafo planar, grafo completo K_5 , grafo bipartito $K_{3,3}$, Teorema de Kuratowski.

ABSTRACT. In this work we study the *Jordan Curve Theorem*, with special emphasis on some aspects connected with Graph Theory, namely *planarity*. We explain how the famous non-planar graph examples K_5 and $K_{3,3}$ contain a relevant part of the topological essence of the Jordan Theorem. Also, we discuss carefully the usually understated constructions behind the proof of Kuratowski Theorem, providing rigorous proofs for some facts that are usually taken for granted.

Keywords: Jordan Curve Theorem, Brouwer Fixed Point Theorem, planar graph, complete graph K_5 , complete bipartite graph $K_{3,3}$, Kuratowski's Theorem.

ÍNDICE

Introducción	2
1. Preliminares	3
2. Teorema de extensión de Tietze	5
3. El Teorema de la curva de Jordan	7
4. El Teorema de Jordan en la esfera	13
5. Otra propiedad de separación	13

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C10, 57M15, 57N05.

6. Grafos planares	17
7. Manipulaciones con grafos planos	22
8. Contracciones	27
9. Teorema de Kuratowski	31
Referencias	33

INTRODUCCIÓN

En el año 1930, el matemático Kazimierz Kuratowski, topólogo eminente, caracterizó la planaridad de un grafo. Demostró que la obstrucción a la planaridad es que el grafo contenga al grafo completo K_5 o al bipartito completo $K_{3,3}$, en un sentido que definiremos más tarde. Para la demostración del teorema, se utiliza el Teorema de la curva de Jordan y algunos resultados similares que *no son* consecuencia automática suya.

El objetivo de este TFG será estudiar bien el Teorema de Kuratowski, y analizar el papel que el Teorema de la curva de Jordan juega en el mismo. Para ello utilizaremos además del teorema otros resultados con interés propio. Veremos que el Teorema de Kuratowski “contiene” una parte esencial del Teorema de Jordan.

Para ello, comenzaremos estudiando una demostración elemental del Teorema de la curva de Jordan. Elemental en el sentido de que se basa en manipulaciones intuitivamente naturales a partir de ciertas propiedades iniciales de naturaleza topológica. Una de ellas es la *propiedad de cuadrivértice*, que dice que dos caminos que unen sus vértices opuestos se deben encontrar. Esta propiedad se obtiene a partir del Teorema del punto fijo de Brouwer. La otra es el *teorema del arco*, que dice que el complementario de un arco en el plano es conexo, y apela al grupo fundamental de un disco perforado.

Después demostraremos la no planaridad de los grafos $K_{3,3}$ y K_5 , que si bien se ayuda del Teorema de la curva de Jordan, no es consecuencia directa del mismo. Veremos también cómo la no planaridad de cada uno de estos grafos implica (por separado) la propiedad del cuadrivértice, con lo que para esta propiedad el Teorema del punto fijo de Brouwer puede ser reemplazado por la no planaridad de cualquiera de esos dos grafos. Hasta aquí, habremos visto que la obstrucción a la que llegó Kuratowski es una condición necesaria.

En cuanto a la suficiente, es decir, a la minimalidad de K_5 y $K_{3,3}$, utilizaremos los conceptos y operaciones habituales, como las caras de un grafo o las *inversiones* mediante la proyección estereográfica. El concepto de cara de un grafo está muy ligado al Teorema de la curva de Jordan más otras propiedades de separación. Para operaciones como inversiones o pegados de grafos en el plano, haremos hincapié en cómo la Topología las justifica rigurosamente, puesto que no están suficientemente explicadas en la literatura clásica sobre el tema. Aquí se usan siempre grafos planos con aristas poligonales, lo que simplifica la discusión de caras y aristas. Una consecuencia relevante es que si un grafo es planar, lo es por poligonales.

1. PRELIMINARES

En esta sección se incluirán algunas definiciones y resultados de ciertas asignaturas del grado que se emplearán posteriormente (algunas posibles referencias son [6], [8] para la parte topológica; y [1], [9] para la parte de grafos). No demostraremos los resultados sino que tan sólo los enunciaremos. Primero resumimos sucintamente la definición de grupo fundamental de un espacio, y describimos el grupo fundamental de ciertos espacios, para terminar enunciando el Teorema del punto fijo de Brouwer. Después recordamos conceptos generales de la teoría de grafos.

(1.1) Grupo fundamental. En lo que sigue X es un espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Convenimos que un camino es una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$; los puntos $\gamma(0), \gamma(1)$ se llaman *extremos* del camino, y se dice que $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$ están conectados.

(1) Un *arco* es un camino inyectivo, de modo que es un homeomorfismo sobre la imagen. Un *lazo* es un camino en el que los extremos coinciden; el extremo común se llama *base del lazo*.

El *camino inverso* γ^{-1} de un camino γ está definido por

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t).$$

(2) Dos caminos γ_1, γ_2 , con $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, se concatenan vía

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2t - 1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Al camino $\gamma_1 * \gamma_2$ se le llama *producto* de γ_1 y γ_2 .

(3) Esta operación producto se debe considerar *salvo homotopía*. Decimos que dos caminos $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$ son *homótopos con extremos fijos* si existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma \equiv H(0), \tau \equiv H(1)$ y $H(s, 0) = \sigma(0) = \tau(0), H(s, 1) = \sigma(1) = \tau(1)$ para todo $s \in [0, 1]$. La homotopía con extremos fijos es una relación de equivalencia, que denotamos por $\sigma \simeq \tau$. El producto de caminos está bien definido en el conjunto cociente, es decir, si $\sigma_1 \simeq \tau_1$ y $\sigma_2 \simeq \tau_2$, entonces $\sigma_1 * \tau_1 \simeq \sigma_2 * \tau_2$.

(4) Definición del grupo fundamental.

(a) El *grupo fundamental* de un *espacio con punto base*, (X, x_0) , es un grupo cuyo conjunto es el espacio de lazos de X con base en x_0 módulo la homotopía de extremos fijos y cuya operación es el producto de caminos. Se denota $\pi_1(X, x_0)$.

(b) El punto base no influye en la determinación del grupo fundamental, dado que la elección de otro punto base determina un isomorfismo por conjugación.

Por tanto, se llama *grupo fundamental* de un espacio X , denotado por $\pi_1(X)$, al grupo fundamental que resulta de elegir cualquier punto base en X .

(5) El grupo fundamental π_1 define un *functor* entre las categorías TOP_* de los espacios topológicos con punto base y GRP de grupos, del modo siguiente:

$$\left[(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \right] \rightsquigarrow \left[\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \right]$$

donde

$$f_*[\gamma] = [f \circ \gamma].$$

De esta funtorialidad resulta que si f es homeomorfismo, entonces f_* es isomorfismo.

(1.2) Retractos. (1) Se dice que $A \subset X$ es un *retracto* de X si existe una aplicación continua $\rho : X \rightarrow A$ tal que $\rho|_A = Id_A$; esta aplicación se llama *retracción*. El retracto es *de deformación* si además las aplicaciones ρ y Id_X son homótopas relativamente a A . Dos aplicaciones $f, g : X \rightarrow Y$ son *homótopas relativamente a $A \subset X$* si existe una función continua $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ de modo que $H(0, t) = f(t)$, $H(1, t) = g(t)$ para todo $t \in X$ y además para todo $a \in A$ y todo $s \in [0, 1]$ se tiene $H(s, a) = f(a) = g(a)$.

Los retractos son importantes porque el grupo fundamental de un retracto es subgrupo del grupo fundamental del espacio en el que está contenido. Es más, los retractos de deformación tienen el mismo grupo fundamental del espacio que los contiene.

(2) Veremos ahora algunos ejemplos que usaremos en la demostración del teorema de Jordan:

- (a) La circunferencia \mathbb{S}^1 tiene grupo fundamental \mathbb{Z} .
- (b) El disco D^2 tiene grupo fundamental unitario, retractando el disco al centro.
- (c) El disco punzado tiene grupo fundamental \mathbb{Z} , retractando a su frontera \mathbb{S}^1 .

En particular, *la circunferencia no puede ser retracto del disco*. De aquí se deduce por un argumento bien conocido el resultado fundamental para nosotros:

(1.3) Teorema del punto fijo de Brouwer. El teorema del punto fijo de Brouwer dice que si $f : D^2 \rightarrow D^2$ es una función continua, entonces existe un $x \in D^2$ tal que $f(x) = x$.

(1.4) Grafos. (1) Un *grafo* es un par ordenado, $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito de *vértices* (normalmente un subconjunto de \mathbb{N}), y E un conjunto de *aristas*, formado por subconjuntos de dos elementos de V . Si para dos vértices x, y de un grafo existe la arista $e = \{x, y\}$ se dice que dicha arista conecta los vértices x e y . También se dice que x (al igual que y) inciden en e , y que x e y son vecinos. Al número de vértices, $\#V$, se le llama *orden* del grafo, y al número de vecinos de un vértice x se le llama *grado de x* .

Se dice que dos grafos G_1, G_2 son isomorfos si existe una biyección f entre $V(G_1)$ y $V(G_2)$ de manera que $\{x, y\} \in E(G_1)$ si y sólo si $\{f(x), f(y)\} \in E(G_2)$.

Se dice que un grafo G_1 es subgrafo de otro G_2 si $V(G_1) \subseteq V(G_2)$ y $E(G_1) \subseteq E(G_2)$. Diremos entonces que G_2 contiene a G_1 . Sea C un subconjunto de vértices de $V(G_2)$. El *subgrafo inducido por C* es el subgrafo maximal de G_2 que tiene C como conjunto de vértices, o dicho de otro modo, el que tiene por aristas a todas las aristas de G_2 que conecten dos vértices de C .

(2) Se dice que $v_1 \dots v_n$ con $v_i \in V$ para $i = 1, \dots, n$ es un camino en el grafo, si $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, para todo $i = 1, \dots, n - 1$. Al camino se le llama ciclo si además de ser camino se tiene que $v_i \neq v_j$ para todo $1 \leq i, j \leq n - 1$ y $v_n = v_1$.

Un grafo se dice *conexo* si para cualquier par de vértices $x, y \in V$, existe un camino en G que los une. Al igual que con la conexión topológica, a los subgrafos conexos maximales

de un grafo se les llama *componentes conexas* del grafo. A los grafos conexos también se les puede llamar *1-conexos*.

Un grafo es *2-conexo* si tiene más de dos vértices, y no tiene ningún vértice tal que el grafo G^v obtenido quitando el vértice y todas las aristas en las que incide sea no conexo. Es decir, *ningún vértice desconecta al grafo*.

(3) Hay dos tipos de grafos que tienen un interés especial: los *completos* y los *bipartitos completos*.

Un grafo *completo* de orden n es un grafo de n vértices en el que cada par de ellos está conectado por una arista. Dicho de otra forma, el conjunto de aristas está formado por todos los subconjuntos de dos elementos del conjunto de vértices. Se denota como K_n al grafo completo de orden n .

Un grafo *bipartito completo* es aquel en el que existe una partición en dos subconjuntos V_1, V_2 del conjunto de vértices V , de forma que cogiendo cualquier par de vértices que no estén en el mismo subconjunto de la partición, existe en E la arista que los conecta. Se denota como $K_{m,n}$ al grafo bipartito completo en el que $\#V_1 = m$, $\#V_2 = n$.

Más adelante estudiaremos ciertas propiedades de los grafos K_5 y $K_{3,3}$, que son los que nos van a interesar.

2. TEOREMA DE EXTENSIÓN DE TIETZE

En esta sección demostramos el Teorema de extensión de Tietze. Es un resultado muy importante, que dice que una función continua en un cerrado puede extenderse al espacio total si este cumple ciertas condiciones. El teorema es cierto para espacios normales, esto es, espacios en los que cualquier par de cerrados disjuntos tienen entornos disjuntos. Nosotros haremos la prueba para espacios métricos de [4], ya que de este modo la demostración es más sencilla y el caso en el que lo aplicaremos más tarde, \mathbb{R}^2 , es un espacio métrico.

Teorema 2.1 (Tietze). *Sean (X, d) un espacio métrico, A un subconjunto cerrado de X y $f : A \rightarrow [0, 1]$ función continua. Entonces, existe una extensión de f a X , es decir, una función continua $\bar{f} : X \rightarrow [0, 1]$, tal que $\bar{f}|_A = f$.*

Demostración. Definimos en primer lugar la función $h : X \times A \rightarrow \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$h(x, a) = (f(a) + 1)d(x, a).$$

Definimos ahora la extensión \bar{f} como:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{d(x, A)} \inf_{a \in A} h(x, a) - 1 & \text{si } x \in X \setminus A, \\ f(x) & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Como $d(x, a) \leq h(x, a) \leq 2d(x, a)$ tenemos:

$$(1) \quad \frac{1}{d(x, A)} \inf_{a \in A} h(x, a) - 1 \leq 2 \frac{\inf_{a \in A} d(x, a)}{d(x, A)} - 1 \leq 1,$$

$$(2) \quad \frac{1}{d(x, A)} \inf_{a \in A} h(x, a) - 1 \geq 1 \cdot 1 - 1 \geq 0$$

Se concluye que $\bar{f}(x) \in [0, 1]$ para todo $x \in X$.

Ahora veremos que la función \bar{f} es continua. Fijemos $x_0 \in X$. El punto x_0 estará en el interior de A , o bien estará en la frontera $\overline{X \setminus A} \cap A$ de A , o bien en $X \setminus A$ (recuérdese que $A = \overline{A}$).

En el interior de A es continua, ya que coincide con f .

