UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Geometría y Topología

DIMENSIÓN ASSOUAD-NAGATA Y LA GEOMETRÍA A GRAN ESCALA DE GRUPOS NUMERABLES.

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

José Manuel Higes López

Bajo la dirección de los doctores

Jerzy Dydak
José Manuel Rodríguez Sanjurjo

Madrid, 2009

- **ISBN: 978-84-692-8446-9**

el (s, M)- recubrimiento definido por $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ con $\mathcal{U}_i = X$. Supongamos que f^n está acotada por una constante real positiva $M > 0$. Razonemos por reducción al absurdo. Si X no está acotado existe una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $d(x_i, x_j) > M \cdot i$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ con $i > j$. Sea $s = sup\{d(x_{j_1}, x_{j_2}) \mid j_1, j_2 \leq n+2\}$. Como f^n es una función de control n-dimensional existe un $(s, f^n(s))$-recubrimiento n-dimensional $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$. Por el principio del palomar existe un i y dos elementos $j_1 < j_2 \leq n+2$ tales que $x_{j_1}, x_{j_2} \in \mathcal{U}_i$. Además $d(x_{j_1}, x_{j_2}) \leq s$ con lo que estarán en la misma componente s-conexa de $\mathcal{U}_i$ pero $d(x_{j_1}, x_{j_2}) > M \cdot j_2$ lo que contradice el hecho de que f^n está acotada por M.

3) Si X es ε-discreto i.e. $d(x, y) \geq \varepsilon$ para todo $x \neq y$, entonces la función

$$f^0(s) = \begin{cases} \infty \text{ si } s \geq \varepsilon \\ 0 \text{ si } s < \varepsilon \end{cases}$$

es una función de control 0-dimensional para todo $s \in \mathbb{R}_+$. En efecto, si $s < \varepsilon$ tomando el recubrimiento definido por $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$ con $\mathcal{U}_0 = X$ se tiene que las s-componentes conexas de X son unipuntuales y así será un $(s, 0)$ -recubrimiento 0-dimensional. Recíprocamente suponemos que f^n es una función de control n-dimensional tal que $f^n(s) = 0$ para algún $s > 0$ pero X no es discreto. Como X no es discreto existirá una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de términos distintos tal que $\lim_{i \to \infty} x_i = x$ para algún $x \in X$. Sea $0 < s_0 < s$ y sea $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ un $(s_0, f^n(s_0) = 0)$-recubrimiento n-dimensional. Como la sucesión converge a x y es de términos distintos existirá $x_j \neq x$ en la bola $B(x, s_0)$ tal que x y x_j están en el mismo $\mathcal{U}_i$. Pero $0 < d(x, x_j) < s_0$ lo que contradice que f^n es una función de control n-dimensional. □

Lema 0.1.3. *Si f^n es una función de control n-dimensional de un espacio métrico (X, d) entonces para todo $s \in \mathbb{R}_+$ existe un (s, M)-recubrimiento abierto con $M = f^n(3 \cdot s) + 2 \cdot s$.*

Demostración. Sea f^n una función de control n-dimensional de un espacio métrico (X, d). Y sea $s \in \mathbb{R}_+$. Tenemos que existe un $(3 \cdot s, f^n(3 \cdot s))$-recubrimiento de la forma $\mathcal{V} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{V}_i$. Para un subconjunto V de X y un $r > 0$ definimos el conjunto

$N(V,r)$ como $N(V,r) = \{x \mid d(x,V) < r\}$, este conjunto claramente es abierto. Así construimos el recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ con $\mathcal{U}_i = N(\mathcal{V}_i, s)$. Ahora es claro que si $x, y \in \mathcal{U}_i$ satisfacen $d(x,y) \leq s$ entonces existen $x', y' \in \mathcal{V}_i$, con $d(x,x') < s$ y $d(y,y') < s$ tales que $d(x',y') \leq 3 \cdot s$, y por tanto las s-componentes conexas de cada $\mathcal{U}_i$ estarán $f^n(3 \cdot s) + 2 \cdot s$-acotadas. $\square$

Definición 0.1.4. Sea (X,d) un espacio métrico. Los tipos de dimensión más importantes para nosotros son los siguientes:

a. Diremos que tiene *dimensión de Assouad-Nagata* menor o igual que n (notación: $\dim_{AN} X \leq n$) si existe un $C \geq 0$ tal que la función $D^n(s) = C \cdot s$ es una función de control n-dimensional.

b. Diremos que X tiene *dimensión asintótica de tipo lineal (o dimensión asintótica con la propiedad de Higson)* menor o igual que n (notación: $\mathrm{asdim}_{AN} X \leq n$) si existe una $C \geq 0$, un $s_0 \in \mathbb{R}_+$ y una función n-dimensional de control D^n tal que $D^n(s) = C \cdot s$ para todo $s \geq s_0$.

c. Diremos que X tiene *dimensión de capacidad* menor o igual que n (notación: $cdim_{AN} X \leq n$) si existe una $C \geq 0$ y un $s_0 > 0$ y una función de control n-dimensional D^n tal que $D^n(s) = C \cdot s$ para todo $s \leq s_0$

d. Se dice que X tiene *dimensión asintótica* menor o igual que n (notación: $\mathrm{asdim} X \leq n$) si existe una función de control n-dimensional D^n que sólo toma valores reales finitos.

e. Se dice que X tiene *dimensión uniforme* menor o igual que n (notación: $\dim_u X \leq n$) si existe una función de control n-dimensional D^n que sólo toma valores finitos tal que $D^n(0) = 0$.

Observaciones 0.1.5. 1. La dimensión asintótica con la propiedad de Higson se llamará también en este trabajo dimensión asintótica de Assouad-Nagata, de ahí su notación. En la sección 1.1 veremos el motivo de este nombre.