Supongamos $x_0 \in X \setminus A$, que es abierto. Como A es un cerrado, $d(x_0, A) = r > 0$. Sea ahora $\varepsilon > 0$, que sin pérdida de generalidad podemos suponer menor que r , de modo que $B_{x_0}(\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Elijamos un $x \in X$ con $d(x_0, x) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Esta elección hace que $x \in X \setminus A$, y aplicando la desigualdad triangular se tiene que

$$d(x, a) \leq d(x_0, a) + d(x_0, x) < d(x_0, a) + \frac{1}{3}\varepsilon$$

para todo a en A . De esto, y de que $1 \leq f(a) + 1 \leq 2$ para todo $a \in A$ obtenemos que:

$$h(x, a) = (f(a) + 1)d(x, a) < (f(a) + 1)d(x_0, a) + (f(a) + 1)\frac{1}{3}\varepsilon \leq h(x_0, a) + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Si tomamos ínfimos a ambos lados de la desigualdad obtenemos:

$$\inf_{a \in A} h(x, a) \leq \inf_{a \in A} h(x_0, a) + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Ahora, retrocedemos al paso de la desigualdad triangular y repetimos todos los pasos, pero intercambiando los papeles de x_0 y x . De esta manera obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\inf_{a \in A} h(x_0, a) \leq \inf_{a \in A} h(x, a) + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

En suma, para $x \in B_{x_0}(\frac{1}{3}\varepsilon) \subset X \setminus A$,

$$\left| \inf_{a \in A} h(x_0, a) - \inf_{a \in A} h(x, a) \right| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

De esta manera hemos probado que la función $\bar{h}(x) = \inf_{a \in A} h(x, a)$ es continua en x_0 . Como para $x \in X \setminus A$ se tiene $\bar{f}(x) = \bar{h}(x)/d(x, A) - 1$, concluimos que $\bar{f} : X \setminus A \rightarrow [0, 1]$ es continua en x_0 .

Por último, falta ver que \bar{f} es continua en $x_0 \in \overline{X \setminus A} \cap A$. Sea $\varepsilon > 0$; busquemos $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$ entonces $|\bar{f}(x) - \bar{f}(x_0)| < \varepsilon$. Para $x \in A$ este δ existe, por la continuidad de f en A . Así, es suficiente considerar $x \notin A$.

Sea pues $x \in V$, con $V = (X \setminus A) \cap \{x : d(x, x_0) < \frac{\delta}{4}\}$ (donde δ es el que elegimos para la continuidad en A). Entonces, para todo $a \in A \setminus B_{x_0}(\delta)$, $d(x, a) \geq d(x_0, a) - d(x, x_0) \geq \delta - \frac{\delta}{4} = \frac{3}{4}\delta$. De este modo, para todo $a \in A \setminus B_{x_0}(\delta)$ se tiene:

$$h(x, a) \geq (f(a) + 1)\frac{3}{4}\delta \geq \frac{3}{4}\delta$$

Tomando ínfimos se obtiene:

$$\inf_{a \in A \setminus B_{x_0}(\delta)} h(x, a) \geq \frac{3}{4}\delta.$$

Por otro lado,

$$h(x, x_0) = (f(x_0) + 1) \cdot d(x, x_0) < 2 \cdot \frac{\delta}{4} = \frac{1}{2}\delta,$$

lo cual indica que necesariamente el ínfimo de $h(a, x)$ en A debe alcanzarse en $A \cap B_{x_0}(\delta)$. De la desigualdad $d(x, a) \geq \frac{3}{4}\delta$ obtenida para los $a \in A \setminus B_{x_0}(\delta)$, y de que para los $x \in V$

se cumple por definición que $d(x, x_0) < \frac{\delta}{4}$, obtenemos igualmente que $d(x, A)$ se alcanza en un punto de $A \cap B_{x_0}(\delta)$.

Consideramos ahora las siguientes desigualdades, obtenidas gracias a la continuidad de $f : A \rightarrow [0, 1]$ en x_0 :

$$(f(x_0) - \varepsilon + 1) \frac{d(x, a)}{d(x, A)} - 1 < (f(a) + 1) \frac{d(x, a)}{d(x, A)} - 1 < (f(x_0) + \varepsilon + 1) \frac{d(x, a)}{d(x, A)} - 1,$$

con $a \in B_{x_0}(\delta) \cap A$ y $x \in V$. Tomamos ínfimos cuando a recorre $B_{x_0}(\delta) \cap A$ y obtenemos:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \bar{f}(x) \leq f(x_0) + \varepsilon, \text{ esto es, } \left| \bar{f}(x) - f(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Y con esto queda finalizada la prueba. \square

3. EL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

En esta sección se demostrará el Teorema de la curva de Jordan, siguiendo la presentación de [3].

Teorema 3.1 (de Jordan). *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un cerrado homeomorfo a \mathbb{S}^1 . Entonces, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene dos componentes conexas U y V , una acotada y la otra no, y C la frontera de ambas, de modo que: $C = \bar{U} \setminus U = \bar{V} \setminus V$.*

Para probar el teorema demostraremos primero algunos resultados interesantes por sí mismos.

Proposición 3.2. (1) *Sea $J \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto acotado. Entonces, $\mathbb{R}^2 \setminus J$ tiene una única componente conexa no acotada.*

(2) *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto cerrado. Entonces, C contiene las fronteras de las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus C$.*

Demostración. (1) Observamos que al ser J acotado, existe un disco abierto B que lo contiene. Claramente, $\mathbb{R}^2 \setminus B$ es conexo, y además $\mathbb{R}^2 \setminus B \subset \mathbb{R}^2 \setminus J$. Sea U componente conexa no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus J$. Como $U \not\subset B$, $U \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B) \neq \emptyset$, y por ser $\mathbb{R}^2 \setminus B$ conexo y estar contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus J$ debe cumplirse $U \supset \mathbb{R}^2 \setminus B$. Se deduce que U es la única componente conexa no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus J$.

(2) Sea W una componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Queremos ver que $\bar{W} \setminus W \subset C$. Supongamos que hay un punto $p \in \bar{W} \setminus W$, con $p \notin C$. Claramente, p está en la adherencia de W , y por ser C cerrado, existe un entorno abierto conexo U de p tal que $U \cap C = \emptyset$ y $U \cap W \neq \emptyset$. En consecuencia, $U \subset W$, al ser W conexo maximal de $\mathbb{R}^2 \setminus C$, y así $p \in W$. Contradicción. \square

Pasamos ahora a demostrar una proposición que podría considerarse el Teorema de Jordan para arcos.

Proposición 3.3 (propiedad del arco). *Sea $\sigma : [0, 1] \rightarrow J$ homeomorfismo, con $J \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, $\mathbb{R}^2 \setminus J$ es conexo. Es decir, un arco no desconecta el plano.*

Demostración. Como J es compacto, es acotado. Se sigue de 3.2 que $\mathbb{R}^2 \setminus J$ tiene una única componente conexa no acotada.

Supongamos ahora que existe una componente conexa acotada $W \subset \mathbb{R}^2 \setminus J$. Por ser tanto J como W acotados, existe un disco abierto B que los contiene a ambos.

Ahora, tenemos la función $J \xrightarrow{\sigma^{-1}} [0, 1]$, y por el Teorema de extensión de Tietze 2.1, esta σ^{-1} tiene una extensión $f : \overline{B} \rightarrow [0, 1]$. Tomando $x_0 \in W$, definimos:

$$g : \overline{B} \longrightarrow \overline{B} \setminus \{x_0\}; x \mapsto \begin{cases} \sigma \circ f(x) & \text{si } x \in \overline{W} \\ x & \text{si } x \in \overline{B} \setminus W \end{cases}$$

Tanto \overline{W} como $\overline{B} \setminus W$ son cerrados, y recubren \overline{B} . Por tanto, hay que ver que en $\overline{W} \cap (\overline{B} \setminus W) = \overline{W} \setminus W$, las dos opciones de la anterior definición coinciden. Sea $x \in \overline{W} \setminus W$. Como $J \supset \overline{W} \setminus W$ (por 3.2), $f(x) = \sigma^{-1}(x)$, y obtenemos $g(x) = \sigma \circ f(x) = \sigma \circ \sigma^{-1}(x) = x$, que es la segunda opción.

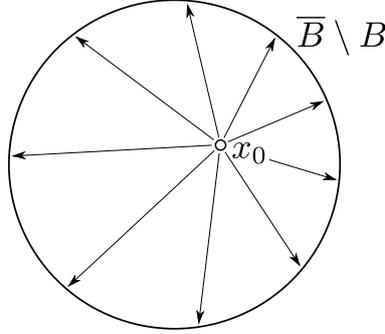


FIGURA 1. Retracto de deformación de $\overline{B} \setminus \{x_0\}$ a $\overline{B} \setminus B$.

Sean ahora $j : \overline{B} \setminus B \rightarrow \overline{B}$ la inclusión de $\overline{B} \setminus B$ en \overline{B} ; y $j' : \overline{B} \setminus B \rightarrow \overline{B} \setminus \{x_0\}$ la inclusión de $\overline{B} \setminus B$ en $\overline{B} \setminus \{x_0\}$. Tenemos que $j' = g|_{\overline{B} \setminus B} = g \circ j$. Recordemos que $x_0 \in W$ y $W \subset B$, y tomemos $x_1 \in \overline{B} \setminus B$. Aplicando functorialidad obtenemos:

$$j'_* : \pi_1(\overline{B} \setminus B, x_1) \xrightarrow{j_*} \pi_1(\overline{B}, x_1) \xrightarrow{g_*} \pi_1(\overline{B} \setminus \{x_0\}, x_1)$$

Veamos que j' es isomorfismo. En primer lugar, $\overline{B} \setminus B$ es retracto de deformación de $\overline{B} \setminus \{x_0\}$ (Figura 1), y por tanto existe $\rho : \overline{B} \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{B} \setminus B$, con $\rho \circ j' = \text{Id}_{\overline{B} \setminus B}$. Aplicando functorialidad queda $\rho_* \circ j'_* = \text{Id}_{\overline{B} \setminus B}$. Tanto ρ_* como $\text{Id}_{\overline{B} \setminus B}$ son isomorfismos, luego j'_* también es isomorfismo. Pero el primero y el tercero de los grupos son \mathbb{Z} , mientras que el de en medio es el grupo unitario, lo cual es absurdo.

La conclusión es que no existe la componente acotada W , dejándonos únicamente con la no acotada, como queríamos. \square

Ahora probaremos otro resultado, ya muy próximo al Teorema de Jordan, que hemos mencionado en la introducción; y sobre el que insistiremos al discutir la no planaridad de los grafos K_5 y $K_{3,3}$ en la sección 6.

Proposición 3.4 (propiedad del cuadrivértice). Sean $f, g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1]$ funciones continuas, tales que $f_1(-1) = -1$, $f_1(1) = 1$, $g_2(-1) = -1$ y $g_2(1) = 1$. Entonces existen $t, s \in [-1, 1]$ tales que $f(s) = g(t)$.

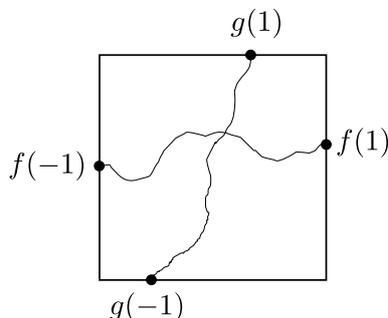


FIGURA 2. Cuadrivértice.

Demostración. Supongamos por el contrario que no existen tales t, s . Entonces definimos la aplicación continua

$$\delta(s, t) = \max \left\{ |f_1(s) - g_1(t)|, |f_2(s) - g_2(t)| \right\}.$$

Se cumple que $\delta(s, t) > 0$ por la suposición sobre s, t . Ahora definimos $h : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]^2$ de la siguiente forma:

$$h(s, t) = (g_1(t) - f_1(s), f_2(s) - g_2(t)) / \delta(s, t).$$

Por los dos valores que puede tomar $\delta(s, t)$, la función h sólo puede valer $(\pm 1, *)$ ó $(* , \pm 1)$, donde el valor $*$ no nos interesa. Además h es continua de un disco cerrado en sí mismo (al ser $[-1, 1]^2$ homeomorfo a un disco cerrado) luego estamos en condiciones de aplicar el Teorema del punto fijo de Brouwer, y llegamos a la conclusión de que existen s, t tales que $h(s, t) = (s, t)$. Por lo observado anteriormente tenemos que $s = \pm 1$ ó $t = \pm 1$. Ahora haremos distinción de casos para llegar al absurdo:

- $s' = +1$. Entonces $0 < g_1(t') - f_1(1) = g_1(t') - 1 \leq 0$, absurdo;
- $s' = -1$. Entonces $0 > g_1(t') - f_1(-1) = g_1(t') + 1 \geq 0$, absurdo;
- $t' = +1$. Entonces $0 < f_2(s') - g_2(1) = f_2(s') - 1 \leq 0$, absurdo;
- $t' = -1$. Entonces $0 > f_2(s') - g_2(-1) = f_2(s') + 1 \geq 0$, absurdo.

En cualquier caso llegamos al absurdo, luego deben existir s, t tales que $f(s) = g(t)$. □

Terminamos la sección con la demostración del Teorema de la curva de Jordan, que descomponemos en cinco pasos sucesivos.

Paso 1. $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene una única componente conexa no acotada, U .

Se sigue inmediatamente de 3.2. □

Paso 2. Sea W una componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Entonces $C = \overline{W} \setminus W$ (frontera de W en \mathbb{R}^2).

Por 3.2 sabemos que $\overline{W} \setminus W \subset C$. Supongamos que existe $c \in C \setminus \overline{W}$. Entonces existe un entorno abierto U de c en \mathbb{R}^2 que no corta a \overline{W} . Se sigue que $U \cap C$ es un abierto de C y contendrá un arco abierto $A \subset C$, de modo que $J = C \setminus A$ es un arco cerrado (por ser C homeomorfo a \mathbb{S}^1), y por 3.3 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ es conexo. Observamos que W es cerrado en $\mathbb{R}^2 \setminus J$, puesto que $\overline{W} \setminus W \subset C \setminus A = J$. Por otra parte, W es abierto en \mathbb{R}^2 , por ser componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus C$, que es también abierto en \mathbb{R}^2 . Resulta que W es abierto y cerrado en el conexo $\mathbb{R}^2 \setminus J$, luego $W = \mathbb{R}^2 \setminus J$. Pero entonces $A \subset W \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$, contradicción. \square

Paso 3. Elección de la que será la componente acotada.