2. Llamaremos $\mathbb{T}$ a una familia cualquiera de funciones de la forma $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de alguno los tipos anteriores a)-e).

3. Así, en el primer caso $\mathbb{T}$ serán todas las funciones lineales sin término independiente, en el segundo caso todas las funciones asintóticamente lineales, en el tercer caso las funciones lineales a pequeña escala...

4. De este modo diremos genéricamente que el espacio X tiene dimensión tipo $\mathbb{T}$ menor o igual que n (notación $dim_{\mathbb{T}}(X)$) para referirnos a alguno de los casos anteriores.

5. Diremos que (X,d) tiene dimensión de tipo $\mathbb{T}$ igual a n si $dim_{\mathbb{T}}(X) \leq n$ pero no ocurre que $dim_{\mathbb{T}}(X) \leq n-1$.

6. Resulta evidente que si $A \subset X$ entonces $dim_{\mathbb{T}}A \leq dim_{\mathbb{T}}X$.

Lema 0.1.6. *Sea (X,d) un espacio métrico. Se tiene las siguientes desigualdades:*

$$\text{asdim}X \leq \text{asdim}_{AN}X \leq dim_{AN}X$$

$$\text{asdim}X \leq dim_u X \leq dim_{AN}X$$

$$cdimX \leq dim_{AN}X$$

Ejemplo 0.1.7. Sea $(\mathbb{Z},d)$ con d la métrica usual. Tenemos que $dim_{AN}\mathbb{Z} = asdim\mathbb{Z} = 1$ y $cdim\mathbb{Z} = 0$.

Demostración. Sea $s > 0$. Claramente $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ es un $(s, 2\cdot s)$-recubrimiento con :

$$\mathcal{U}_0 = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} [2\cdot i\cdot(\lfloor s\rfloor + 1), (2\cdot i+1)\cdot(\lfloor s\rfloor + 1)]$$

$$\mathcal{U}_1 = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} [(2\cdot i+1)\cdot(\lfloor s\rfloor + 1), 2\cdot i\cdot(\lfloor s\rfloor + 1)]$$

Así $dim_{AN}\mathbb{Z} \leq 1$. Por otro lado no puede ser $asdim\mathbb{Z} \leq 0$ ya que el espacio es 1-conexo, así del lema 0.1.6 obtenemos la primera parte. Por otro lado el espacio es 1-discreto, con lo que del tercer apartado de la proposición 0.1.2 deducimos $cdim\mathbb{Z} = 0$. □

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función. Asociada a tal función existen otras dos funciones no decrecientes $\rho_+ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ y $\rho_- : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ llamadas *funciones dilatación y contracción* respectivamente y definidas de la forma.

$$\rho_+(M) = sup\{d_Y(f(x), f(y)) \mid d_X(x, y) \leq M\}$$

$$\rho_-(M) = inf\{d_Y(f(x), f(y)) \mid d_X(x, y) \geq M\}$$

Obsérvese que se tiene trivialmente las desigualdades:

$$\rho_-(d_X(x, y)) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_+(d_X(x, y)) \text{ para todo } x, y \in X. \tag{0.1.1}$$

Para una función no decreciente $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definiremos su inversa $\rho^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ como:

$$\rho^{-1}(s) = \begin{cases} sup\{M \mid \rho(M) \leq s\} \text{ si } s \geq \rho(0) \\ 0 \text{ si } s < \rho(0) \end{cases}$$

. Es claro que tal inversa también es no decreciente.

Proposición 0.1.8. *Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función entre espacios métricos y sean $\rho_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ y $\rho_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dos funciones no decrecientes que satisfacen:*

$$\rho_2(d_X(x, y)) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_1(d_X(x, y)) \textit{ para todo } x, y \in X. \tag{0.1.2}$$

Si D^n_Y es un función de control n-dimensional de (Y, d_Y) entonces la función D^n_X definida por $D^n_X = \rho_2^{-1} \circ D^n_Y \circ \rho_1$ es una función de control n-dimensional de (X, d_X).

Demostración. Fijemos $s > 0$ un número real positivo. Como D^n_Y es una función n-dimensional de control existe un recubrimiento $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_0, ..., \mathcal{U}_n\}$ en Y tal que las componentes $\rho_1(s)$-conexas de cada $\mathcal{U}_i$ están $D^n_Y(\rho_1(s))$-acotadas. Tomamos ahora el recubrimiento $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_0, ..., \mathcal{V}_n\}$ en X definido por $\mathcal{V}_i = f^{-1}(\mathcal{U}_i)$. Nótese que si dos puntos $x, y \in X$ satisfacen $d_X(x, y) < s$ entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \rho_1(s)$. Así, dado una s-cadena $\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ en X tenemos que $\{f(x_0), f(x_1), ..., f(x_m)\}$ es una $\rho_1(s)$-cadena. Por tanto $\rho_2(d(x_0, x_m)) \leq d_Y(f(x_0), f(x_m)) \leq D_Y^n(\rho_1(s))$ lo que implica $d(x_0, x_m) \leq \rho_2^{-1}(D_Y^n(\rho_1(s)))$ y $D_X^n = \rho_2^{-1} \circ D_Y^n \circ \rho_1$ es una función de control n-dimensional. $\square$

Definición 0.1.9. Supongamos que tenemos una función $f : X \to Y$ entre espacios métricos. Dependiendo de las propiedades ρ_+ y ρ_- tendremos la siguientes definiciones:

a. Decimos que f es *Lipschitz* si existe una constante $C > 0$ tal que $\rho_+(s) \leq C \cdot s$ si además $\rho_-(s) \geq \frac{s}{C}$ se dice que f es *un embebimiento bi-Lipshchitz o una aplicación bi-Lipshchitz.*

b. Decimos que f es *asintóticamente Lipschitz* si existen una contante $C > 0$ y un $s_0 \in \mathbb{R}_+$ tales que $\rho_+(s) \leq C \cdot s$ para todo $s \geq s_0$ si además y $\rho_-(x) \geq \frac{x}{C}$ para todo $s \geq s_0$ se dice que f es un *embebimiento cuasi-isométrico* o inmersión cuasi-isométrica.