Por ser C compacto, existen $a, b \in C$ tales que

$$d(a, b) = \max \{d(x, y) : x, y \in C\}.$$

Aplicamos una homotecia para que $d(a, b) = 2$, una traslación para que el punto medio entre a y b quede situado en el $(0, 0)$ y un giro para que a y b queden en el eje horizontal. Tras aplicar estos tres homeomorfismos, obtenemos $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$. La curva C queda contenida en $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$. Denotamos $F = \overline{R} \setminus R$. Se tiene que $F \cap C = \{a, b\}$ ya que de haber otro $x \in F \cap C$, $\max\{d(a, x), d(b, x)\} > d(a, b) = 2$, lo cual es imposible por las elecciones de a y b . Sean $c = (0, 2)$, $d = (0, -2) \in R$.

Hacemos ahora $C = C^+ \cup C^-$, donde estos últimos son los arcos de C definidos por a y b . La elección de cuál será C^+ , y por tanto cuál C^- , se hace a continuación.

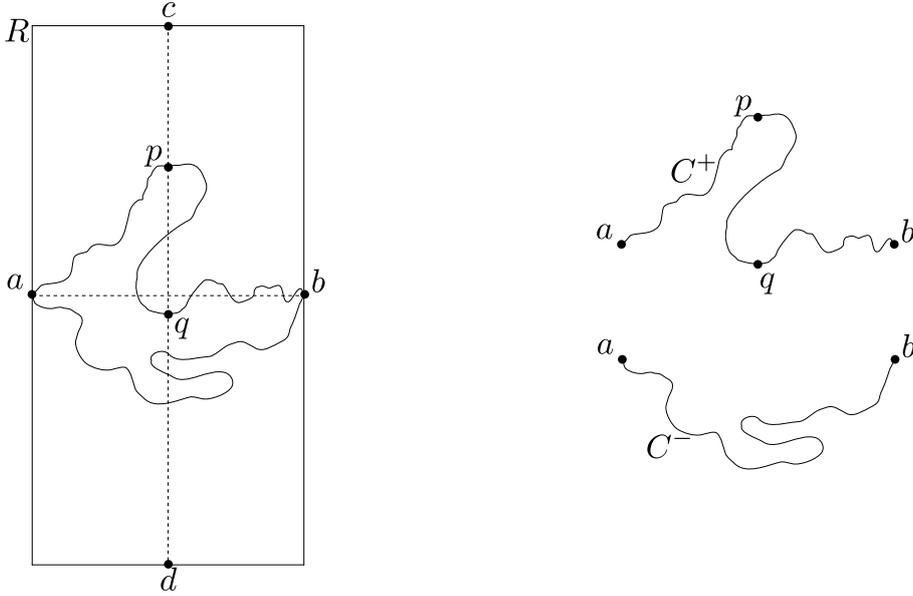


FIGURA 3. La curva C , encajada en R , queda dividida por los puntos a y b en los arcos C^+ y C^- , y el punto p determina el arco C^+ .

Denotaremos por $[x, y]$ el segmento de extremos x e y , por (x, y) al segmento sin sus extremos; y por $[x, y]_\gamma$ al arco entre x e y contenido en la curva γ . Consideramos:

1. $p = (0, p_2) \in R$, con $p_2 = \max \{p_2 : (0, p_2) \in C \cap [c, d]\}$, y elegimos como C^+ el arco que contiene a p .
 $q = (0, q_2) \in R$, con $q_2 = \min \{q_2 : (0, q_2) \in C^+ \cap [c, d]\}$.

2. $\alpha = [c, p] * [p, q]_{C^+} * [q, d]$. Por la Proposición 3.4, $\alpha \cap C^- \neq \emptyset$. Por definición de p y de $[p, q]_{C^+}$, se tiene que $[c, p] \cap C = \emptyset$ y $[p, q]_{C^+} \cap C^- = \emptyset$. Entonces, $[q, d] \cap C^- \neq \emptyset$ y existen m el punto con máxima ordenada en $[q, d] \cap C^-$, y n el punto con mínima ordenada en $[q, d] \cap C^-$.
3. $(q, m) \cap C = \emptyset$, y existe $x_0 \in (q, m) \subset W \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$, donde W es una componente conexa.

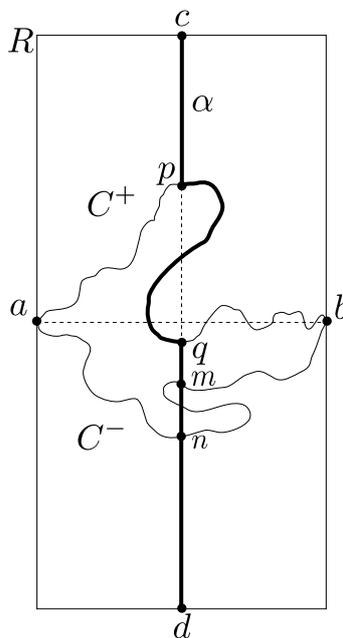


FIGURA 4. Construcción de la curva α , que define los puntos m y n .

Paso 4. $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene al menos una componente conexa acotada.

Ahora vemos que $W \neq U$, donde U es la única componente conexa no acotada que hemos hallado en el Paso 1.

Supongamos en caso contrario que $W = U$. Entonces existe $\sigma \subset W$ un camino de x_0 a un punto exterior a R . Por tanto también ha de existir y_0 , el primer punto de σ en F , e $y_0 \neq a, b$, ya que $\sigma \cap C = \emptyset$. Denotamos por $[a, b]_R$ al camino más corto entre a y b contenido en F .

Si la ordenada de y_0 es menor que 0, entonces construimos el camino

$$([c, p] * [p, q]_{C^+} * [q, x_0] * [x_0, y_0]_{\sigma} * [y_0, d]_R) \cap C^- = \emptyset,$$

lo cual es absurdo ya que contradice el Paso 2.

Si la ordenada de y_0 es mayor que 0, construimos el camino

$$([c, y_0]_{C^+} * [y_0, x_0]_{\sigma^{-1}} * [x_0, d]) \cap C^+ = \emptyset,$$

absurdo también por 3.4.

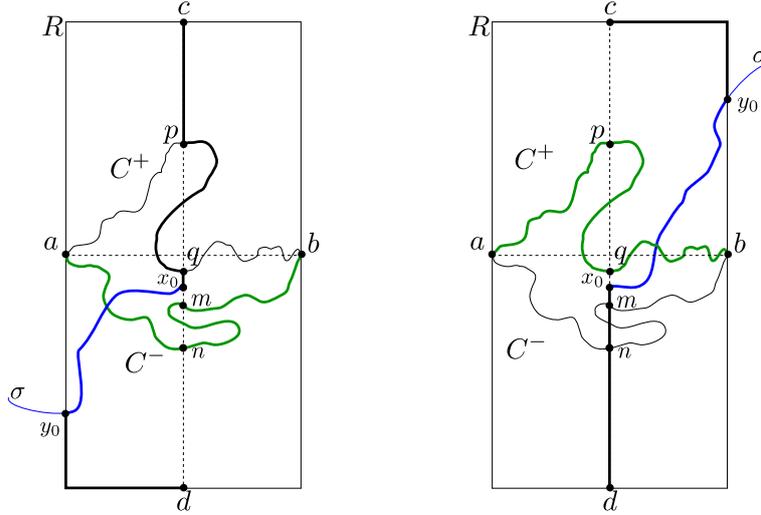


FIGURA 5. Final Paso 4.

Paso 5. W es la única componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

Supongamos que existe otra W' componente conexa acotada, distinta de U y de W . Construimos el camino

$$\gamma = [c, p] * [p, q]_{C^+} * [q, m] * [m, n]_{C^-} * [n, d].$$

El primer factor está contenido en \bar{U} , el segundo en C^+ , el tercero en \bar{W} , el cuarto en C^- y el último en \bar{U} , y ninguno de ellos corta a W' . Por tanto, tenemos que $\gamma \cap W' = \emptyset$. Cogemos ahora a, b , que como sabemos no pertenecen a γ . Existen entornos V^a, V^b tales que $V^a \cap \gamma = \emptyset = V^b \cap \gamma$. A su vez, $a, b \in C = \bar{W}' \setminus W'$ luego existen $x \in V^a \cap W', y \in V^b \cap W'$. Entonces, existe un camino $\tau \subset W'$ de x a y . Resulta que $([a, x] * \tau * [y, b]) \cap \gamma = \emptyset$, ya que $[a, x] \subset V^a$ y $[y, b] \subset V^b$, y esto contradice 3.4.

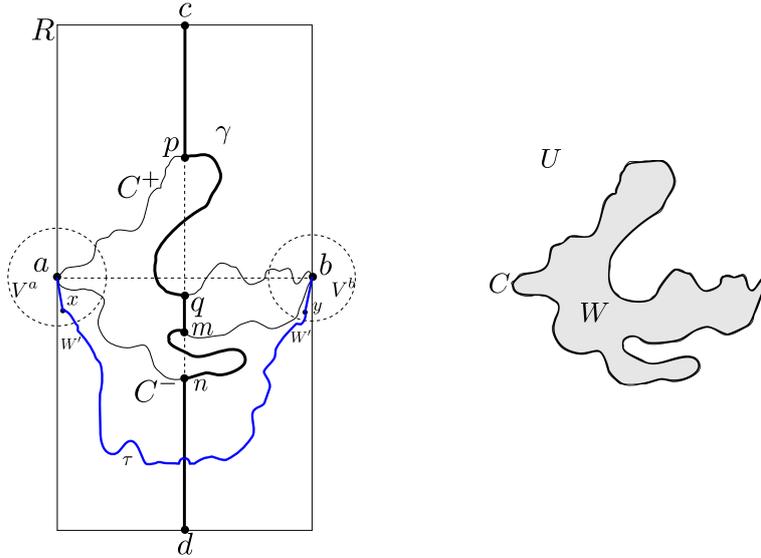


FIGURA 6. Paso 5.

4. EL TEOREMA DE JORDAN EN LA ESFERA

En esta sección demostraremos el Teorema de Jordan para la esfera. El principal protagonista será la proyección estereográfica. Más adelante se verá que la combinación de ambos elementos es una herramienta muy útil para hacer razonamientos sobre ciertos grafos.

Teorema 4.1. *Sea $C \subset \mathbb{S}^2$ un cerrado homeomorfo a \mathbb{S}^1 . Entonces \mathbb{S}^2 tiene dos componentes conexas, de las que C es frontera.*

Demostración. Como C no es homeomorfo a \mathbb{S}^2 , debe existir un punto $a \in \mathbb{S}^2 \setminus C$. Por proyección estereográfica $\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Por tanto podemos aplicar el Teorema de la curva de Jordan 3.1, y nos queda que $\mathbb{S}^2 \setminus C \cup \{a\} = U \cup V$, con U homeomorfo a la región (componente conexa) acotada y V a la no acotada. Como a se corresponde con el punto de infinito, $a \notin \bar{V}$, y $a \in \bar{U}$. Tenemos por tanto que $\mathbb{S}^2 \setminus C = (U \cup \{a\}) \cup V$, con $U \cup \{a\}$ abierto y conexo por ser la adherencia de un conexo. \square

De hecho, es claro ahora que el enunciado para la esfera equivale al enunciado para el plano. Además podemos extraer un corolario interesante y a su vez equivalente a los resultados anteriores.

Corolario 4.2. *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un cerrado homeomorfo a \mathbb{R} . Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene dos componentes conexas no acotadas, con C la frontera de ambas.*

Demostración. Hacemos la compactificación de Alexandroff de \mathbb{R}^2 , que transforma la inclusión $C \subset \mathbb{R}^2$ en $C^* \subset \mathbb{S}^2$. Además $C^* \approx \mathbb{S}^1$. Por tanto podemos aplicar el teorema anterior y nos queda que $\mathbb{S}^2 \setminus C^* = U \sqcup V$, que son abiertos disjuntos a los que el punto de infinito es adherente. Como $\infty \in C^*$, se tiene que $\mathbb{S}^2 \setminus C^* \approx \mathbb{R}^2 \setminus C$, y U, V son no acotados por ser adherentes al punto de infinito. \square

5. OTRA PROPIEDAD DE SEPARACIÓN

Ya sabemos que una curva de Jordan (curva homeomorfa a \mathbb{S}^1) separa el plano en dos regiones. Queremos ver ahora qué pasará si unimos dos puntos de la curva mediante un arco, que solo interseque a la curva en sus extremos. La intuición nos dice que haciendo esto crearemos una nueva región acotada. Y en efecto, así ocurre. Pero llegar a esta conclusión no es un asunto trivial (véase [7]). Recordemos que el teorema de Jordan solamente nos dice que la curva C crea una región acotada y otra no acotada, pero no nos dice cómo son estas regiones. Para saber cómo son, necesitaríamos el teorema de Schönflies (explicado en [5] y [12]), que dice que el homeomorfismo $\mathbb{S}^1 \rightarrow C$ se puede extender a otro $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, y en particular la región acotada es homeomorfa a un disco abierto. Aplicando este teorema, sería más sencillo concluir que añadiendo dicho arco creamos una nueva región acotada (usando el corolario 4.2). En esta sección presentamos una demostración del enunciado expuesto sin recurrir al citado teorema de Schönflies.

Proposición 5.1. *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan, y γ un arco contenido en su interior, salvo sus extremos que están en la propia curva. Sean α y β los arcos en los que separa γ*

a la curva C . Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup \gamma)$ tiene tres componentes conexas, dos de ellas acotadas con fronteras $\alpha \cup \gamma$ y $\gamma \cup \beta$, y una no acotada con frontera C .

En primer lugar observamos que si el arco γ estuviera contenido en el exterior, podemos reducirlo al caso en el que el arco está contenido en el interior, y por tanto la proposición también sería cierta para este caso. Esto puede verse por proyección estereográfica en la esfera. Tenemos la inclusión $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ por la inversa de la proyección estereográfica. Sabemos que hay una región no acotada por 3.2, y el punto de infinito, al que llamaremos a , está en dicha región.

Elegimos como nuevo punto de infinito a cualquier punto b en el interior de la región acotada por C , y proyectamos desde dicho punto. Tras hacer la proyección queda el arco γ contenido en el interior de la región acotada por C . Suponiendo que el teorema es cierto para el caso en el que el arco está en el interior, tendríamos tres regiones y una de ellas no acotada. Tenemos un homeomorfismo con $\mathbb{S}^2 \setminus b$, y por tanto $\mathbb{S}^2 \setminus (C \cup \gamma \cup b) = U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3$. El punto b está en el interior de la adherencia de una de estas tres regiones, pongamos que es U_1 , que es además la que tiene por frontera a C . Tenemos que $\mathbb{S}^2 \setminus (C \cup \gamma) = (U_1 \cup \{b\}) \sqcup U_2 \sqcup U_3$.

Ahora, el punto a debe de estar o en U_2 o en U_3 . Podemos suponer que $a \in U_2$. Proyectamos de nuevo desde el punto a , y nos queda finalmente que $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup \gamma) = (U_1 \cup \{b\}) \sqcup (U_2 \setminus \{a\}) \sqcup U_3$. La región U_2 será la no acotada y tendrá por frontera a $\alpha \cup \gamma$, U_3 será acotada y tendrá por frontera a $\beta \cup \gamma$ y U_1 será acotada y tendrá por frontera C .

Demostración. Llamamos U_2 a la región no acotada que forma la curva C , y U_1 a la región acotada. Sean a, b los extremos del arco γ , que a su vez son puntos de la curva C . Podemos elegir de este modo arcos α y β que son los que unirán a los puntos a y b dentro de la curva C , de modo que $C = \alpha \cup \beta$. Así, hemos creado dos nuevas curvas de Jordan, la formada por $\alpha \cup \gamma$, a la que llamaremos D , y la formada por $\beta \cup \gamma$, a la que llamaremos E . Ahora llamamos V_1 y V_2 al interior y exterior que nos da D , y W_1 y W_2 al interior y exterior que nos da E .

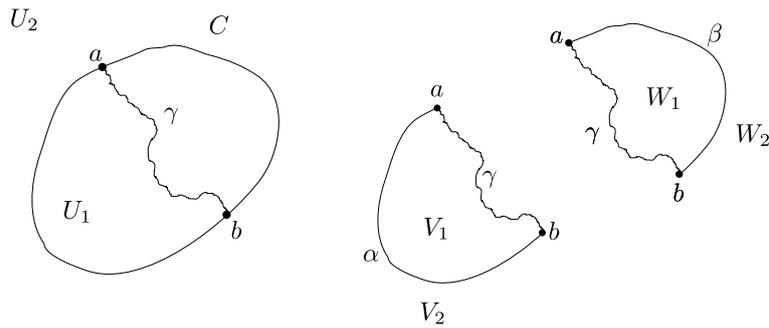


FIGURA 7. Separaciones del plano que generan por separado C , $\alpha \cup \gamma$ y $\gamma \cup \beta$.

(1) Denotaremos por σ° al interior de un arco σ , es decir, el resultado de quitarle a σ sus extremos. Observamos:

- (i) La región U_2 es un conexo no acotado, que además está contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus (\alpha \cup \gamma)$, (al estar γ en la región acotada). Entonces, es claro que $U_2 \subset V_2$, o lo que es igual,

$\mathbb{R}^2 \setminus V_2 \subset \mathbb{R}^2 \setminus U_2$. Y claramente, el complementario de U_2 es $\overline{U}_1 = U_1 \cup \alpha \cup \beta$, mientras que el de V_2 es $V_1 \cup \alpha \cup \gamma$. Se sigue que $V_1 \subset U_1 \cup \beta$.

- (ii) Veremos ahora que V_1 no interseca a β° . Supongamos lo contrario. Entonces, $V_1 \cup \beta^\circ$ es un conexo, que sabemos que está contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha \cup \gamma$. Como V_1 es componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha \cup \gamma$, se sigue que $\beta^\circ \subset V_1$. A esto le unimos que $\beta \subset \overline{U}_2 \subset \overline{V}_2$ y llegamos a la conclusión de que $V_1 \cap \overline{V}_2 \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. Por tanto, necesariamente $V_1 \cap \beta^\circ = \emptyset$. De lo visto en (i) se concluye que $V_1 \subset U_1 \setminus \gamma$.

Por ser V_1 componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha \cup \gamma$ y por cumplirse $U_1 \setminus \gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \alpha \cup \gamma$, se obtiene que V_1 es componente conexa de $U_1 \setminus \gamma$.

(2) De manera análoga se prueba que W_1 es componente conexa de $U_1 \setminus \gamma$, y además se tiene $V_1 \cap W_1 = \emptyset$. En caso contrario, ambos serían iguales por ser componentes conexas, y sus fronteras $\alpha \cup \gamma, \gamma \cup \beta$ serían iguales, y esto es absurdo.

(3) Hemos visto que $U_1 \setminus \gamma$ tiene al menos dos componentes conexas. Queremos ver que no hay más. Por tanto, supongamos que $U_1 \setminus \gamma = V_1 \sqcup W_1 \sqcup \Omega$, donde Ω es la unión de otras posibles componentes conexas, y por tanto es abierto y cerrado en $U_1 \setminus \gamma$. Trataremos de ver que $\Omega = \emptyset$. Nótese que $\Omega = U_1 \cap V_2 \cap W_2$.

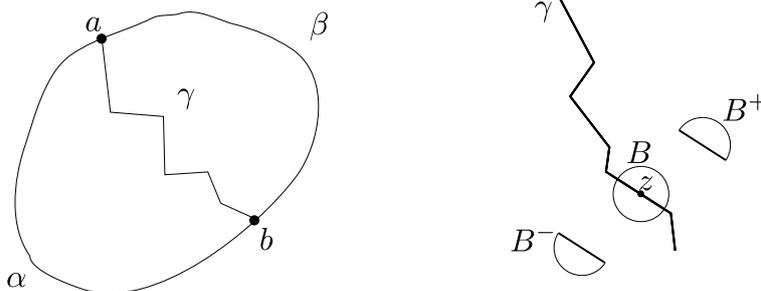


FIGURA 8. La bola B queda dividida en dos componentes.

(4) Probaremos primero el caso particular en el que γ es una *poligonal*. Veamos que $\gamma^\circ \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. En efecto, por ser γ poligonal se tiene que para cualquier $z \in \gamma^\circ$ existe una bola B centrada en z que queda dividida por γ en dos semidisks: $B \setminus \gamma = B^+ \cup B^-$. Como $z \in \gamma$ y $\gamma \subset \overline{V}_1 \cap \overline{W}_1$, se tiene $V_1 \cap B \neq \emptyset$ y $W_1 \cap B \neq \emptyset$. Además, $V_1 \cap B$ y $W_1 \cap B$ son abiertos y cerrados en $B \setminus \gamma$, por lo que deben de ser B^+ y B^- , y así $\Omega \cap B = \emptyset$. En consecuencia Ω , que es abierto y cerrado en $U_1 \setminus \gamma$ y abierto en U_1 , es también cerrado en U_1 , puesto que ningún punto de γ° es adherente a Ω . Pero esto es absurdo, ya que U_1 es conexo, y no puede ser igual a Ω . Luego necesariamente $\Omega = \emptyset$.

(5) Volvemos ahora al caso general. Supongamos que existe $x \in U_1 \cap V_2 \cap W_2$. Sea $y \in U_2$. Por el apartado (1) sabemos que $U_2 \subset V_2 \cap W_2$. Entonces, tanto x como y son elementos de V_2 , conjunto conexo y abierto. Por tanto existe una poligonal $P \subset V_2$ que conecta a x con y . Sea p el primer elemento de P (desde el punto x) que se encuentra también en $\alpha \cup \beta$. Debe existir, ya que $x \in U_1$ e $y \in U_2$. Entonces el trozo $[x, p]_P$ de la poligonal P es un arco.

Repetimos ahora el mismo argumento usando que $x, y \in W_2$: existe una poligonal $Q \subset W_2$ que los conecta, y elegimos el primer $q \in Q \cap (\alpha \cup \beta)$ (recorriendo la poligonal desde x). Obtenemos de este modo que $[x, q]_Q$ es un arco. Ahora definimos $\delta = [p, x]_P \cup [x, q]_Q$. Veamos que δ es un arco.

En primer lugar, $p \neq q$, ya que de ser iguales, por estar tanto en P como en Q estarían a su vez en $V_2 \cap W_2$. Entonces, al estar en V_2 no estarían en su complementario, \bar{V}_1 . Como $\alpha \subset \bar{V}_1$, tampoco estaría en α . A su vez, al estar en W_2 no estarían en su complementario, \bar{W}_1 . Y este último contiene a β . Llegaríamos a que $p \notin \alpha$, $p \notin \beta$, lo cual es absurdo por

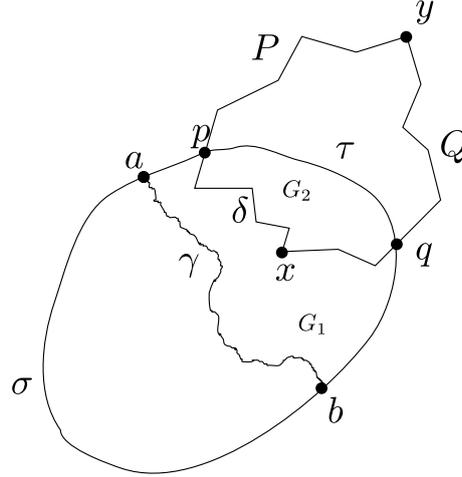


FIGURA 9. Explicación paso (5).

cómo hemos definido a p y q .

En segundo lugar, si δ no es un arco es que los arcos $[p, x]_P$ y $[x, q]_Q$ intersecan en un punto distinto de x . Entonces se podría evitar esta situación sustituyendo x por el primer $x' \in [p, x]_P$ que pertenece a $[x, q]_Q$. De este modo tendríamos un nuevo $\delta' = [p, x']_P \cup [x', q]_Q$ sin autointersecciones. Nótese que el nuevo x' sigue estando en Ω .

Ya tenemos que δ es un arco poligonal, que une dos puntos distintos de $\alpha \cup \beta$. Podemos aplicar el caso particular (4) y obtenemos que el interior de $\alpha \cup \beta$ se descompone en dos componentes conexas, G_1 y G_2 , que son respectivamente las componentes acotadas de $\mathbb{R}^2 \setminus \sigma \cup \delta$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \tau \cup \delta$. Los arcos σ y τ son los dos arcos en $\alpha \cup \beta$ que unen p y q .

(6) Observamos que $\gamma \cap \delta = \emptyset$, ya que $\delta \subset V_2 \cup W_2$ y γ está en el complementario de este conjunto. Por tanto γ° es un conexo en $U_1 \setminus \delta$, y estará contenido en G_1 o bien en G_2 . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\gamma \subset G_1$. Observamos que $a \neq p, q$, ya que $p \in V_2$ y $q \in W_2$, y γ no corta a ninguno de los dos conjuntos. Del mismo modo, obtenemos que $b \neq p, q$.

(7) Tomemos el x que obtuvimos en el apartado (5), que nos daba el arco δ . Como $\delta \subset \bar{G}_2$, tenemos que $x \in \Omega \cap \bar{G}_2$. Entonces $\Omega \cap G_2 \neq \emptyset$, ya que Ω es abierto y por tanto existe un entorno U de x contenido en Ω , y al ser x adherente a G_2 , la intersección de U con G_2 es no vacía. El conjunto $\Omega \cap G_2$ es abierto y cerrado en $G_2 \subset U_1 \setminus \gamma$, ya que Ω es abierto y cerrado en $U_1 \setminus \gamma$. Como G_2 es conexo, concluimos $G_2 = \Omega \cap G_2 \subset \Omega$.

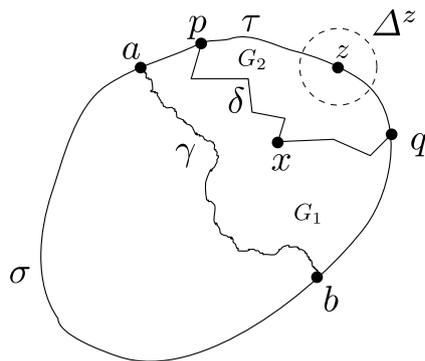


FIGURA 10. Explicación paso (7).

Sea ahora un $z \in \tau^\circ$ (recordemos que $\tau \subset \overline{G_2}$). Entonces es claro que $z \notin \overline{G_1}$ (ya que tan sólo $p, q \in \tau$ cumplen esto), y podemos tomar un disco Δ^z centrado en z cuya intersección con G_1 sea vacía. Así, $\Delta^z \cap U_1 = \Delta^z \cap G_2 \subset \Delta^z \cap \Omega \subset \Omega$. Ahora como $V_1 \cup W_1 \subset U_1$ y $V_1 \cap \Omega = W_1 \cap \Omega = \emptyset$, se tiene que $\Delta^z \cap V_1 = \emptyset$ y $\Delta^z \cap W_1 = \emptyset$, con lo que $z \notin \overline{V_1}$ y $z \notin \overline{W_1}$. Pero $\alpha \subset \overline{V_1}$ y $\beta \subset \overline{W_1}$, por lo que $z \notin \alpha \cup \beta$. Esto es absurdo, ya que hemos elegido $z \in \tau^\circ$, que como sabemos está contenido en $\alpha \cup \beta$. \square

6. GRAFOS PLANARES

En esta sección introducimos los *grafos planares*, nexos que une la parte topológica con la parte de teoría de grafos en este trabajo. Sólo mencionaremos los elementos que nos interesen para utilizarlos posteriormente. Para completar la información sobre grafos planares, puede consultarse [2] o también [1], y para hacerlo más divertido, puede jugarse en [11].