c. Decimos que f es *Lipschitz a pequeña escala* si existe una constante $C > 0$ y un $s_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\rho_+(s) \leq C \cdot s$ para todo $s \leq s_0$ si además $\rho_-(x) \geq \frac{x}{C}$ para todo $s \leq s_0$ se dice que f es una aplicación *embebimiento bi-Lipschitz a pequeña escala.*

d. Decimos que f es una *aplicación a gran escala ó bornológica* si ρ_+ solo toma valores reales finitos i.e. $\rho_+ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, si además $\lim_{x\to\infty} \rho_-(x) = \infty$ se dice que f es un *embebimiento a gran escala* o inmersión a gran escala.

e. Se dice que f es una *aplicación uniforme* si ρ_+ sólo toma valores reales finitos, $\rho_+(0) = 0$, si además, $\lim_{x\to\infty} \rho_-(x) = \infty$ y $\rho_-(s) > 0$ para todo $s > 0$ decimos que f es un *embebimiento bi-uniforme* o inmersión bi-uniforme.

Observaciones 0.1.10. 1. No es difícil comprobar que la propiedad b) es equivalente a la existencia de dos constantes $C > 0$ y $L > 0$ tales que $\rho_+(s) \leq C \cdot s + L$ y además $\rho_-(s) \geq \frac{s}{C} - L$ en el caso del embebimiento.

2. Obsérvese que sólo las condiciones a), c) y e) implican continuidad y en el caso de los embebimientos sólo tales condiciones implican que la función f sea inyectiva.

La siguiente caracterización de aplicaciones a gran escala es una consecuencia directa de su definición.

Lema 0.1.11. *Una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ entre espacios métricos es una aplicación a gran escala si y solo si para todo real positivo ε existe un número real positivo δ tal que para todo par de puntos $x, y \in X$ que cumplan $d_X(x, y) \leq \varepsilon$ se satisface $d_Y(f(x), f(y)) \leq \delta$*

Proposición 0.1.12. *Sea (X, d) e (Y, d_Y) espacios métricos y una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ que es un embebimiento del tipo a)-e) de la definición 0.1.9. Entonces existe una función $g : (f(X), d_Y) \to (X, d_X)$ que es un embebimiento del mismo tipo a)-e) y una constante $C > 0$ tal que $d_Y(f(g(y)), y) < C$ para todo $y \in f(X)$ y $d_X(g(f(x)), x) < C$ para todo $x \in X$.*

Demostración. La demostración es directa a partir de las definiciones. □

El siguiente corolario es trivial a partir de la proposición 0.1.8 y la proposición 0.1.12.

Corolario 0.1.13. *Sea (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y sea una función $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$. Se tiene que:*

a. Si f es una aplicación bi-Lipschitz entonces $\dim_{AN}(X) = \dim_{AN}(f(X))$.

b. Si f es un embebimiento cuasi-isométrico entonces $\operatorname{asdim}_{AN}(X) = \operatorname{asdim}_{AN}(f(X))$.

c. Si f es una aplicación bi-Lipschitz a pequeña escala entonces $cdim_{AN}(X) = cdim_{AN}(f(X))$.

d. Si f es un embebimiento a gran escala entonces $\operatorname{asdim}(X) = \operatorname{asdim}(f(X))$.

e. Si f es un embebimiento bi-uniforme entonces $\dim_u(X) = \dim_u(f(X))$.

Definición 0.1.14. Se dice que una función entre espacios métricos $f : X \to Y$ es una *equivalencia a gran escala (resp. cuasi-isometría)* si f es un embebimiento a gran escala (resp. embebimiento cuasi-isométrico) y existe un $L > 0$ tal que para todo $y \in Y$ $d_Y(y, f(X)) \leq L$. Si existe una equivalencia a gran escala (resp. cuasi-isometría) entre dos espacios métricos X e Y diremos que ambos espacios son *equivalentes a gran escala (resp. cuasi-isométricos)*.

Definición 0.1.15. Se dice que una función entre espacios métricos $f : X \to Y$ es una *equivalencia bi-Lipschitz (resp equivalencia bi-Lipshchitz a pequeña escala o equivalencia bi-uniforme)* si f es un embebimiento bi-Lipschitz (resp. embebimiento bi-Lipschitz a pequeña escala o embebimiento bi-uniforme) suprayectivo. Si existe una equivalencia bi-Lipschitz (resp. bi-Lipschitz a pequeña escala o bi-uniforme) entre dos espacios métricos X e Y diremos que ambos espacios son *bi-Lipshchitz equivalentes (resp. bi-Lipschitz equivalentes a pequeña escala o bi-uniformemente equivalentes)*.

Observaciones 0.1.16.

1. Del corolario 0.1.13 deducimos que las dimensiones anteriormente construidas son invariantes de sus equivalencias correspondientes.

2. Es evidente que toda equivalencia cuasi-isométrica será una equivalencia a gran escala pero no al revés.

Lema 0.1.17. *Dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) son equivalentes a gran escala (resp. cuasi-isométricos) si existe dos aplicaciones a gran escala (resp. asintóticamente Lipschitz) $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ y una constante $C > 0$ tal que $d_X(g(f(x)), x) \leq C$ para todo $x \in X$ y $d_Y(f(g(y)), y) \leq C$ para todo $y \in Y$.*

Observaciones 0.1.18.

1. Todo espacio métrico acotado es cuasi-isométrico a un espacio unipuntual.

2. Todo espacio métrico (X, d_X) es cuasi-isométrico a un espacio métrico 1-discreto, tomando por ejemplo una 1-red maximal del espacio.

0.2. Propiedades elementales de las dimensiones

Dado un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ de un espacio métrico (X, d) existe una familia natural de funciones $\{f_s\}_{s\in S}$ asociadas a $\mathcal{U}$: $f_s(x) := \text{dist}(x, X \setminus U_s)$. Para simplificar llamamos *número local de Lebesgue* $L_{\mathcal{U}}(x)$ de $\mathcal{U}$ en x al número

$$\sup\{f_s(x) \mid s \in S\}$$

y llamamos *número (global) de Lebesque* $L(\mathcal{U})$ de $\mathcal{U}$ al número

$$\inf\{L_{\mathcal{U}}(x) \mid x \in X\}.$$

Estaremos interesados en recubrimientos con número de Lebesgue positivo. Para estos la *multiplicidad local* $m_{\mathcal{U}}(x)$ puede definirse como $1 + |T(x)|$, donde $T(x) = \{s \in S \mid f_s(x) > 0\}$ y la *multiplicidad global* $m(\mathcal{U})$ se define como

$$\sup\{m_{\mathcal{U}}(x) \mid x \in X\}.$$

Del mismo modo definimos la *r-multiplicidad local* $m^r_{\mathcal{U}}(x)$ de un recubrimiento $\mathcal{U}$ como $1 + |T^r(x)|$, donde $T^r(x) = \{i \in S \mid B(x, r) \cap U_s \neq \emptyset\}$ y la *r-multiplicidad global* $m(\mathcal{U})$ se define como

$$\sup\{m^r_{\mathcal{U}}(x) \mid x \in X\}.$$

Además definimos el número $mesh(\mathcal{U}) = sup\{diam(U_s) \mid U_s \in \mathcal{U}\}$ y diremos que un recubrimiento $\mathcal{U}$ está *uniformemente acotado* si $mesh(\mathcal{U})$ es finito.

Si la multiplicidad $m(\mathcal{U})$ es finita, entonces $\mathcal{U}$ tiene una partición natural de la unidad $\{\phi_s\}_{s\in S}$ asociada:

$$\phi_s(x) = \frac{f_s(x)}{\sum\limits_{t\in S} f_t(x)}.$$

Tal partición puede ser considerada como una *aplicación baricéntrica* $\phi : X \to \mathbb{N}(\mathcal{U})$ de X al *nervio* de $\mathcal{U}$. Consideraremos que el nervio tiene la l_1-métrica. Como cada f_s es 1-Lipschitz, $\sum\limits_{t\in S} f_t(x)$ será $2m(\mathcal{U})$-Lipschitz y cada ϕ_s será $\frac{2m(\mathcal{U})}{L(\mathcal{U})}$-Lipschitz (aquí usamos el hecho de que $\frac{u}{u+v}$ es $\frac{\text{máx}(Lip(u), Lip(v))}{\inf(u+v)}$-Lipschitz). Por tanto $\phi : X \to$

$\mathbb{N}(\mathcal{U})$ es $\frac{4m(\mathcal{U})^2}{L(\mathcal{U})}$-Lipschitz. Véase [10] y [24] para más detalles y mejores estimaciones de las constantes de Lipschitz.

Sea $\mathbb{T}$ una familia de funciones de la forma $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ como en la observación 0.1.5 se tiene el siguiente resultado (véase [52] y [31] para la demostración).

Proposición 0.2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y n un número entero no negativo. Son equivalentes:*

1. *$dim_{\mathbb{T}}(X, d) \leq n$.*
2. *Existe una $f \in \mathbb{T}$ tal que para todo $r > 0$ existe un recubrimiento $\mathcal{U}$ de X con r-multiplicidad global menor o igual que $n + 1$ y uniformemente acotado por $f(r)$.*
3. *Existe una $f \in \mathbb{T}$ tal que para todo $r > 0$ existe un recubrimiento $\mathcal{U}$ de X con multiplicidad menor o igual que $n + 1$, número de Lebesgue mayor o igual que r y uniformemente acotado por $f(r)$.*

El siguiente resultado puede consultarse en [19]

Proposición 0.2.2. *Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y sea $\mathbb{T}$ una familia de funciones de la forma 0.1.5. Consideramos el espacio métrico $(X \times Y, d_X + d_Y)$. En esta situación se tiene:*

$$dim_{\mathbb{T}}(X \times Y) \leq dim_{\mathbb{T}}(X) + dim_{\mathbb{T}}(Y).$$

Ejemplo 0.2.3. Sea $\mathbb{T}$ una cualquiera de las familias de funciones de la forma 0.1.5. Se tiene que $dim_{\mathbb{T}}(\mathbb{R}^n) = n$. Además $\operatorname{asdim}(\mathbb{Z}^n) = dim_{AN}(\mathbb{Z}^n) = n$.

0.3. Definición de conos asintóticos

Sea (X, d_X) un espacio métrico. Dado un ultrafiltro no principal ω de $\mathbb{N}$ y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, se define el ω-*límite* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (notación: $\lim_{\omega} x_n = y$) como el elemento y de X tal que para todo entorno $U(y)$ de y el conjunto $F_{U(y)} = \{n | x_n \in U_y\}$ pertenece a ω. Se puede demostrar fácilmente que el ω-límite de una sucesión de puntos siempre existe un espacio compacto.