Cuando representamos un grafo, solemos representar los vértices como puntos en el plano y las aristas como caminos que unen vértices. Por comodidad llamaremos a los puntos vértices, y a los caminos aristas. No importa cómo estén situados los vértices, y qué forma tengan las aristas, ya que en un grafo lo importante es ver cómo están conectados los vértices. Pero para grafos complejos, esta representación puede volverse bastante confusa, ya que es posible que haya intersecciones entre distintas aristas. Es natural preguntarse si existirá una representación del grafo en la que las aristas no se intersequen, salvo para aquellos vértices que compartan. Esto tiene una terminología precisa.

Definición 6.1. Un *embebimiento* de un grafo G en un espacio topológico X es una representación del grafo G en X de modo que:

- (i) Cada vértice $x \in V(G)$ se representa como un punto (distinto) $\iota(x) \in X$.
- (ii) Cada arista $\{x, y\} \in E(G)$ se representa como un arco continuo en X de extremos $\iota(x)$ e $\iota(y)$.
- (iii) Si dos arcos se intersecan, lo harán en a lo sumo un extremo, que necesariamente será representación de un vértice que ambas aristas comparten.

- (iv) El arco de una arista no contiene puntos que representen vértices que no son de la arista.

Más adelante veremos que todos los grafos tienen un embebimiento en \mathbb{R}^n . Esto nos permite trabajar con la topología heredada de la usual, lo cual es útil porque nos permite establecer la equivalencia entre la conexión de un grafo y la conexión de su embebimiento. La definición de embebimiento nos permite hablar de homeomorfismo de grafos.

Definición 6.2. Dos grafos son *homeomorfos* si tienen embebimientos homeomorfos.

Insistimos en que el homeomorfismo es entre los embebimientos, y no tiene por qué extenderse a todo el plano, como puede verse en la Figura 11.

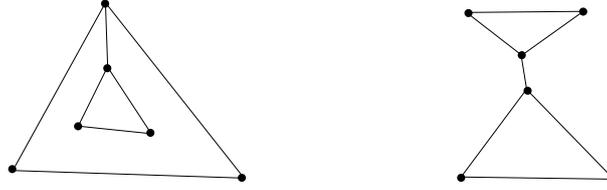


FIGURA 11. Ambos grafos son homeomorfos, pero el homeomorfismo no se extiende al plano.

El concepto de homeomorfismo de grafos está muy ligado al de *subdivisión*.

Definición 6.3. Un grafo G' es *subdivisión* de otro G si se ha obtenido subdividiendo sucesivamente las aristas de G . La *subdivisión* de una arista $\{x, y\}$ consiste en escoger un vértice $z \notin V(G)$, y sustituir la arista $\{x, y\}$ por las aristas $\{x, z\}$ y $\{z, y\}$.

Si un grafo es subdivisión de otro, entonces ambos son homeomorfos. En cambio, si dos grafos son homeomorfos, no tiene por qué ser uno subdivisión del otro. Lo que es claro es que si esto ocurre, entonces ambos tienen una subdivisión común.

Es trivial ver que un grafo de orden n tiene un embebimiento en \mathbb{R}^{n-1} : todo grafo de orden n es subgrafo de K_n , y este último puede representarse como un $(n-1)$ -símplice: las 0-caras del símplice son los vértices del grafo, y las 1-caras son las aristas. Esto se puede mejorar, viendo que cualquier grafo tiene una inmersión en \mathbb{R}^3 :

Tomamos una recta cualquiera en \mathbb{R}^3 , y situamos en ella los vértices. Esta recta es la base de un haz de planos. Ahora, para cada arista del grafo elegimos un plano distinto del haz. De este modo, podemos conectar los dos vértices de la arista mediante un arco contenido en el plano elegido, de manera que sólo toque a la recta en los dos vértices. Como para cada arista hemos elegido un plano distinto, se cumplen las condiciones para ser una inmersión. Nótese que además podemos elegir como aristas poligonales de dos segmentos.

Cabe preguntarse si es posible mejorar esto, es decir, si cualquier grafo tiene un embebimiento en \mathbb{R}^2 . Veremos que esto no es así. Pero antes, algunas definiciones.

Definición 6.4. Un *grafo planar* es un grafo que tiene un embebimiento en \mathbb{R}^2 , que se llama representación planar del grafo en cuestión. Un embebimiento en \mathbb{R}^2 se suele denominar por abuso *grafo plano*.

Como hemos dicho, no todos los grafos son planares. La no planaridad de ciertos grafos se puede demostrar con ayuda de los teoremas sobre separación del plano por curvas y arcos. Veamos ahora algunos ejemplos fundamentales.

Proposición 6.5. *El grafo $K_{3,3}$ no es planar.*

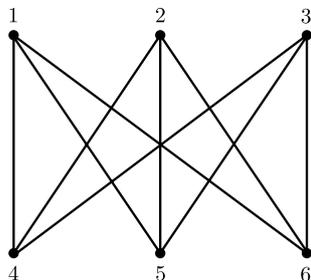


FIGURA 12. Representación del grafo $K_{3,3}$.

Demostración. Tenemos el grafo $K_{3,3}$, y supongamos que la partición de los vértices es $V_1 = \{1, 2, 3\}$ y $V_2 = \{4, 5, 6\}$. Supongamos que tenemos un embebimiento de $K_{3,3}$ en \mathbb{R}^2 . Vemos que el camino 1524 forma un ciclo. Esto en el plano será una curva de Jordan. Por 3.1, tendremos una región acotada U_1 y otra no acotada U_2 . Utilizando dos proyecciones estereográficas (si es necesario), podemos decir que el vértice 3 está en la región acotada U_1 . En efecto, si 3 está en la región no acotada, considerando que $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{S}^2$ ponemos el punto de infinito en la región acotada, y conseguimos así que U_1 pase a ser la no acotada y viceversa.

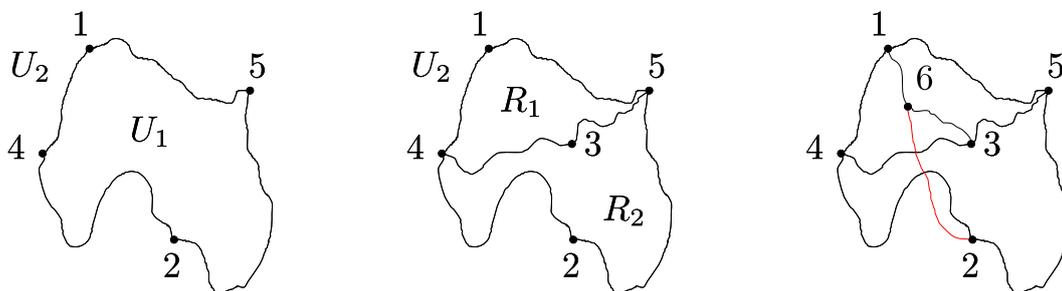
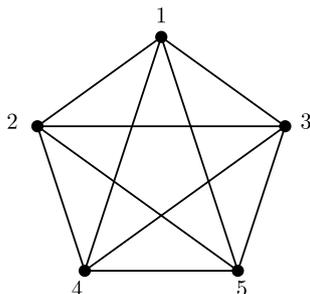


FIGURA 13. Pasos para la no planaridad de $K_{3,3}$.

El vértice 3 estará unido a los vértices 4 y 5, y por tanto el camino 435 será un arco contenido en U_1 salvo sus extremos. Estamos en condiciones de aplicar 5.1 y por tanto quedan ahora dos regiones acotadas: R_1 (delimitada por 1534) y R_2 (delimitada por 5243); y una no acotada, U_2 (delimitada por 1542). El vértice 6 tendrá que estar en alguna de esas tres regiones. Los casos R_1 y R_2 son simétricos, y el caso U_2 se puede reducir a uno de los anteriores mediante el argumento anterior de proyecciones estereográficas. Por tanto, sin pérdida de generalidad suponemos que $6 \in R_1$. Ahora tomamos el camino del embebimiento que une 6 con 2. Por ser embebimiento, sabemos que este camino es un arco que no interseca al resto del grafo plano salvo en los puntos 6 y 2. Pero esto es imposible, ya que $6 \in R_1$ y $2 \notin \overline{R_1}$, y el arco que une 6 con 2 tendría que atravesar la frontera de R_1 .

□

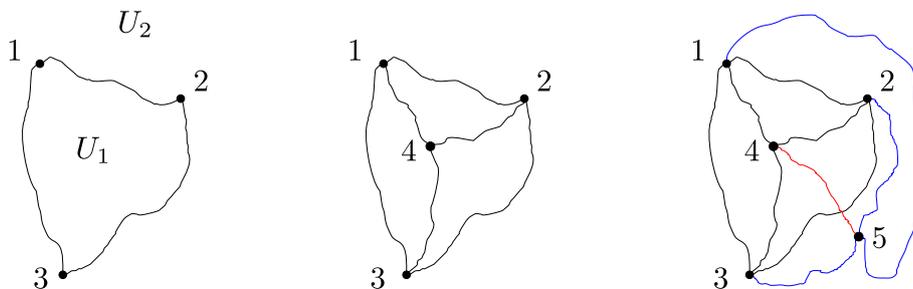
FIGURA 14. Representación del grafo K_5 .

Proposición 6.6. *El grafo K_5 no es planar.*

Demostración. La estrategia es similar a la de la demostración anterior. Claramente 123 forma un ciclo, y por tanto en el embebimiento esto forma una curva de Jordan. Llamamos U_1 a la región acotada, y U_2 a la no acotada. Argumentando del mismo modo que en el ejemplo anterior con proyecciones estereográficas podemos decir que $4 \in U_1$. El punto 4 está unido con 1, 2 y 3.

Ahora, el arco formado por 142 desconecta el interior de 123. En otras palabras: el arco 12 desconecta el exterior de 1423, y los vértices 4 y 3 están en las adherencias de distintas componentes de ese exterior, y no están en la intersección de estas adherencias. El arco formado por 43 es conexo, y no puede estar en el exterior por lo dicho antes, luego está en el interior de 1423, y forma así dos regiones en este interior. Tenemos por tanto tres regiones acotadas contenidas en U_1 , y la no acotada U_2 .

El vértice 5 tiene que estar en alguna de las cuatro regiones. Los tres casos de la región

FIGURA 15. Pasos para la no planaridad de K_5 .

acotada son análogos por simetría. Si el vértice 5 está en una de las tres regiones acotadas, observamos que hay tres vértices en la frontera de la región y un cuarto en el exterior de la región. Por tanto es imposible que se conecte con el vértice del exterior sin cruzar la frontera.

Si el vértice 5 está en la región no acotada, estará unido con los vértices 1, 2 y 3, ya que éstos están en la frontera de la región no acotada. Pero es imposible unir 5 con 4 sin intersecar con otra arista, ya que éste último está en la región acotada. Por tanto K_5 no es planar. \square

(6.7) No planaridad de $K_{3,3}$ y de K_5 y Teorema de Jordan. Completamos los dos resultados anteriores justificando con rigor una afirmación topológicamente relevante: La propiedad 3.4 del cuadrivértice es equivalente a las proposiciones de no planaridad de K_5 y $K_{3,3}$. Como probamos 3.4 utilizando el Teorema del punto fijo de Brouwer, resulta que estas proposiciones pueden reemplazarlo.

Proposición 6.8. $K_{3,3}$ no planar (respectivamente K_5 no planar) implica 3.4.

Demostración. Comenzaremos utilizando $K_{3,3}$ para obtener el resultado. Tanto f como g son curvas que están contenidas en $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Renombramos $v_1 = g(1)$, $v_2 = g(-1)$, $v_3 = f(-1)$ y $v_4 = f(1)$. Tomamos $v_5 = [1, -1]$ y $v_6 = [-1, 1]$. Supongamos que f y g no se intersecan. Como muestra la figura 16, podemos unir con arcos los pares de vértices (v_1, v_4) , (v_4, v_5) , (v_5, v_2) , (v_2, v_3) , (v_3, v_6) , (v_6, v_1) y (v_5, v_6) , sin que intersequen entre ellos (solamente en los vértices que comparten), y que intersecan con $[-1, 1] \times [-1, 1]$ tan sólo en los propios vértices. Entonces hemos conseguido una representación planar de $K_{3,3}$, donde la bipartición sería $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ y $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$. Esto es absurdo, por ser $K_{3,3}$ no planar.

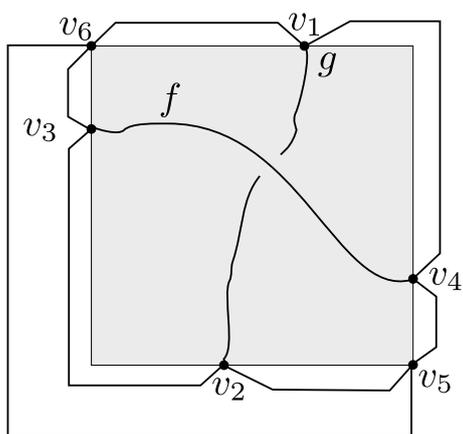


FIGURA 16. $K_{3,3}$ no planar implica cuadrivértice.