Sea ω un ultrafiltro no principal de $\mathbb{N}$. Sea $d = \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ω-divergente de números reales positivos y sea $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ otra sucesión cualquiera de elementos de X. Ahora podemos construir el *cono asintótico* (notación: $Cone_\omega(X, c, d)$) de X de la siguiente forma:

En primer lugar definimos el conjunto de todas las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tales que la sucesión $\{\frac{d_X(x_n,c_n)}{d_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. En tal conjunto tomamos la seudo-métrica dada por:

$$D(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{\omega} \frac{d_X(x_n, y_n)}{d_n}.$$

Obsérvese que tal límite existe siempre por lo comentado anteriormente. Identificando las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $D(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ obtenemos un espacio métrico que llamaremos cono asintótico, $Cone_\omega(X, c, d)$.

Observaciones 0.3.1. Obsérvese que una aplicación asintóticamente Lipschitz entre dos espacios métricos $f : X \to Y$ induce una aplicación Lipschitz entre sus respectivos conos asintóticos $Cone_\omega(X, c, d)$ y $Cone_\omega(Y, f(c), d)$ con $f(c) = \{f(c_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

0.4. Algunas propiedades geométricas de los grupos

Definición 0.4.1. Sea G un grupo finitamente generado y sea S un sistema finito de generadores simétrico i.e. $S = S^{-1}$. Dado un elemento $g \in G$, definimos la longitud $l(g)$ de g según S como:

$$l(g) = min\{m \mid g = g_1 \cdot g_2 \cdot ... \cdot g_m \text{ con } g_i \in S\}.$$

Utilizando la convención $l(1_G) = 0$.

En esta situación definimos *la métrica de la palabra* d_S asociada a S en G como:

$$d_S(g_1, g_2) = l(g_1^{-1} g_2)$$

Proposición 0.4.2. *Sea G un grupo finitamente generado. Sean S y L dos sistemas finitos de generadores de G y sean d_S y d_L sus respectivas métricas de la palabra. La identidad $id : (G, d_S) \to (G, d_L)$ es una cuasi-isometría.*

Definición 0.4.3. Sea G un grupo numerable. Decimos que una métrica d_G en G es *invariante por la izquierda* si para todo $g, g_1, g_2 \in G$ se tiene que $d_G(g \cdot g_1, g \cdot g_2) = d_G(g_1, g_2)$.

Observaciones 0.4.4. De manera análoga se pueden definir las métricas invariantes por la derecha.

Proposición 0.4.5. *(Smith [69]) Sean d_1 y d_2 dos métricas propias invariantes por la izquierda definidas en un grupo G. La aplicación identidad $id : (G, d_1) \to (G, d_2)$ es una equivalencia a gran escala.*

Decimos que un grupo es localmente finito si todos sus subgrupos finitamente generados son finitos.

Proposición 0.4.6. *[69] Un grupo G con una métrica propia invariante por la izquierda d_G es localmente finito si y solo si $asdim(G, d_G) = 0$.*

El siguiente resultado es fácil de probar a partir de las definiciones.

Proposición 0.4.7. *Sean $H \subset G$ un subgrupo de un grupo finitamente generado G. Se cumple que:*

1. *Si H tiene índice finito en G entonces (H, d_H) es cuasi-isométrico a (G, d_G) con d_H y d_G dos métricas de la palabra.*
2. *Si H es finito y normal en G entonces $(G/H, d_{G/H})$ es cuasi-isométrico a (G, d_G) para dos métricas de la palabra $d_{G/H}$ y d_G.*

Decimos que un grupo satisface una propiedad P virtualmente si contiene un subgrupo de índice finito que satisface tal propiedad.

Corolario 0.4.8. *Todo grupo finitamente generado y virtualmente abeliano G es cuasi-isométrico al grupo $\mathbb{Z}^n$ siendo n el rango libre de torsión de un subgrupo abeliano H de índice finito en G.*

Recordamos que un grupo nilpotente G es aquel para el que existe una serie central superior es decir una serie de subgrupos normales de la forma:

$$\{1_G\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

tal que $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$. Las siguientes propiedades para conos asintóticos y grupos nilpotentes y abelianos son bien conocidas:

Teorema 0.4.9. *1. Un grupo es virtualmente nilpotente si y solo si sus conos asintóticos son localmente compactos.*

2. Un grupo es virtualmente abeliano si y solo si sus conos asintóticos son bi-Lipshchitz equivalentes a $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 1

Propiedades de la dimensión de Assouad-Nagata

La dimensión de Assouad-Nagata surgió a partir de los trabajos de Nagata (ver [1] y [57]) sobre la caracterización de la dimensión topológica en espacios metrizables. En [52] se estudiaron importantes propiedades de tal dimensión. De hecho se vio que la dimensión de Assouad-Nagata es no sólo un invariante bi-Lipschitz sino un invariante por cuasi-simetrías.

La clase de espacios métricos que tienen dimensión de Assouad-Nagata finita es muy amplia. Incluye los espacios doubling, los árboles métricos, los espacios hiperbólicos geodésicos, los buildings euclídeos y las variedades homogéneas de Hadamard (ver [52], [63][64])

Otro resultado importante de [52] relaciona resultados de Assouad [2] con resultados de Dranishnikov [27]. Así el Teorema 1.3. de [52] dice que todo espacio métrico de dimensión de Assouad-Nagata menor o igual que n admite un embebimiento cuasi-simétrico en el producto de $n+1$-árboles métricos. Tal resultado refleja la importancia de la dimensión asintótica de Assouad-Nagata ya que permite estudiar mejor los embebimientos en el cubo de Hilbert de grupos con dimensión de Assouad-Nagata finita, en particular su constante de compresión (Ver [39])

Un resultado de [52] que tendrá especial relevancia para nosotros es el Teorema 1.4.:

Teorema 1.0.10. *Supongamos que X, Y son espacios métricos, $\dim_{AN} X \leq n < \infty$, e Y es completo. Si Y es Lipschitz m-conexo para $m = 0, 1, \ldots, n-1$, entonces (X, Y) tiene la propiedad de extensión de Lipschitz.*

Recordamos que se dice que (X, Y) tiene la *propiedad de extensión de Lipschitz* si existe una constante $C > 0$ tal que para toda aplicación Lipschitz $f : A \to Y$, y para todo subconjunto A de X, existe una extensión Lipschitz $g : X \to Y$ de f tal que $Lip(g) \leq C \cdot Lip(f)$. En tal caso diremos que Y es un *extensor Lipschitz de X*. Se dice que un espacio métrico Y es *Lipschitz m-conexo* si existe una constante $C_m > 0$ tal que toda función Lipschitz $f : S^m \to Y$ admite una extensión $g : B^{m+1} \to Y$ a la $(m+1)$-bola unidad B^{m+1} de tal forma que $Lip(g) \leq C_m \cdot Lip(f)$.

En la sección 1.3.2 daremos uno de los principales resultados de este capítulo y de esta memoria. Caracterizamos la dimensión de Assouad-Nagata en términos de extensiones Lipschitz. Así los espacios de dimensión de Assouad-Nagata menor o igual que n serán aquellos para los que la n-esfera S^n es un extensor Lipschitz. Este resultado sería análogo al teorema clásico que caracteriza la dimensión topológica en términos de extensiones a esferas [50].

En la sección 1.2 estudiamos los espacios de dimension de Assouad-Nagata igual a cero. Tales espacios están relacionados con los espacios ultramétricos. Así los espacios de dimensión Assoaud-Nagata cero estarán caracterizados por admitir un embebimiento bi-Lipschitz en un espacio ultramétrico. Estos resultados los extendemos a la dimensión uniforme. La dimensión uniforme tiene cierto interés ya que para espacios acotados coincide con la dimensión grande δdX de [49]. Determinaremos así un espacio universal para los espacios métricos separables de dimensión de Assouad-Nagata nula y para todos los espacios separables de dimensión uniforme nula. Esto mejora los trabajos de [31] que encontraron un espacio universal para los espacios de dimensión asintótica nula y geometría acotada. Como apéndice de esta sección mostraremos una cantidad no numerable de espacios ultramétricos que no son equivalentes a gran escala.

En la sección 1.1 introduciremos dos funtores en la categoría Lipschitz que relacionan las dimensión asintótica de Assouad-Nagata y la dimensión de capacidad con la dimensión (global) de Assouad-Nagata. S.Buyalo en [23] introdujo la dimensión de capacidad y demostró muchas propiedades análogas a los resultados de U. Lang and T. Schlichenmaier [52] para la dimensión de Assouad-Nagata. Así muchos resultados de [23] pueden deducirse directamente de [52] usando nuestros funtores, a modo de ejemplo veremos alguno de ellos. La dimensión de capacidad juega un importante papel en el estudio de los espacios hiperbólicos visuales. Así en [23] Buyalo demostró que la dimensión asintótica de un espacio visual hiperbólico X está acotada por 1 más la dimensión de capacidad de la frontera visual de X. A la luz de nuestros resultados vemos que tal resultado es sobre la dimensión de Assouad-Nagata de la frontera visual.

1.1. Dimensión microscópica y macroscópica

Dado un espacio métrico (X, d) y $\epsilon > 0$ consideramos la métrica $\text{máx}(d, \epsilon)$ en X. Dicha fórmula no se leerá literalmente salvo en el caso $x \neq y$. De la misma forma se considera la métrica $\text{mín}(d, \epsilon)$. Un espacio métrico (X, d) se dice que es *discreto* si (X, d) es δ-*discreto* para algún $\delta > 0$, es decir, $d(x, y) > \delta$ para todos $x \neq y$.

Lema 1.1.1. *Todo espacio métrico discreto (X, d) es equivalente bi-Lipschitz al espacio métrico $(X, \text{máx}(d, \epsilon))$ para todo $\epsilon > 0$.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico δ-discreto. Basta observar que la identidad $id : (X, \text{máx}(d, \epsilon)) \to (X, d)$ es 1-Lipschitz y su inversa es $(1 + \frac{\epsilon}{\delta})$-Lipschitz puesto que $d(x, y) \leq \text{máx}(d(x, y), \epsilon)) \leq (1 + \frac{\epsilon}{\delta}) \cdot d(x, y)$ para todo $x \neq y \in X$. □

Corolario 1.1.2. *Para todo espacio métrico (X, d) y $\epsilon, \delta > 0$ el espacio $(X, \text{máx}(d, \epsilon))$ es equivalente bi-Lipschitz al espacio $(X, \text{máx}(d, \delta))$.*

Demostración. Supongamos $\epsilon > \delta$ y obsérvese que $\text{máx}(d_\delta, \epsilon) = d_\epsilon$, con $d_a = \text{máx}(d, a)$. De este modo el resultado es consecuencia directa del lema 1.1.1. □

Como la dimensión de Assouad-Nagata es un invariante de la categoría Lipschitz (corolario 0.1.13) obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.1.3. *Para todo espacio métrico* (X, d) *la dimensión de Assouad-Nagata de* $(X, \max(d, \epsilon))$ *es independiente de* $\epsilon > 0$.

Dado un espacio métrico (X, d) se puede omitir sus propiedades microscópicas al considerar el espacio $(X, \max(d, 1))$. Así definimos la *dimensión asintótica (dimensión macroscópica) de Assouad-Nagata* de (X, d) como $\dim_{AN}(X, \max(d, 1))$.

Corolario 1.1.4. *Si* X *es un espacio discreto entonces su dimensión asintótica de Assouad-Nagata es igual a su dimensión de Assouad-Nagata*

Lema 1.1.5. *La dimensión asintótica de Assouad-Nagata de un espacio métrico* X *es menor o igual que* $n \geq 0$ *si y solo si existe un constante* $C > 0$ *tal que para un* $r > 0$ *suficientemente grande existe un* $(r, C \cdot r)$*-recubrimiento* $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$ *de* X.