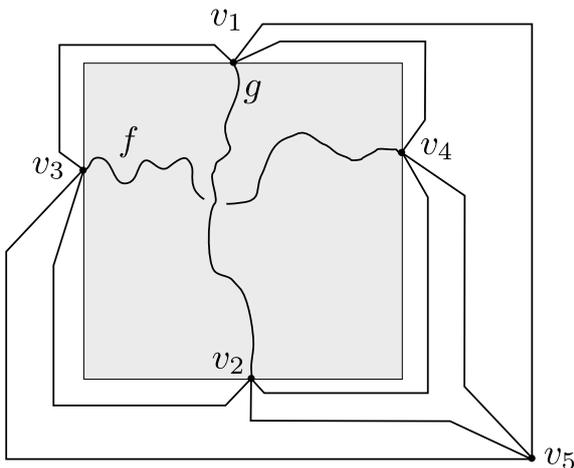


FIGURA 17. K_5 no planar implica cuadrivértice.

Probaremos ahora 3.4 utilizando la no planaridad de K_5 . Renombramos los vértices al igual que hicimos en el caso anterior, y suponemos que las curvas f y g no se intersecan. Añadimos un punto v_5 exterior a $[-1, 1] \times [-1, 1]$. La figura 17 muestra que podemos unir cada par de vértices que aún no estén unidos mediante caminos que no se intersequen. Entonces habríamos conseguido una representación planar para K_5 , lo cual es absurdo. □

(6.9) No planaridad del grafo de Petersen. Hemos visto que la estrategia para probar la no planaridad de $K_{3,3}$ y de K_5 es similar en ambos casos. Haremos ahora una observación. Si un grafo contiene a $K_{3,3}$ o a K_5 , entonces no es planar. Es más, si un grafo contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5 entonces tampoco es planar. Esto no es más que la condición de suficiencia del Teorema de Kuratowski, que ahora es fácil porque

hemos desarrollado bien las propiedades topológicas necesarias. Veremos ahora que *el grafo de Petersen* (Figura 18(a)), un importante ejemplo en teoría de grafos, no es planar, encontrando en él una subdivisión de $K_{3,3}$.

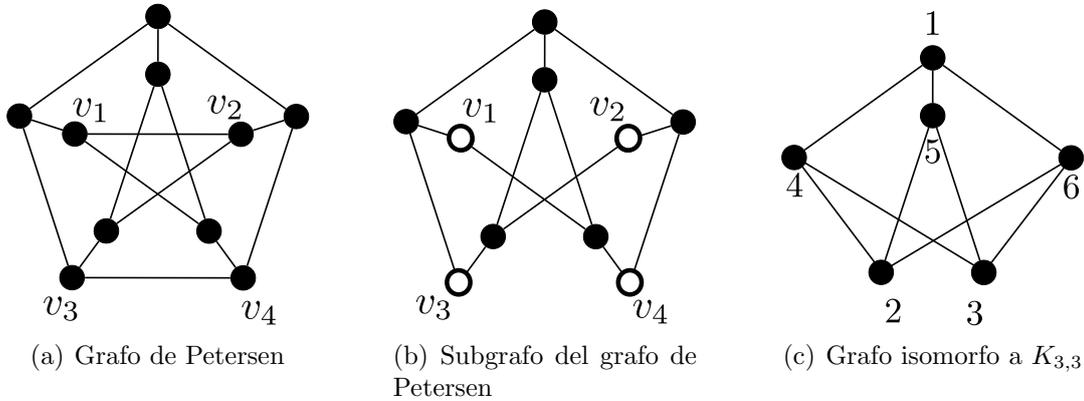


FIGURA 18. Petersen contiene un subgrafo que es subdivisión de $K_{3,3}$.

Proposición 6.10. *El grafo de Petersen no es planar.*

Demostración. En el grafo de Petersen nombramos los vértices v_1, \dots, v_4 como en la figura 18(a). Tomamos el subgrafo que resulta de eliminar las aristas $\{v_1, v_2\}$ y $\{v_3, v_4\}$, mostrado en 18(b). Este subgrafo ya es subdivisión de $K_{3,3}$. En efecto, el vértice v_i tiene grado 2 y por tanto pertenece a dos aristas, $\{x_i, v_i\}$ y $\{v_i, y_i\}$, para $i = 1, \dots, 4$. Basta con sustituir las aristas $\{x_i, v_i\}$ y $\{v_i, y_i\}$ por la arista $\{x_i, y_i\}$, como se puede observar en 18(c), para obtener $K_{3,3}$. \square

Este mismo hecho no se puede probar tratando de encontrar una subdivisión de K_5 en Petersen por lo siguiente. Todos los vértices del grafo de Petersen tienen grado 3, y eliminando aristas o vértices y subdividiendo aristas no conseguiremos que aumente el grado de ningún vértice. Sin embargo, el grafo K_5 tiene todas las aristas de grado 4, y por tanto es imposible encontrar dicha subdivisión.

Por supuesto, podríamos ver que el grafo de Petersen no es planar directamente usando los teoremas de separación del plano, como hicimos para K_5 y $K_{3,3}$.

7. MANIPULACIONES CON GRAFOS PLANOS

En esta sección justificaremos rigurosamente ciertas manipulaciones con grafos que se realizarán en la demostración del Teorema de Kuratowski. Trabajaremos con grafos planos de aristas poligonales. Esto no supone ningún perjuicio, pues todo grafo planar tiene un embebimiento plano poligonal (véase [5]). Pero aquí no utilizamos este hecho, sino que será parte del mismo teorema de Kuratowski. La demostración directa de la existencia de un embebimiento plano poligonal es, aunque elemental, incómoda de formalizar rigurosamente.

(7.1) Caras de un grafo plano. (1) Un grafo plano G es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 , y por tanto es acotado y cerrado. Se llama *caras* del grafo a las regiones en las

que queda dividido el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus G$. Si aplicamos 3.2, deducimos que el grafo G tiene exactamente una cara no acotada. A esta cara se le llama *cara exterior de G* , y al resto de caras se les llama *caras interiores*. Aplicando el segundo enunciado de 3.2 deducimos que la frontera de cada cara está contenida en G . La frontera de la cara exterior se llama *frontera exterior de G* .

(2) A menudo es conveniente poder elegir qué cara nos interesa como exterior, o poder suponer que cierto vértice o cierta arista estén en la frontera exterior. Esto se hace del modo siguiente.

Primero escogemos la cara R del grafo que queremos exterior (por ejemplo, porque su frontera contenga un vértice a que nos interese). Realizamos la inmersión estereográfica $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$. Elegimos ahora como punto de proyección un punto del interior de R . Realizamos la proyección estereográfica desde el punto elegido, y así R es la cara exterior del grafo.

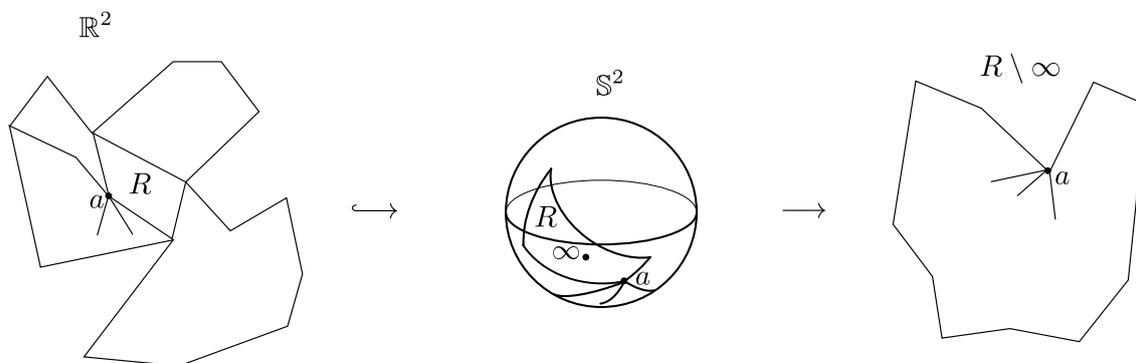


FIGURA 19. Mediante dos proyecciones estereográficas R es la cara exterior del grafo.

Si el grafo de partida tiene aristas poligonales este proceso las convierte en el peor de los casos en concatenación de arcos de elipse que siempre podemos aproximar con aristas poligonales.

Así se obtiene un grafo homeomorfo al de partida, y una biyección entre las caras del grafo inicial y del final, pues los puntos no desconectan los abiertos del plano o de la esfera. Denominaremos este proceso *elección adecuada del punto de infinito*. \square

Veremos ahora otras propiedades sobre las fronteras de las caras de G .

Proposición 7.2. *Sea G un grafo plano con aristas poligonales y e una arista de G . Recordemos que e° denota el arco e sin sus extremos.*

- (i) *Si C es la frontera de una cara de G , entonces o bien $e \subset C$ o bien $e^\circ \cap C = \emptyset$.*
- (ii) *Si e pertenece a algún ciclo del grafo G , entonces e está contenida en la frontera de dos caras distintas de G , que a su vez están contenidas en dos caras distintas del ciclo.*
- (iii) *Si e no pertenece a ningún ciclo, e está en la frontera de una sola cara de G .*

Demostración. En primer lugar observamos que por ser e° poligonal, localmente descompone el plano en dos componentes conexas, luego por un argumento estándar que ya hemos utilizado antes, e° es adherente a lo más a dos caras.

(i) Sea R la cara cuya frontera es C y supongamos que $e^\circ \cap C \neq \emptyset$. Como e° es conexo y $e^\circ \cap C$ cerrado en e° , para que $e^\circ \subset C$ basta que $e^\circ \cap C$ sea abierto en e° . Sea $x \in e^\circ \cap C$. Un disco abierto Δ centrado en x suficientemente pequeño, corta al grafo en un subarco de la arista e° , y por ser x adherente a R , ese disco corta a R . Ahora bien, $\Delta \setminus e^\circ$ tiene dos componentes conexas Δ^+, Δ^- en cuyas adherencias está contenido el arco $\Delta \cap e^\circ$. Como Δ corta a R , una de esas componentes corta a R , por ejemplo Δ^+ , y como Δ^+ es conexa y no corta al grafo, necesariamente $\Delta^+ \subset R$. Así $\Delta \cap e^\circ \subset \overline{\Delta^+} \subset \overline{R}$, con lo que $\Delta \cap e^\circ \subset e^\circ \cap C$ y $\Delta \cap e^\circ$ es un entorno de x en e° . En fin, como los extremos de la arista son adherentes a su interior, de que $e^\circ \subset R$ se sigue que $e \subset R$.

(ii) Ahora supongamos que e está en un ciclo. Un ciclo es una curva de Jordan, luego divide el plano en dos regiones cuya frontera común es el ciclo, y por tanto e es frontera de al menos dos caras distintas, y ya explicamos al principio que no puede haber más.

(iii) Por reducción al absurdo, supongamos que a ambos lados de e hay caras distintas, E_1 y E_2 . Sean x e y los extremos de la arista e . Elegimos la cara E_2 de manera que al recorrer la arista e de y a x la cara E_2 quede a la izquierda. Tomamos como punto de partida uno de E_2 muy próximo a x , a partir del cual trazaremos un camino. Al vértice x llegarán aristas distintas a e y adherentes a la cara E_2 : elegimos la primera. Entonces existe un camino muy cercano a esta arista y contenido en E_2 . Lo trazamos hasta llegar al próximo vértice y repetimos el proceso. Si el vértice al que llegamos es de grado 1, podemos rodearlo y recorrer la arista por el otro lado en sentido contrario. De este modo vamos recorriendo aristas del grafo y trazando un camino en E_2 . Es posible que una misma arista se recorra de nuevo, pero será en sentido contrario y el camino se trazará por el otro lado de la arista. Hacemos esto siempre que podamos sin repetir arista. El camino que hemos ido trazando en E_2 no tiene intersecciones y está a la izquierda de las aristas que recorre.

Como hay un número finito de aristas, llegará un momento en el que la siguiente arista que corresponda ya había sido recorrida en el mismo sentido. La primera vez que eso ocurra será necesariamente cuando el camino llegue al punto de partida (próximo al vértice x). En efecto, supongamos que llegamos a un vértice distinto de x desde el cual vayamos a trazar el camino por una arista que ya habíamos recorrido en el mismo sentido. En ese vértice distinto inciden al menos dos aristas e_1 y e_2 recorridas consecutivamente en el mismo sentido, y la arista e_3 que llega para cerrar el camino debe continuar por e_2 . Así, necesariamente llega de tal manera que cuando e_1 llegó debería haber continuado por e_3 y no e_2 . Contradicción. Visto esto, y por estar E_2 sólo a un lado de e , es claro que habremos regresado al inicio recorriendo la arista e desde el extremo y .

En consecuencia, si vamos anotando los vértices al recorrer las aristas, nos saldrá una sucesión x, v_1, \dots, v_m, y, x , donde los v_i pueden estar repetidos o ser x o y . Esto es un camino dentro del grafo, *que contiene un ciclo del que la arista e forma parte*. Llegamos de este modo a un absurdo, pues la hipótesis es que e no está en ningún ciclo.

Encontremos ese ciclo. En primer lugar, si algún $v_i = x$, eliminamos todos los vértices anteriores al último de esos $v_i = x$. Después, si algún $v_i = y$, eliminamos todos los vértices

desde el primer $v_i = y$ hasta v_m . De este modo tenemos un nuevo camino x, w_1, \dots, w_n, y, x en el que los w_k son todos distintos de x y de y . Además, efectivamente hay w_k 's, pues en el camino no puede aparecer la arista e de x a y , pues en ese sentido a la izquierda está E_1 . Queda eliminar las repeticiones de los w_k . Sea $w = w_k$ el primer vértice en repetirse, y sea $w = w_\ell$ el último w . Eliminamos los vértices w_{k+1}, \dots, w_ℓ . Iterando el procedimiento obtenemos el ciclo buscado. \square

Veamos otro resultado importante sobre las caras de un grafo plano:

Proposición 7.3. *Sea G un grafo plano 2-conexo. Entonces todas las caras de G tienen por frontera un ciclo.*

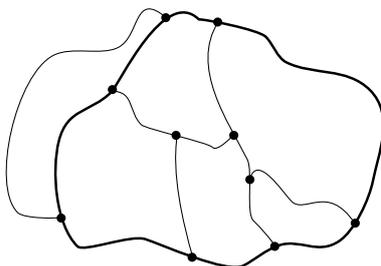


FIGURA 20. Construcción de un grafo plano 2-conexo.

Demostración. En realidad vamos a probar más: que el embebimiento se construye a partir de una curva de Jordan, añadiendo sucesivos arcos que sólo cortan a la parte anterior en sus extremos (Figura 20). Esto da lo que se quiere por el resultado de separación 5.1. Veamos pues lo que decimos. Como G es 2-conexo, contiene algún ciclo C . Si $G = C$ hemos terminado. Si no, como G es conexo, tiene una arista e con vértices $u \in C, v \notin C$. Ahora, como G es 2-conexo, G^u es conexo, y podemos tomar el menor camino γ en G^u de v a un vértice $w \in C$. Resulta que el camino $\Gamma = e \cup \gamma$ es un arco cuyos únicos vértices en C son u y w , y tenemos el subgrafo $C \cup \Gamma$. Si $G = C \cup \Gamma$ hemos terminado, y si no repetimos el proceso. En todo caso, en un número finito de pasos habremos concluido. \square

(7.4) Pegado de dos grafos planos por un vértice. En la demostración del Teorema de Kuratowski tendremos que ver que es posible pegar sin salir del plano dos grafos planos G y G' con aristas poligonales por dos vértices $a \in V(G), a' \in V(G')$. Esto puede parecer un asunto sencillo, y si la frontera exterior del grafo fuera convexa sería trivial hacer el pegado. Pero puede suceder que no sea convexa, y que el vértice que queremos pegar se encuentre en una parte cóncava de la frontera del grafo, y no es trivial que una cara de un grafo tenga frontera convexa. Aquí veremos que aún así el pegado se puede realizar.

En primer lugar, eligiendo el punto de infinito adecuadamente (de nuevo 7(2)) podemos suponer que los vértices a y a' que queremos pegar se encuentran en la frontera exterior de G y G' respectivamente. También podemos suponer los grafos situados en discos disjuntos para facilitar las maniobras que siguen. Empezamos con G .

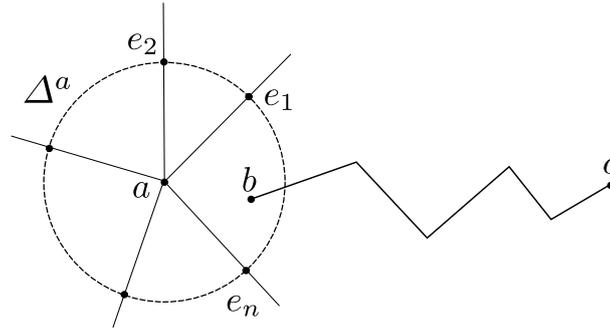


FIGURA 21. Los vértices e_1, \dots, e_n accederán al punto c gracias a la poligonal que une b con c .

Por ser poligonales las aristas, existe un disco abierto Δ^a centrado en a lo suficientemente pequeño, de modo que la intersección de Δ^a con G sea una unión de radios del disco, $\Delta^a \cap G = \cup_{i=1}^n [a, e_i]$. Existe un $b \in \Delta^a$ que está en la región exterior del grafo. Esta región, que también es exterior al otro grafo que deseamos pegar, es abierta y conexa. Podemos elegir un punto c de esta región exterior, que también esté fuera de los discos disjuntos que habíamos elegido para cada grafo. Por ser el exterior abierto y conexo, existe una poligonal que une b con el punto c , y esta poligonal no corta al grafo G' . Esta poligonal tiene un entorno que no interseca a ninguno de los dos grafos, pero sí a Δ^a . Este entorno es abierto y conexo.

Podemos transformar ahora los segmentos $[a, e_i]$ en poligonales, y conseguir que todas pasen a través del entorno hallado antes, hasta llegar a c . Ahora repetimos los mismos pasos para el grafo G' , llevando las aristas que inciden en a' al punto c . De este modo, hemos conseguido pegar los vértices a y a' a través del punto c .

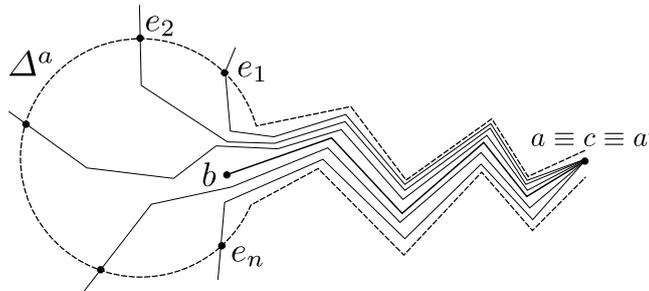


FIGURA 22. Todas las aristas se mueven al punto c a través del entorno de la poligonal.

(7.5) Pegado de dos grafos planos por una arista. Ahora veremos que dados dos grafos planos G y G' , es posible pegar dos aristas $e \in E(G)$, $e' \in E(G')$, de nuevo sin salir del plano.

Los grafos planos G y G' tienen aristas poligonales. Al igual que en la manipulación anterior, lo primero que queremos hacer es que las aristas e y e' queden en la frontera exterior de cada grafo. Esto se hace de nuevo utilizando la proyección estereográfica y

rectificando los arcos de elipse a trozos que obtenemos como aristas mediante poligonales. Hacemos esto separadamente con cada grafos, y podemos suponer que ambos grafos están situados en discos disjuntos, tratando que las aristas que queremos pegar queden enfrentadas.

Sean x e y los vértices que une e . Podemos tomar un entorno U de e de modo que $U \cap G_1 = e \cup s_1 \cup \dots \cup s_n$, donde s_1, \dots, s_n son segmentos con un extremo en x ó y , que corresponden a las aristas en las que incide e . Sea ahora $c \in e$. El punto c tiene acceso a la región exterior del grafo. Por tanto, eligiendo un punto d alejado del grafo, podemos construir una poligonal que una c con d y que corte al grafo solamente en el punto c , y un entorno de la poligonal que no corte a los grafos G ni G' , salvo quizás en un entorno del punto c .

Ahora, podemos tomar un entorno muy pequeño V de c , de manera que $V \cap e$ sea un segmento, s_e . Podemos hacer ahora que este segmento sea la nueva arista e , moviendo todas las aristas que incidieran en e por el entorno U hasta llegar al segmento. Podemos tratar al segmento como si fuera un punto, ya que lo elegimos arbitrariamente pequeño. Aplicamos lo visto en el pegado de vértices para mover el segmento s_e hasta el punto d a través del entorno de la poligonal que unía c con d , y movemos también las aristas que inciden en s_e a través de dicho entorno.

Basta con repetir los mismos pasos para la arista e' del grafo G' . Moviéndola hasta el punto d conseguiremos pegar ambas aristas.

8. CONTRACCIONES

Explicaremos en esta sección las *contracciones de aristas* en grafos planares. Las contracciones serán utilizadas en la demostración del Teorema de Kuratowski. Veremos lo que son y cómo pueden afectar a la estructura de un grafo.

Definición 8.1. Sea $e = \{x, y\}$ la arista de un grafo G . La *contracción* de la arista e , denotada por G_e , consiste en eliminar e y sustituir los vértices x e y por un nuevo vértice v donde incidirán todas las aristas que antes incidían en x o en y .

Topológicamente es lo mismo que identificar todos los puntos de la arista, y eliminar las aristas múltiples sobrantes que se generen.

Nos interesará ver que si un grafo no contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5 , al colapsar una arista suya seguirá sin contener tal subdivisión. Lo vemos en la siguiente proposición.

Proposición 8.2. *Sea G un grafo que no contiene ninguna subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5 . Entonces, si colapsamos cualquier arista $e \in E(G)$, G_e tampoco contendrá dicha subdivisión.*

Demostración. Supongamos que G_e contiene un subgrafo H que es subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$. Sea v el vértice que sustituye a la arista e . Si $v \notin H$, entonces H es subgrafo de G , puesto que como $v \notin H$, H tampoco contendrá la arista e , ni ninguna otra arista que comparta vértices con e . Esto es una contradicción, ya que G no contiene ninguna subdivisión de $K_{3,3}$ ni de K_5 .

Luego $v \in H$. Los grafos K_5 y $K_{3,3}$ tienen todos los vértices de grado 4 ó 3, y al subdividir aristas de estos grafos se generan vértices de grado 2. Por lo tanto, H , que es subdivisión de uno de estos grafos, no puede tener vértices de grado 0 ó 1, y en particular v sólo puede tener grado 2, 3 ó 4.

Supongamos que v tiene grado 2 en H . Sean $e_1 = \{v_1, v\}$ y $e_2 = \{v_2, v\}$ las aristas que inciden en v . Estas aristas provienen de otras aristas de G , que son $\tilde{e}_1 = \{v_1, *\}$ y $\tilde{e}_2 = \{v_2, *\}$, donde $*$ puede ser x ó y . Puede suceder que ambas aristas de G contengan el mismo vértice (x ó y), o que contengan distintos vértices (una a x y otra a y).

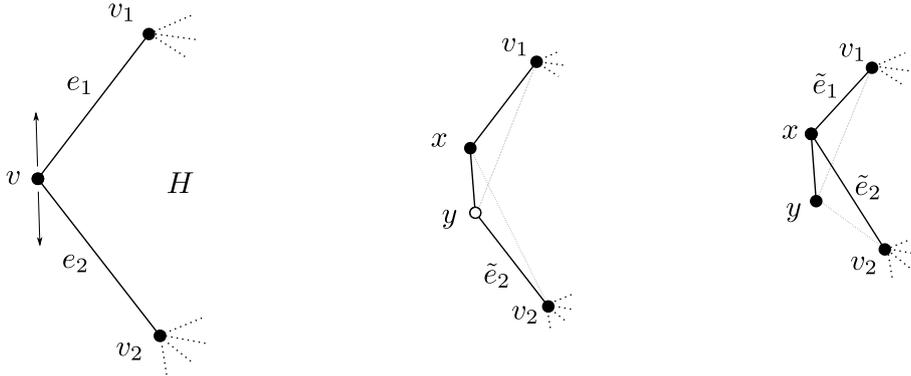


FIGURA 23. Al deshacer la contracción cuando v es de grado 2, nos puede salir un subgrafo que es subdivisión de H o un subgrafo isomorfo a H .

Ahora, en el grafo H , quitamos el vértice v , sustituimos las aristas e_1 y e_2 por \tilde{e}_1 y \tilde{e}_2 , y en caso de que estas últimas no contengan el mismo vértice añadimos la arista $\{x, y\}$. El grafo resultante es subgrafo de G y es isomorfo a H o subdivisión de H , lo que quiere decir que G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5 (Figura 23). Contradicción.

Tenemos ahora dos casos restantes, que el grado de v sea 3 ó 4.

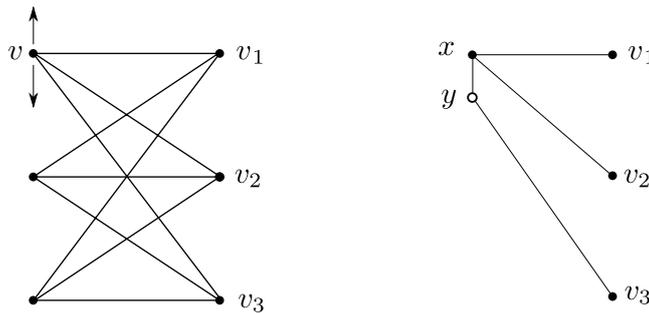


FIGURA 24. Explicación para caso (ii) cuando v tiene grado 3.

Si v es de grado 3, entonces H es subdivisión de $K_{3,3}$ y v no es un vértice de subdivisión. Si deshacemos la contracción, quedan dos vértices x e y , que pueden estar conectados con otros tres vértices, v_1, v_2 y v_3 . Exploramos los casos posibles:

- (i) Si el vértice x está conectado con estos tres vértices, nos olvidamos del vértice y , y tenemos que x es indistinguible de v , por lo que encontramos en G un subgrafo isomorfo a H , en el que sólo se ha renombrado el vértice v . Contradicción.
- (ii) Si x está conectado con sólo dos de ellos, v_1 y v_2 , y debe de estar conectado con el vértice restante v_3 . Por tanto puede considerarse que el vértice y es de subdivisión (Figura 24). Es decir, encontraríamos en G un subgrafo que se ha obtenido a partir de H , tan sólo subdividiendo la arista $\{v, v_3\}$ con el vértice y .
- (iii) Si x está conectado con tan sólo uno de los vértices, y ha de estar conectado con al menos los otros dos. Por tanto se reduce a uno de los casos anteriores.

Si v es de grado 4, entonces H es subdivisión de K_5 y v no es un vértice de subdivisión. Deshaciendo la contracción obtenemos los vértices x e y , que pueden estar conectados con los vértices v_1, \dots, v_4 . De nuevo estudiamos los casos posibles.

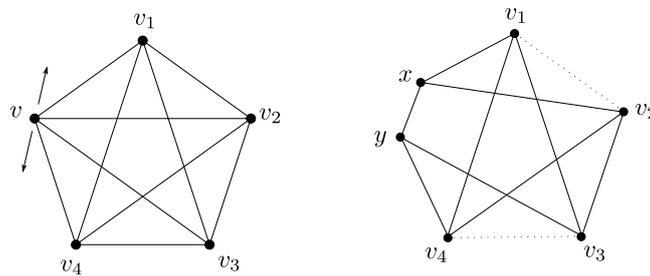


FIGURA 25. En el caso (ii) cuando v tiene grado 4, G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$.