Demostración. Supongamos que para X existe una constante $C > 0$ tal que para todo $r > M$, con $M > 0$, existe un recubrimiento $\mathcal{U}_r = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$ de X tal que cada $\mathcal{U}_i$ es r-disjunto y el diámetro de los elementos de $\mathcal{U}_r$ está acotado por $C \cdot r$. Sea $d_M = \max(d, M)$. Observamos que el recubrimiento $\mathcal{U}_r$, $r \leq M$, formado por los conjuntos uni-puntuales es r-disjunto en (X, d_M). Como los recubrimientos $\mathcal{U}_r$, $r > M$, tienen las mismas propiedades deseadas en (X, d_M) que en (X, d) entonces $\dim_{AN}(X, d_M) \leq n$.

Si $\dim_{AN}(X, d_1) \leq n$, entonces para cada $r > 1$ existe un recubrimiento $\mathcal{U}_r = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$ de X tal que cada $\mathcal{U}_i$ es r-disjunto (en (X, d_1)) y el diámetro de los elementos de $\mathcal{U}_r$ está acotado por $C \cdot r$ en (X, d_1). Finalmente vemos que $\mathcal{U}_i$ es también r-disjunto en (X, d) y el diámetro de los elementos de $\mathcal{U}_r$ está acotado por $(C + 1) \cdot r$ en (X, d). $\square$

En vistas de la definición de la dimensión asintótica con la propiedad de Higson 0.1.4 se tiene la siguiente consecuencia directa de 1.1.5.

Corolario 1.1.6. *Si* (X, d) *es un espacio métrico, entonces su dimensión asintótica de Assouad-Nagata de* (X, d) *es igual a su dimensión asintótica con la propiedad de Higson.*

En lo que resta de sección dualizaremos los resultados anteriores de la categoría a gran escala(macroscópica) a la categoría a pequeña escala(microscópica).

Lema 1.1.7. *Todo espacio métrico acotado* (X, d) *es equivalente bi-Lipschitz a* $(X, \text{mín}(d, \epsilon))$ *para todo* $\epsilon > 0$.

Demostración. Supongamos que el espacio métrico (X, d) es δ-acotado. Por tanto la aplicación identidad $id : (X, \text{mín}(d, \epsilon)) \to (X, d)$ será $(1+\frac{\epsilon}{\delta})$-Lipschitz y su inversa será 1-Lipschitz puesto que $\text{mín}(d(x, y), \epsilon) \leq d(x, y) \leq (1 + \frac{\delta}{\epsilon}) \cdot \text{mín}(d(x, y), \epsilon))$ para todo $x \neq y \in X$. □

Corolario 1.1.8. *Para todo espacio métrico* (X, d) *y* $\epsilon, \delta > 0$ *el espacio* $(X, \text{mín}(d, \epsilon))$ *es equivalente bi-Lipschitz a* $(X, \text{mín}(d, \delta))$.

Demostración. Supongamos $\epsilon < \delta$ y por tanto $\text{mín}(d_\delta, \epsilon) = d_\epsilon$, con $d_a = \text{mín}(d, a)$. Aplicando el lema 1.1.7 obtenemos claramente el resultado. □

Análogamente como la dimensión de Assouad-Nagata es un invariante en la categoría Lipschitz se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.1.9. *Para todo espacio métrico* (X, d) *la dimensión de Assouad-Nagata de* $(X, \text{mín}(d, \epsilon))$ *es independiente de* $\epsilon > 0$.

Al igual que antes, dado un espacio métrico (X, d) se pueden descartar sus propiedades macroscópicas al considerar el espacio $(X, \text{mín}(d, 1))$. Se define por tanto la *dimensión microscópica (de Assouad-Nagata)* de un espacio métrico (X, d) como $\dim_{AN}(X, \text{mín}(d, 1))$.

Corolario 1.1.10. *Si* X *es un espacio métrico acotado entonces su dimensión microscópica (de Assouad-Nagata) es igual a su dimensión de Assouad-Nagata.*

Lema 1.1.11. *La dimensión microscópica (de Assouad-Nagata) de un espacio métrico* X *es menor o igual que* n *si y solo si existe una constante* $C > 0$ *tal que para todo* $r > 0$ *suficientemente pequeño existe un* $(r, C \cdot r)$*- recubrimiento* $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$ *de* X.

Demostración. Supongamos que existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $r < M$, con $M > 0$, hay un recubrimiento $\mathcal{U}_r = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$ de X tal que cada $\mathcal{U}_i$ es r-disjunto y el diámetro de los elementos de $\mathcal{U}_r$ está acotado por $C \cdot r$. Sea $d_M = \text{mín}(d, M)$. Observamos que el recubrimiento $\mathcal{U}_r$, $r \geq M$, consistente en el espacio total X tiene diámetro menor o igual que $(C+1) \cdot r$ en (X, d_M). Como los recubrimientos $\mathcal{U}_r$, para $r < M$, tienen las mismas propiedades deseadas en (X, d_M) que en (X, d) entonces $\dim_{AN}(X, d_M) \leq n$.

Si $\dim_{AN}(X, d_1) \leq n$, entonces para cada $r < \frac{1}{C}$ existe un recubrimiento $\mathcal{U}_r = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$ de X tal que cada $\mathcal{U}_i$ es r-disjunto (en (X, d_1)) y el diámetro de los elementos de $\mathcal{U}_r$ está acotado por $C \cdot r$ en (X, d_1). Además vemos que $\mathcal{U}_i$ es también r-disjunto en (X, d) y el diámetro de los elementos de $\mathcal{U}_r$ está acotado por $C \cdot r < 1$ en (X, d). □

Puesto que la dimensión de Capacidad de Buyalo definida en [23](ver la definición dada por nosotros en 0.1.4) puede caracterizarse por la condición del lema 1.1.11, obtenemos automáticamente el siguiente resultado.