- (i) Al igual que en el caso de grado 3, si x está conectado con los cuatro vértices, encontramos directamente en G al grafo H ; y si x está conectado sólo con tres de los vértices, y deberá estar conectado con el cuarto, y podrá considerarse como un vértice de subdivisión, por lo que encontraremos en G un subgrafo que es subdivisión de H .
- (ii) Por lo tanto, el caso interesante es en el que x está conectado con dos vértices e y con los otros dos, pues los demás casos se reducen a alguno de los anteriores. Ignoramos los vértices de subdivisión de H , para razonar directamente sobre K_5 . Esto no tiene influencia al deshacer la contracción. Al deshacerla, nos queda un grafo con 6 vértices. Supongamos que x está conectado con v_1 y v_2 , e y con v_3 y v_4 . Entonces podemos conseguir la siguiente partición de vértices: $V_1 = \{x, v_3, v_4\}$ y $V_2 = \{y, v_1, v_2\}$; y observamos que todos los vértices de V_1 están conectados con todos los vértices de V_2 , luego tenemos un subgrafo que es $K_{3,3}$ (Figura 25). Contradicción.

□

Definiremos un concepto importante en la Teoría de Grafos, el de la *3-conexión*. En la sección 1 vimos el concepto de *1-conexión* y *2-conexión*. Todos ellos son casos concretos de la *n-conexión*, que no definiremos pues en nuestro contexto sólo usaremos hasta la *3-conexión*.

Definición 8.3. Un grafo G es 3-conexo si tiene más de 3 vértices y además no existen 2 vértices en él, v_1 y v_2 , tales que el grafo G^{v_1, v_2} obtenido quitando los vértices v_1 y v_2 y todas las aristas incidentes en estos vértices es no conexo. Es decir, necesitamos al menos 3 vértices para desconectar G .

Nos interesa el siguiente resultado, que relaciona la 3-conexión y las contracciones.

Proposición 8.4. Sea G un grafo 3-conexo de orden (es decir, número de vértices) mayor o igual que 5. Entonces G tiene una arista $e \in E(G)$ tal que G_e , el resultado de contraer la arista e , es 3-conexo.

Demostración. Supongamos que G es un grafo 3-conexo de orden mayor o igual que 5, de manera que colapsando cualquier arista del grafo el resultado es un grafo no 3-conexo. Sea por tanto $e \in E(G)$ una arista cualquiera y v_e el vértice que resulta de colapsar la arista e . Sabemos que G_e no es 3-conexo. Vemos que uno de los dos vértices que desconectan G_e debe de ser v_e . En caso contrario, x e y son los vértices que desconectan G_e , y ambos son distintos de v_e . Sea C_1 la componente conexas de $G_e^{x, y}$ que tiene el vértice v_e , y C_2 la unión de las demás componentes conexas. Tomamos cualquier par de vértices v_1, v_2 , con $v_1 \in C_1$ y $v_2 \in C_2$. Entonces queda claro que en G_e hay un camino entre v_1 y v_2 , y cualquier camino entre ellos pasa por x ó y . Si deshacemos la contracción, cualquiera de los vértices de e está conectado con algún vértice de C_2 , que no cambia con la contracción, por el mismo camino que habríamos elegido para v_e . Por tanto este camino pasará por x ó y , y se deduce que los vértices x e y desconectan G , lo cual es absurdo.

Sea $z_e \in V(G_e)$ el otro vértice tal que $G_e^{v_e, z_e}$ no es conexo. Entonces, si la arista $e = \{x, y\}$, tampoco es conexo G^{x, y, z_e} (el resultado de quitarle a G los vértices x, y y z_e junto a todas las aristas que inciden en estos vértices), pues los caminos que conectan las distintas componentes de $G_e^{v_e, z_e}$ pasan necesariamente por z_e o por v_e , y al deshacer la contracción estos caminos pasarán por x, y o z_e .

Elegimos una arista $e = \{x, y\}$ que maximice el orden de la componente conexas más grande de G^{x, y, z_e} , y llamamos C a esa componente asociada a e . Sea C' otra componente de G^{x, y, z_e} . Entonces existe una arista $f \in E(G)$ que conecta z_e con un vértice $u \in V(C')$, pues si no, bastarían los vértices x e y para desconectar G . Por lo visto anteriormente, G_f no es 3-conexo y los vértices $z_f, u, y z_e$ desconectan G .

El subgrafo de G inducido por $C \cup \{x, y\}$ es conexo, y el vértice z_f no lo desconecta. Si lo hiciera, los vértices x e y quedarían en una sola de las componentes de este subgrafo inducido, y otra quedaría conectada al resto del grafo G a través de z_e , por lo que G^{z_e, z_f} no sería conexo. Absurdo, pues G es 3-conexo. Pero entonces G^{z_e, u, z_f} no es conexo y contiene una componente conexas más grande que C , contradicción. \square

Por último, probaremos un resultado para grafos no planares y no 3-conexos.

Proposición 8.5. Sea G un grafo no 3-conexo, donde $x, y \in V(G)$ son dos vértices que desconectan G , y sean $C_i, 1 \leq i \leq n$, las componentes conexas de $G^{x, y}$. Si todos los subgrafos G_i obtenidos añadiendo a $C_i \cup \{x, y\}$ la arista $\{x, y\}$ tienen embebimientos planos poligonales, entonces G lo tiene también.

Demostración. Consideramos para cada i un embebimiento plano poligonal H_i de G_i . Aplicamos reiteradamente el pegado de dos grafos planos por una arista, visto en la sección 7, conseguimos finalmente una embebimiento plano poligonal del grafo G , que probablemente tendrá una arista más, la $\{x, y\}$. \square

9. TEOREMA DE KURATOWSKI

En esta sección completamos la demostración del teorema de Kuratowski. Nos hemos basado y hemos completado la demostración presentada en [10]. Pueden consultarse también [1] y [5]. El enunciado completo del teorema es el siguiente:

Teorema 9.1. *Sea G un grafo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G es planar.
2. G no contiene ninguna subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$.
3. G tiene un embebimiento plano poligonal.

Hemos visto ya que la primera afirmación implica la segunda (6.5, 6.6), y es trivial que la tercera implica la primera. Demostraremos ahora que la segunda implica la tercera, y para ello a partir de ahora *planar* (resp. *no planar*) significa tener (resp. no tener) embebimiento plano *poligonal*.

Un *grafo no planar minimal* es un grafo no planar tal que cualquier subgrafo propio suyo es planar. Un *subgrafo de Kuratowski* de un grafo es un subgrafo que es subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$. Como todo grafo no planar contiene un subgrafo no planar minimal para demostrar que todo grafo no planar contiene un subgrafo de Kuratowski, basta probarlo para grafos no planares minimales. Procedemos en pasos sucesivos.

Paso 1. *Un grafo no planar minimal es 1-conexo.*

Sea G un grafo no planar minimal, y supongamos que no es conexo. Sea C una componente conexas de G . Por ser G minimal, tanto C como $G \setminus C$ son planares. Ambas representaciones planares son acotadas, luego podemos embeber en el plano ambos grafos de manera que no intersequen entre ellos. \square

Lo mismo sucede con la 2-conexión.

Paso 2. *Un grafo no planar minimal es 2-conexo.*

Sea G un grafo no planar minimal que no es 2-conexo. Sea $v \in G$ un vértice que desconecte G , y C una componente conexas de G^v . Por la minimalidad de G , el subgrafo inducido por $C \cup \{v\}$ y el inducido por $(V \setminus C) \cup \{v\}$ son grafos planares, luego podemos representarlos en el plano. Ahora podemos aplicar lo visto en la sección 7 para pegar ambos subgrafos por el vértice v . El resultado es un embebimiento plano de G . \square

Paso 3. *Sea G un grafo no planar con el menor número posible de aristas, que no contenga una subdivisión de Kuratowski. Entonces G es 3-conexo.*

El grafo G es minimal entre los grafos no planares, y por los pasos anteriores, G es 2-conexo. Queremos ver que también es 3-conexo. Supongamos por el contrario que existen $x, y \in V(G)$ que desconectan G . Sean C_1, \dots, C_n las componentes conexas de $G^{x,y}$. Por

8.5 existe una componente C_i tal que el subgrafo inducido por $C_i \cup \{x, y\}$ al que se añade la arista $\{x, y\}$ es no planar. Sea H este grafo no planar. Por la minimalidad de G , el grafo H (que ha de tener menos aristas que G) tiene un subgrafo de Kuratowski K . Como G no contiene ningún subgrafo de Kuratowski, necesariamente la arista $\{x, y\}$ no puede estar en G y debe de ser una arista del grafo de Kuratowski K .

Sea C' otra componente conexa de $G^{x,y}$, y \tilde{C} el subgrafo inducido por $C' \cup \{x, y\}$. El nuevo grafo \tilde{C} es subgrafo conexo de G , ya que está formado por C' que es conexo y por las aristas de G que unen los vértices x e y con el subgrafo C' . Entonces existe un camino P en \tilde{C} entre x e y que no contiene la arista $\{x, y\}$. Ahora, en el grafo K eliminamos la arista $\{x, y\}$ e incluimos el camino P . El grafo resultante es subgrafo de G y es subdivisión de K , luego es un subgrafo de Kuratowski de G . Contradicción, pues G no contiene tales subgrafos. \square

De esta manera hemos demostrado que un grafo no planar con número mínimo de aristas sin subgrafos de Kuratowski es 3-conexo. Para terminar la demostración *por reducción al absurdo* veremos que:

Paso 4. *Un grafo 3-conexo G que no contiene ningún subgrafo de Kuratowski es planar.*

Hacemos inducción sobre el orden de G . Si el orden es 4, G (independientemente de la conexión) es un subgrafo de K_4 , el grafo completo de 4 vértices, que es planar. Supongamos que el orden de G es mayor que 4 y que el enunciado se cumple para grafos con orden menor que el de G . Aplicamos 8.4 y obtenemos una arista $e = \{x, y\}$ de modo que G_e es 3-conexo. Además, por 8.2 G_e tampoco contiene ningún subgrafo de Kuratowski. Por hipótesis de inducción, G_e es planar, y por abuso llamaremos también G_e al embebimiento planar poligonal. Sea $G_e^{v_e}$ el grafo obtenido suprimiendo de G_e el vértice v_e y las aristas que inciden en él. Por ser G_e 3-conexo, $G_e^{v_e}$ es 2-conexo, y por 7.3 todas sus caras tienen por frontera un ciclo. Denotamos R la cara de $G_e^{v_e}$ que contiene al punto v_e y sea C su frontera.

Ahora, sean x_1, \dots, x_k los vértices unidos con $x \equiv v_e$ ordenados como estén en el ciclo C , y quitando de entre ellos el vértice y . Sean y_1, \dots, y_m los vértices adyacentes a y que no son adyacentes a x . Es claro que G^y es isomorfo al grafo H obtenido eliminando de G_e las aristas $\{v_e, y_i\}$ $i = 1, \dots, m$; en este isomorfismo $x \equiv v_e$. Nuestro objetivo será añadir el vértice y y las aristas incidentes en y al grafo plano H para obtener un grafo plano que represente a G .

Sean P_i , con $i = 1, \dots, k$, los caminos entre x_i y x_{i+1} en el ciclo C que no contienen a ningún otro x_j , y donde $x_{k+1} = x_1$. Observamos que si todos los vértices adyacentes a y están contenidos en sólo uno de los P_i , se pueden dibujar los vértices y y sus aristas adyacentes sobre el dibujo del grafo G^y sin que sus aristas intersequen, obteniendo una representación planar para G .

Para terminar veamos que en cualquier otro caso encontramos un subgrafo de Kuratowski de G .

- Si x tiene sólo un vecino, todos los vecinos de y están en un sólo P_i que es el caso resuelto.
- Si x tiene dos vecinos, la única forma de que no estén los vecinos de y en un sólo P_i es que y tenga dos vecinos de y' e y'' distintos a los de x , cada uno en un P_i distinto.

De este modo, con x, y, y', y'' y los dos vecinos de x formamos un subgrafo de G que es subdivisión de $K_{3,3}$.

- Si x tiene tres vecinos, o bien podemos hacer una reducción al caso anterior, o bien los tres vecinos de x lo son también de y . En este caso, estos tres vecinos junto a x e y forman un subgrafo de G que es subdivisión de K_5 .
- Si x tiene más de tres vecinos, siempre se puede hacer una reducción a uno de los casos anteriores, dependiendo de si y tiene tres vecinos comunes con x o no los tiene.

Así termina la demostración del Paso 4 y con él la del teorema de Kuratowski. \square

REFERENCIAS

- [1] R. DIESTEL: *Graph Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [2] S. HERKE: *Planar Graphs*.
<https://www.youtube.com/watch?v=wnYtITkWAYA>
- [3] R. LUISTO: *Proof of the Jordan Curve Theorem*.
<http://www.helsinki.fi/~luisto/JordanCurveTheorem.pdf>
- [4] J. MARGALEF, E. OUTERELO: *Introducción a la Topología*. Editorial Complutense, 1993.
- [5] B. MOHAR, C. THOMASSEN: *Graphs on surfaces*. McGraw Hill, Madrid 2004.
- [6] V. MUÑOZ, J. J. MADRIGAL: *Topología Algebraica*. Sanz y Torres, Madrid 2015.
- [7] M. H. A. NEWMAN: *Elements of the topology of plane sets of points*. University Press, Cambridge, 1964.
- [8] E. OUTERELO, J. M^A. SÁNCHEZ: *Elementos de Topología*. Sanz y Torres, Madrid 2008.
- [9] K. H. ROSEN: *Matemática discreta y sus aplicaciones*. McGraw Hill, Madrid 2004.
- [10] A. SHEFFER: *Kuratowski's Theorem*.
<http://www.math.caltech.edu/~2014-15/2term/ma006b/10%20Planar3.pdf>
- [11] J. TANTALO: *Planarity*.
<http://planarity.net>
- [12] C. THOMASSEN: *The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of surfaces*.
<http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/jordan/thomass.pdf>