Corolario 1.1.12. *Si (X, d) es un espacio métrico, entonces su dimensión microscópica (X, d) es igual a su dimension de capacidad.*

Veamos ahora un ejemplo en el que a partir de un resultado para la dimensión de Assouad-Nagata se obtiene de forma automática resultados para las dimensiones de capacidad y asintótica de Assouad-Nagata.

En [52] se demostró que si $X = A \cup B$, entonces:

$$\dim_{AN}(X) = \text{máx}(\dim_{AN}(A), \dim_{AN}(B)).$$

Corolario 1.1.13. *Consideraremos por $D(Y)$ o bien la dimensión microscópica de Assouad-Nagata de Y o bien la dimensión asintótica de Assouad-Nagata de Y. Si $X = A \cup B$, entonces*

$$D(X) = \text{máx}(D(A), D(B)).$$

Demostración. Basta aplicar los funtores $\text{máx}(d, 1)$ ó $\text{mín}(d, 1)$ a las métricas en cuestión. □

El siguiente teorema nos describe la dimensión de Assouad-Nagata global en términos de las dimensiones microscópicas y macroscópicas.

Teorema 1.1.14. *Sea* (X, d) *un espacio métrico, entonces:*
$dim_{AN}(X, d) = max\{dim_{AN}(X, max(d, 1)), dim_{AN}(X, min(d, 1))\}$.

Demostración. Denotamos por

$$M = max\{dim_{AN}(X, max(d, 1)), dim_{AN}(X, min(d, 1))\}$$

. Del lema 1.1.5 y del 1.1.11 deducimos que $M \leq dim_{AN}(X, d)$. Supongamos que el espacio $(X, min(d, 1))$ tiene dimensión de Assouad-Nagata menor o igual que M con constante asociada $C_1 > 1$, y que el espacio $(X, max(d, 1))$ tiene dimensión de Assouad-Nagata menor o igual que M con constante asociada $C_2 > 1$. Sea $s > 0$ y definamos $C = 2C_2C_1$. Si $s < \frac{1}{C_1}$ entonces existe un recubrimiento $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$ del espacio métrico $(X, min(d, 1))$ tal que cada $\mathcal{U}_i$ es s-disjunto y el diámetro de los elementos de $\mathcal{U}$ está acotado por $C_1 \cdot s$. Como $C_1 \cdot s < 1$, este recubrimiento del espacio (X, d) es también s-disjunto y el diámetro de los elementos de $\mathcal{U}$ está acotado por $C_1 \cdot s$. Si $s \geq \frac{1}{C_1}$ entonces existe un recubrimiento $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{U}_i$ del espacio métrico $(X, max(d, 1))$ tal que cada $\mathcal{U}_i$ es $2C_1 \cdot s$-disjunto y el diámetro de los elementos de $\mathcal{U}$ está acotado por $C_2 \cdot 2C_1 \cdot s$. Como $2C_1 > 1$, este último recubrimiento del espacio (X, d) es también s-disjunto y su diámetro estará acotado por $2C_2C_1 \cdot s$. En cualquier caso hemos demostrado que $dim_{AN}X \leq M$ con constante asociada C. □

1.2. Espacios de dimension cero

1.2.1. Espacios ultramétricos

Definición 1.2.1. Un espacio métrico (X, d) se dice que es *ultramétrico* si para todo $x, y, z \in X$ tenemos $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

Un espacio ultramétrico X puede caracterizarse por la siguiente propiedad:

Propiedad ultramétrica de los triángulos. Si un triángulo en un espacio ultramétrico X tiene los lados tales que $a \leq b \leq c$, entonces $b = c$. Resulta fácil de probar que toda bola de radio D en un espacio ultramétrico tiene diámetro D o que dos bolas de radio D en un espacio ultramétrico son o bien D-disjuntas o bien son idénticas.

Proposición 1.2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. La métrica d es ultramétrica si y solo si $f(d)$ es una métrica para toda función no decreciente de la forma $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.*

Demostración. Si d es una ultramétrica y $a \leq b = c$ son los lados de un triángulo en (X, d) entonces $f(a) \leq f(b) = f(c)$ son los lados del correspondiente triángulo en $(X, f(d))$ y por tanto $f(d)$ es una ultramétrica.

Si d no fuera una ultramétrica entonces existiría un triángulo en (X, d) cuyos lados serían de la forma $a \leq b < c$. Construyamos la función

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \leq b \\ \frac{2b}{c-b}t + \frac{bc-3b^2}{c-b} \text{ if } t \geq b \end{cases}$$

En esta situación los lados del correspondiente triángulo en $(X, f(d))$ son $f(a) \leq f(b) = b < 3b = f(c)$ lo cual contradice la desigualdad triangular □

Definición 1.2.3. Se dice que una métrica es 3^n*-valorada* si lo únicos valores que asume en $\mathbb{R}_+$ son de la forma 3^n, $n \in \mathbb{Z}$.

La desigualdad triangular para una métrica d implica el siguiente resultado:

Lema 1.2.4. *Cualquier métrica 3^n-valorada es ultramétrica.*

Lema 1.2.5. *Todo espacio ultramétrico es 3-bi-Lipschitz equivalente a un espacio ultramétrico cuya métrica es 3^n-valorada.*

Demostración. Dado un espacio ultramétrico (X, d) definimos una nueva métrica ρ en X como sigue:

$$\rho(x, y) = 3^n \qquad \text{si} \qquad 3^{n-1} < d(x, y) \leq 3^n.$$

Obviamente la aplicación identidad $\mathrm{id}\colon (X, d) \to (X, \rho)$ es 1-Lipschitz y su inversa es 3-Lipschitz. □